
1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



VERZAMELING
VAN
VOORSTELLEN,
DOOR
DE LEDEN
VAN HET
GENOOTSCHAP,
TEN SPREUKE VOERENDE:

EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN,

ELKANDER TOT ONDERLINGE OEFENING OPGEGEVEN.

TWEEDE DEEL.

(Gedrukt voor Rekening van het Genootschap.)



Te AMSTERDAM, *bij*
PIETER GERARDUS GEIJSBEEK,
1815.

Gedrukt ter Boekdrukkerij van P. E. Briët te Amsterdam.

VERZAMELING

VAN

VOORSTELLEN.



1. Men begeert het getal 276 in twee deelen te verdeelen, zoodanig dat het verſchil der deelen gelijk zij aan één zesde deel van het verdeelde getal. Door

JACOB DE GELDER.

2. Wanneer de ſom van het vierde gedeelte van het grootſte en het derde gedeelte van het kleinſte der deelen, waar in men het getal 208 verdeeld heeft, vier minder is dan het viervoudige verſchil dezer deelen, vraagt men welke die deelen zijn? Door

JACOB DE GELDER.

3. Bepaal, door eene ſtelkundige oplosſing, in welk jaartal men zich bevindt, wanneer, 307 jaren vroeger, ſedert het begin onzer tijdrekening, tweemaal zoo veel jaren, en 445 jaren later, dan dit jaartal, ſedert datzelfde begin, driemaal zoo veel jaren verloopen zijn, als de jaren dat Romen voor de geboorte *Christus* geſticht is? Door

JACOB DE GELDER.

4. Het getal 2196 in vier deelen te verdeelen, zoodanig dat wanneer men deze deelen in rang-

orde met de getallen 2, 3, 4 en 5 vermenigvuldigt, de komende producten met 3 opklimmen? NB. Men mag maar eene onbekende in de oplossing gebruiken. Door

JACOB DE GELDER.

5 Een getal te vinden, het welk bij de getallen 7, 9, 18 en 23, elk afzonderlijk opgeteld zijnde, de komende sommen eene evenredigheid maken? Door

JACOB DE GELDER.

6. In hoe veel dagen zal een schip onzen aardbol omzeilen op 50° breedte, de koers regt oost of west aanhoudende, 40 duitsche mijlen daags: doch wanneer de top van het schip 160 Rhijnl. voeten boven de oppervlakte der zee verheven is, vraagt men mede, hoe veel wegs de top meer zal afleggen, dan dat gedeelte van het schip, het welk zich aan de gemelde oppervlakte bevindt? Door

W. VAN HAARST.

7. Een zeker stuurman met zijn schip C in zee zijnde doet de volgende waarnemingen en landverkenningen, als: het strand dat hij ziet loopt regt Z. en N., op hetzelve ziet hij kaap A ten N. N. O. van zich, en peilt meer landwaarts in de toren B N. O. ten O. van zich, wetende dat dezelve Z. O. 600 Rh. roeden van kaap A gelegen is; vervolgens N. ten W. aanzeilende, bevindt hij zich in ½ uur zoo ver, dat de toren B, de kaap A en zijn schip eene regte lijn maken: vrage naar de snelheid van dit schip in één wacht of 4 uren, als mede de kortste afstanden, die hij zich bevond van de kust bij de eer-

eerſte en laatſte waarneming? rekenende een mijl op $23707\frac{1}{2}$ Rhijnl. voeten. Door

W. VAN HAARST.

8. Als iemand vier ſoorten van tarwe heeft, als van 200, 210, 220 en 230 gl. het last, en hier van 10 lasten onder een wil mengen, zoodanig, dat hem het last op 215 gl. komt te ſtaan. Hoe veel heele lasten kan hij van iedere ſoort nemen als ook hoe veel, wanneer hij van iedere ſoort evenveel wilde nemen? Door

P. JONGLAS.

9. Een Edelman had twee voorname heerlijkheden, in welke te zamen 14 ſteden waren, en onder ieder ſtad behoorden zoo veel dorpen als er ſteden in ieder heerlijkheid waren, en in ieder dorp telde hij zoo veel boerewoningen als er dorpen in ieder heerlijkheid waren: deze boeren wilde hij eene nieuwe belasting opleggen, niet zoo zeer op de menſchen als wel op de beesten, om dat hij berekenen kon, dat ieder boer zoo veel koeijen had, als er ſteden in iedere heerlijkheid waren. — Hierom ſchreef hij uit dat men hem eene guld. voor ieder beest alle jaren zoude opbrengen, het geen hem jaarlijks een inkomst van 40544 opbragt. Vrage hoe veel ſteden, dorpen, boeren en koeijen, er in ieder heerlijkheid geſchat zijn geweest? Door

P. JONGLAS.

10. Iemand kocht 30 ellen laken van $2\frac{1}{2}$ el breed om hetzelve in zijne famille te gebruiken; na de krimping werd bevonden, dat hetzelve $1\frac{1}{2}$ vierendeel op ieder 5 el lengte, en $1\frac{1}{2}$ achtſte deel op ieder $1\frac{3}{4}$ el breedte had verloren. Het

voer daar toe bekomende, was $1\frac{3}{4}$ el breed, werd gekrompen, verloor in de lengte, op ieder 18 el de geheele breedte en in breedte $\frac{1}{2}$ achtste deel. Vrage hoe veel ongekrompen voer hij kochte, veronderstellende, dat laken en voering, na de krimping elkander juist bedekten? Door

M. J. Zuidhof.

11. Twee gebroeders A en B verkochten eens eenige lasten granen aan een koopman, dewelke door nadeelige negotie, niet ter regter tijd betalen konde, zoo accordeerde hij met zijn twee crediteuren, om het kapitaal à $4\frac{1}{2}$ ten 100 's jaars, op eene behoorlijke tijd, en liefst over een jaar af te doen. De crediteuren iets wankelende, zoo verkochten zij de schuldbrief hier van aan C, voor *f* $4040\frac{2}{3}$; en toen ze hunne berekening maakten, bevonden zij, dat ze vijf van het honderd in het jaar verloren hadden. Het jaar geeindigd zijnde, kwam de koopman, om zijne schuld aan kapitaal en intrest te voldoen: dan vond tot zijne verwondering de gepasseerde schuldbrief in handen van C, die hem toonde, dat hij reeds 8 maanden daar van bezitter was geweest. Nu is de koopman begerig te weten, wat hij betalen moet, en C nieuwsgierig om den inkoop te weten. Door

M. J. Zuidhof.

12. Twee zeelieden zeilden eens op bekende N. Br. naar gisfing N. O. t. O. 27 mijlen en rekenden 1 graad in breedte veranderd te zijn. Dan, hoogte nemende, bevonden zij 20 min. meer in breedte veranderd te wezen. Dewijl nu A de koers, en B de verheid vaststelde, zoo is de vraag, waar zij hunne bestekken plaatsten,

en

en wie het naast bij de waarheid kwam; naar het plat te werken? Door

M. J. Zuidhof.

13. Als uit een willekeurig punt binnen of buiten eenen driehoek perpendiculairen op de zijden worden nedergelaten, begeert men eene equatie te vinden tusſchen de ſegmenten, waarin de zijden door deze perpendiculairen zijn gedeeld. Door

J. R. Schmidt.

14. Wanneer drie cirkels elkander ſnijden, zal het volgende plaats hebben:

1°. Wanneer de ſnijpunten, waarin de cirkels, 2 en 2 genomen, elkander ſnijden door koorden vereenigd worden, zullen deze 3 koorden elkander in eenzelfde punt ſnijden.

2°. Zoo men op deze koorden cirkels beſchrijft, zullen de lijnen, welke de ſnijpunten van deze nieuwe cirkels, 2 en 2 genomen, vereenigen, door hetzelfde punt gaan, waarin zich de 3 eerſte koorden ſnijden.

3°. Als de ſnijpunten der nieuwe met de eerſte cirkels op gelijke wijze worden vereenigd, zullen de 3 lijnen, welke hier uit ontſtaan, al mede door dit zelfde punt gaan.

4°. De regthoeken uit de deelen, waarin ieder dezer lijnen door het gemeene deelpunt geſneden is, zijn alle even groot.

Men vraagt naar het bewijs. Door

J. R. Schmidt.

15. Wanneer uit een willekeurig punt in een der diagonalen van eenen vierhoek, of in deszelfs verlengde, twee lijnen getrokken worden, waar van iedet twee der zijden, welke met die diagonaal eenen driehoek maken, of het verlengde van die zijden snijden, en men de snijpunten der zijden, welke met de andere diagonaal driehoeken maken, door lijnen vereenigt, zullen deze lijnen elkander in eenig punt van die andere diagonaal of deszelfs verlengde ontmoeten. Men vraagt naar het bewijs. Door

J. R. SCHMIDT.

16. Wanneer drie lijnen IK, IL, en IM in een punt I te zamen komen, en men uit een willekeurig punt A, twee lijnen trekt, welke twee van de eerstgenoemde lijnen IK en IL snijden in G en C en H en D, dan zal, wanneer men in de derde der eerstgenoemde lijnen IM, twee punten E en F naar welgevallen neemt, en uit F lijnen naar H en D, als mede uit E lijnen naar G en C trekt, het snijpunt B van FD en CE, en het snijpunt K van FH en GE met het punt A in eene regte lijn liggen. Vrage naar het bewijs. Door

J. R. SCHMIDT.

17. Wanneer drie lijnen IK, IL en IM in een punt I te zamen komen, en men in IK de punten F en C, en in IM de punten P en R naar welgevallen neemt, en men verder uit F, C, P en R lijnen tot de derde IL trekt, welke onderling parallel zijn, als FG, CD, PQ en RS, dan zullen, wanneer men QC, FS, PD en GR trekt, de snijpunten A van FS en QC, en B van PD en RG in eene lijn liggen, welke parallel

mel

met de getrokkene lijnen FG, CD enz. is. Men vraagt naar het bewijs. Door

J. R. SCHMIDT.

18. Tusschen twee lijnen AB en AC, die in stelling gegeven zijn, eene lijn DE te trekken gelijk aan een gegevene lijn PQ; zoodanig dat de driehoek ADE daar uit ontstaande, van eenen gegeven inhoud zij? (a) Door

S. VAN DER PAUW.

19. Van eenen gegeven veelhoek ABCDEFG een deel AHIFG af te snijden gelijk aan een gegeven regthoek LM door eene lijn PH, die of parallel is met eene gegevene lijn AQ of door een gegeven punt P loopt? (b) Door

S. VAN DER PAUW.

20. Een gegeven driehoek ABC in een voorgesteld getal deelen te deelen, die eene gegevene rede tot elkander hebben, door lijnen die met een der zijden BC van den driehoek parallel getrokken worden? (c) Door

S. VAN DER PAUW.

21. Uit twee gegevene punten A en B twee lijnen AC en BC te trekken, die in eene regte lijn DE, welke in stelling gegeven is, zullen zamen komen, zoodanig dat haar verschil gelijk zij aan eene gegevene regte lijn BD? (d) Door

S. VAN DER PAUW.

22.

(a) *Gronden der Meetkunst*, Bijvoegsel, N°. 4.
(b) Idem, N°. 6.
(c) Idem, N°. 7.
(d) Idem, N°. 14.

22. A verkoopt aan B twee ſtukken laken, inhoudende het eene zoo menigmaal 6, als het andere 7 ellen; wanneer nu van het grootſte de lengte van het kleinſte wordt afgeſneden, en de rest met het afgeſnedene vermenigvuldigd, zoo komt er 96; de inkoop van het kleinſte is de el $4\frac{1}{2}$ guld. en die van het grootſte 6 guldens, en de verkoop is de el door elkander $5\frac{1}{2}$ guld. Men vraagt naar de lengte der ſtukken, en wat er gewonnen óf verloren is? (*e*) Door

D. H. WATERMAN.

23. Iemand laat een ſtuk lijnwaat maken, dat hem op 16 ſtuiv. de el komt, het welk hij met eenige winst verkoopt; te weten, de el verkoopt hij $5\frac{1}{2}$ ſtuiv. hooger dan hij ſtuivers ten 100 wint; hoe veel heeft hij dan voor ieder el ontvangen? (*f*) Door

D. H. WATERMAN.

24. Hoe kan men 100 in twee deelen verdeelen, zoo dat het eerſte door 7 en het andere door 11 effen deelbaar zij? (*g*) Door

D. H. WATERMAN.

25. Hoe deelt men 100 in twee deelen, zoo dat hun product het tegenwoordige jaar-getal 1811 voortbrengt? Door

D. H. WATERMAN.

26.

(*e*) M. J ZUIDHOF, *Rekenk. Mengelw.* pag. 18.
(*f*) Idem, pag. 22.
(*g*) Idem, pag. 28.

26. Men heeft eenen ongeschikten vijfhoek, waar van twee buiten zijden gemeten zijn, en het ander zoo veel noodig, binnen denzelven als: de voorzijde AB 34, en de opstaande zijde AC 20, voorts is er inwendig gemeten, de diagonaal BC 42, de diagonaal CE 60, de loodlijn BF 30, en de loodlijn DG 48; vrage naar den inhoud? (h) Door

J. WESTENDORP.

27. Men heeft twee ongelijke driehoeken, maar met gelijke grondlijnen. Indien die op elkander geplaatst worden, zoodanig dat de grondlijnen sluiten, dan is de vraag hoe ver de toppen van elkander zijn, zoo de gemeene bazis 105, de kleinste opstaande zijden 50 en 85, en de grootste opstaande zijden 100 en 65 doen? (i) Door

J. WESTENDORP.

28. Gegeven zijnde eenen scherphoekigen driehoek ACD, waar van de bazis CD $= 3\sqrt{41}$, AC $= 12$ en AD $= 15$ is; in denzelven worden twee lijnen door elkander getrokken, namelijk, uit C naar de zijde AD, de lijn CE $= 13$, en uit D naar de zijde AC de lijn BD $= 17$, waar door de zijde AC aldus verdeeld is: AB $= 8$ en BC $= 4$, en AD op deze wijze in AE $= 5$ en DE $= 10$; vrage hoe ver het deelpunt F van B, C, D en E is, zijnde F het snijdpunt der lijnen BD en CE. (k) Door

J. WESTENDORP.

29.

(h) M. J. ZUIDHOF, *Meetk. Rekenb.* pag 40. N°. 5.
(i) Idem, pag. 41. N°. 6.
(k) Idem, pag. 41. N°. 7.

29. Men heeft twee ongelijke driehoeken, echter met gelijke grondlijnen, indien die op elkander geplaatst worden, zoo dat de grondlijnen juist fluiten, en dan de buitenfte opftaande zijden verlengd worden, tot dat zij boven in een punt zamenkomen, zoo ontftaat er een nieuwe driehoek op dezelfde bazis, naar welks inhoud gevraagd wordt; indien de gemeene bazis AB doet 147, de laagfte opftaande zijden AC = 70 en BC = 119; en de hoogfte opftaande zijden AD = 140 en BD = 91. (*l*) Door

J. WESTENDORP.

30. Men heeft een regthoekig parallelogram veranderd tot eenen ongelijkzijdigen zeshoek, door het affnijden van twee overftaande hoeken, waar van bekend is de diagonaal AD = 100, die van den eenen regten hoek tot den anderen loopt; de kortfte zijden zijn gebleven 45, zijnde AB = DE; de langfte zijden zijn nog AF = CD = 72, en de twee nieuw gefnedene zijden zijn BC = FE = 17; vrage naar den inhoud dezes zeshoeks? (*m*) Door

J. WESTENDORP.

31. Van eenen regthoekigen driehoek doet de bazis AB 16, en de cathetus AC 12; op de bazis ftaat een gelijkzijdige driehoek ADB, wiens top met den top des eerften, door eene regte lijn CD is zamengetrokken, waar uit het *Traperium* ACDB ontftaan is, naar welks inhoud gevraagd wordt? (*n*) Door

J. WESTENDORP.

32.

(*l*) Idem, pag. 41. N°. 8.
(*m*) Idem, pag. 42. N°. 9.
(*n*) Idem, pag. 42. N°. 10.

32. Boven eene gegevene regte lijn AB een punt P te vinden, zoodanig dat, trekkende AP en BP, AP^2 — BP^2 tot △ APB eene gegevene rede hebbe. Door

L. VAN HEUSDEN.

33. Een punt O buiten den omtrek van eenen cirkel, welks middelpunt is G, gegeven zijnde; begeert men in den omtrek van dien cirkel een punt P te bepalen, dat, trekkende uit dat punt O, door het punt P de regte OPF, het deel PF; dat tusschen den cirkel besloten wordt, gelijk zij aan eene gegevene lijn M. Door

L. VAN HEUSDEN.

34. In een gegeven cirkel den mogelijk grootsten driehoek te beschrijven? (*o*) Door

P. VAN EEGHEN CHZ.

35. Om een gegeven cirkel den mogelijk kleinsten driehoek te beschrijven? (*p*) Door

P. VAN EEGHEN CHZ.

36. Een stervende vader beveelt bij testament dat zijne twee zonen en drie dochters in zijn eerste huwelijk verwekt, van zijne nalatenschap, die volgens zijne eigene opgemaakte balans in *f* 42200 bestond, *f* 28000 zouden hebben, met be-

(*o*) STRABBE, *Fluxierekening*, pag. 185. No. 54.
(*p*) Idem No. 55.

bevel dezelve aldus te verdeelen: zoo dikwijls als een zoon *f* 1000 ontvangt zal ieder dochter *f* 1200 hebben; van de overblijvende som zoude de zijne bevruchte vrouw, in geval zij eenen zoon zoude baren, $\frac{5}{8}$ en de zoon het overige hebben; doch zoo zij eene dochter mogt ter wereld brengen zoude de moeder $\frac{7}{10}$ hebben en het overige voor de dochter zijn; zoo nu de gemelde vrouw na eenigen tijd tweelingen ter wereld brengt, namelijk eenen zoon en eene dochter, vraagt men hoe veel elk van de nalatenschap zal bekomen? (*q*) Door

P. JONGLAS.

37. Iemand vragende hoe laat het was, kreeg tot antwoord: de dag is heden van den zons op tot derzelver ondergang 15 uren lang, en als men de uren na den zons opgang met die nog voor derzelver ondergang zijn, vermenigvuldigt, komt er 56; vrage hoe laat het geweest is? Door

P. JONGLAS.

38. Iemand heeft 3 soorten van wijn, de stoop van de beste kost hem 24 stuiv., van de volgende 18 stuiv., en van de gemeenste 12 stuiv. Hij wil deze soorten zoo vermengen, dat hij de stoop voor 15 stuiv. geven kan. Hoe veel moet hij van iedere soort nemen. (*r*) Door

J. VROOM.

39.

(*q*) E. FLORYN, 2de Deel, bladz. 194. No. 108.
(*r*) P. VAN CAMPEN, *Algebra*, pag. 195. N°. 23.

39. Anno 1803 wordt de heldere ster in Boötes, of Arcturus, als dezelve op het laagste is, 30°43′ verder benoorden het toppunt geschoten dan de zuidelijkste ster in het vierkant van den grooten Beer, als die op het laagst in het noorden boven den horizon staat. Vrage op wat breedte dit zoude wezen. (*s*) Door

W. VAN HAARST.

40. Twee schaapherders over het getal der schapen sprekende, welke zij ter markt brengen, zegt A tegen B, zoo gij mij een van uwe schapen gaaft, zouden wij er ieder evenveel hebben; B antwoordde, zoo ik een van uwe schapen bij de mijne had, en ze dan het stuk voor zoo veel guldens verkocht als gij schapen zoudt overhouden, zoude ik 92 gulden bekomen; vrage hoeveel schapen ieder heeft ter markt gebragt? Door

J. VROOM.

41. Iemand van de eene stad naar de andere gaande, passeert 3 tollen, doch daar hij, bij den eersten komende, niet genoeg in den zak had om te betalen, leent hij in de herberg zoo veel als hij bij zich had en betaalt het tolgeld, zijnde een dubbeltie; bij eenen tweeden tol komende, leent hij wederom zoo veel als hij toen in den zak had en betaalt het tolgeld, zijnde een dubbeltie; zulks geschiedt ook de derde reis, doch als dan bevindt hij niets meer over te hebben; men

(*s*) K. DE VRIES, *Navig.* 2 D. bl. 65. No. 5.

men begeert te weten hoe veel hij in den begin in den zak had, zonder algebra. Door

W. J. VAN WYK.

42. Om zonder behulp van integraal rekening den inhoud van een parabolisch ſegment te vinden. Door

ABRAHAM FOCK.

42. Iemand koopt twee ſoorten van papier, van B 6 Balen en zoo veel riemen als N°. 21. meer dan van A; betaalt voor ieder Baal van A *f* 27—10 en van B *f* 31—5, dat is in alles *f* 1281; vrage hoe veel de partij B alleen gekost heeft? NB. N°. 21 is 4. (*t*) Door

H. W. CASPARI.

44. Een Rentenier geeft aan een koopman zeker getal guldens tegen één ſtuiver intrest per maand van ieder gulden; na zoo veel maanden als N°. 53. bedraagt de intrest $\frac{1}{4}$ van het kapitaal plus *f* 20 — : vrage hoe veel het kapitaal bedraagt? NB. N°. 53 is 6 (*u*) Door

H. W. CASPARI.

45. Men begeert door eene eenvoudige meetkundige conſtructie de middellijn van eenen naauwkeurig gewerkten bol te vinden? Door

JACOB DE GELDER.

46.

(*t*) MEISNERS, Rozenkrans, het 22ſte roosje.
(*u*) Idem, het 54ſte roosje.

46. De middelpunten der vier cirkels, welke de zijden van eenen onregelmatigen vierhoek aanraken, en, het zij alle naar buiten het zij alle naar binnen gelegen zijn, liggen in den omtrek van eenen cirkel: men vraagt naar het bewijs? Door

JACOB DE GELDER.

47. Gegeven zijnde de fommen der eerfte, tweede en derde magten van vier getallen, welke tot elkander in eene gewone evenredigheid ftaan, gelijk aan *a*, *b* en *c*, of 24, 170 en 1368; vraagt men deze getallen, en wel door de oplosfing eener vierkants vergelijking te vinden? Door

JACOB DE GELDER.

48. Uit de vergelijking $(x + 1)(x^2 + 1) \times (x^3 + 1) = 30x^3$ alle de waarden van x te vinden, welke aan de vergelijking voldoen? Door

JACOB DE GELDER.

49. Vindt drie getallen in eene Harmonifche progresfie, welker fom $32\frac{1}{2}$ is, en het product gelijk aan de fom der vierkanten; welke zijn deze getallen? Door

JACOB DE GELDER.

50. Eene Harmonifche progresfie van drie termen heeft deze eigenfchap, dat, wanneer men dezelve met elkander vermenigvuldigt, het product 80 is; maar zoo men de kwadraten optelt is de fom 76. Welke is deze progres? Door

JACOB DE GELDER.

51. Gegeven zijnde dat een teerling voet water 48 ponden weegt, en men eenen houten kogel van 12 duimen diameter en $9\frac{173}{378}$ pond zwaarte in het water legde, zoo is de vraag: hoe diep die zinken zoude? grondende op dezen regel der waterweegkunde: de zwaarte van een teerling voet water ſtaat tot een teerling voet inhoud, als de zwaarte van den houten kogel tot den inhoud van het duikend deel. (v) Door

J. Westendorp.

52. A, B en C nemen een ſtuk lands aan, om te beſpitten voor *f* 100—16, dat is 4 ſtuiv. de roede, maar vermits A één roede meer dan B, en B één roede meer dan C dagelijks kan omſpitten, zoo maken zij accoord dat elk naar zijn werk arbeidsloon zal genieten; dus te gelijk beginnende, zouden de dagen, die zij ter volmaking van dit werk noodig hebben, gelijk zijn aan de ſom van twee getallen, waar van het eene het dubbeld is van het andere; en waar van de vierkanten, dat van het grootſte en de ſom der getallen te zamen 1806 uitmaken, ten ware dat A na eenigen tijds door zeker toeval buiten ſtaat geraakt was, en dus B en C daarna het met hun beiden moesten voltrekken; na gedaan werk ontvangen zij hun bedongen loon, en bij het doen van rekening blijkt dat A en C evenveel hebben en B de rest. Vrage hoe veel dagen en roeden ieder gearbeid heeft en wat elk volgens accoord toekomt? Door

P. Hage.

(v) M. J. Zuidhof, *Meetk. Rekenb.* bl. 96. Voorſt. 67.

53. Den 26 Junij 1762 was zekeren ſtuurman met zijn ſchip in de Baai van Gibralter ten anker op 36°.20′ N. Br. Toen ſtak hij een pasſer, lang 9½ duim, met den eenen voet loodregt in een horizontaal dek, ½ duim diep in het hout; nam 's morgens, toen de zon boven den berg kwam, op den losſen voet van den pasſer dezelve waar, juist toen de ſtaande en losſe voet van den pasſer eenerlei ſchaduw hadden, dat is: toen die twee ſchaduwen in elkander vielen; ten zelven tijde had hij een peilkompas gereed gemaakt, en bevond daar door, dat de zon juist in het O. Z. O. zat; insgelijks giste hij, op het ſchip, van den top des bergs één duitſche mijl of 1900 roeden af te zijn; en de opening des pasſers bevond hij ongeveer 60 graden te zijn. Nu vraagt hij, hoe men, met dezen toeſtel, de hoogte des bergs, den tijd hoe laat en de miswijzing van het kompas vinden kan. Door

M. J Zuidhof.

54. Van eenen onregelmatigen vierhoek ABCD gegeven zijnde de zijden AB en AD, de hoeken A en C, en de diagonaal AC; te vinden de zijden BC en DC, het zij door berekening, het zij door conſtructie. Door

O. S. Bangma.

55. Van eenen onregelmatigen vierhoek ABCD gegeven zijnde, de deelen, waarin de overſtaande hoeken A en C door den diagonaal AC gedeeld worden; te vinden de deelen, waarin de beide andere hoeken B en D door den diagonaal BD gedeeld worden. Door

O. S. Bangma.

56. Van eenen onregelmatigen vierhoek gegeven zijnde, de zijden en den inhoud, de diagonalen te vinden. Door

O. S. BANGMA.

57. Op eene regte lijn AD is eenen halven cirkel ABCD beschreven; de middellijn AD is door de punten V en F in de drie gelijke deelen AV, VF en FD verdeeld; op de twee eerste deelen AV + VF als middellijn den halven cirkel AGF gemaakt, en op FD (het andere derde deel) den halven cirkel FED naar beneden; dan is voorts van D tot C in den omtrek van den grooten halven cirkel de radius DC en van C tot B de radius CB gepast, waar door eene *mixtiligne* geformeerd is, bestaande uit een zesde van den grooten cirkel, te weten den boog AB, de twee regte lijnen BC en CD, den halven cirkel FED naar beneden en den halven cirkel FGA naar boven; nu begeert men eene figuur te vinden, die regtlijnig en met de gegevene gelijk van inhoud is, door eenvoudige beginselen der Meetkunde, zonder eenige berekening. Door

JACOB DE GELDER.

58. In de ligchamelijke ruimte zijn eenige punten A, B, C, D, E enz. gegeven, nu begeert men de plaats van alle de punten P te vinden, zoodanig, dat, wanneer men van die punten tot elk der gegevene punten A, B, C, D, E enz. de lijnen AP, BP, CP, DP, EP enz. trekt, de som van $p \times AP^2$, $q \times BP^2$, $r \times CP^2$, $s \times DP^2$, $t \times EP^2$ enz. (verbeeldende p, q, r, s, t enz., zoo wel meetbare als onmeetbare betrekkingen tot de éénheid) altijd gelijk zij aan een gegeven vlak R? Men begeert de oplossing van dit voorstel niet stelkundig, zoo als zij bij SCHOOTENII

Excer-

Excercit. Math. pag. 255 *vers. Belg.* voorkomt, aan te vatten; maar uit de beschouwing van de figuur analijtisch op te maken: ook begeert men in den loop der oplossing aan de uitnoodiging van den Heer STRABBE, in de Noot, op pag. 356 van MONTUCLAS *Historie der Wiskunde I Deel IV Boek* te voldoen? (*) Door

JACOB DE GELDER.

59. Men heeft eene masſa geel koper, welker ſpecifique zwaarte met het zuivere gedistilleerd water, gebragt tot den grootſten graad van dichtheid, ten naauwkeurigſte vergeleken zijnde, bevonden is te zijn 8,39652; uit deze masſa wil men op de draaibank eene cilindervormige kilogramme (dat is het gewigt van eenen liter zuiver gedistilleerd water tot het maximum van dichtheid gebragt) vervaardigen, welks hoogte tot de middellijn van de bazis ſtaat als *drie* tot *twee*; hoe groot moet men dan tot dat einde de afmetingen van dien cilinder nemen? Door

JACOB DE GELDER.

60.

(*) Het vijfde voorſtel van het tweede boek van APPOLLONIUS PERGEUS, het welk naar de uitgave van R. SIMPSON, aldus luidt: „*Si a quotcunque datis punctis inflectantur rectæ ad unum punctum, fuerintque ſpecies* (*hoc est figuræ ſpecie datæ*) *ab omnibus descriptæ, ſimul æqualis ſpatio dato; tangat punctum circumferentiam poſitione datam*," is een zeer bijzonder geval van het onze: indien men hetzelve ſtelkundig behandelt, zal men wel ſpoedig vinden, dat de plaats van de gevraagde punten het oppervlak van een bol is, maar men zal langs dien weg bezwaarlijk het ſchone vinden, dat in dit werkſtuk ligt opgeſloten.

60. Wanneer men de termen van eene opklimmende rekenkunstige reeks respectivelijk met de getallen 2, 3, 4, 5 en 6 vermenigvuldigt, is de som der producten 360; zoo nu het eerste product in het derde tienmaal begrepen is, vraagt men na de termen dezer reeks? Door

JACOB DE GELDER.

61. 1°. Sommige Schrijvers bewijzen, dat, wanneer men de vier zijden eens vlakken onregelmatigen vierhoeks midden door deelt, en deze vier deelingspunten door regte lijnen vereenigt, 'er een parallelogram ontstaat, welks inhoud de helft van dien onregelmatigen vierhoek is; maar deze vierhoek heeft ook nog de volgende eigenschappen:

2°. Wanneer men de hoekspuntslijnen (*Diagonalen*) dezes vierhoeks midden door deelt, en de daar uit ontstaande deelingspunten met die van de zijden des gegeven vierhoeks vereenigt, zullen hier door twee parallelogrammen, eene gemeenschappelijke hoekpuntslijn hebbende, ontstaan.

3°. Zullen de hoekpuntslijnen des eersten of grootsten parallelograms elkander, in het midden van de hoekpuntslijn der zoo even opgenoemde parallelogrammen, doorsnijden, en dit snijdingspunt zal het middelpunt der middelbare afstanden van de hoekpunten des vierhoeks zijn (*centre des moyennes distances*), van welke CARNOT, in zijne *Géométrie de position Paris* 1803, spreekt.

Men vraagt naar het bewijs dezer drie eigenschappen? Door

U. HUGUENIN.

62. In de nevenstaande Figuur is de hoek ABC = BCD = regt, en de lijnen AB, BC, en CD zijn gegeven; men begeert; uit A en D, twee evenwijdige lijnen, AE en DF te trekken, zoodanig dat haren afstand gegeven zij? (*) Door

E.
.C .D
A. .B
.F

U. HUGUENIN.

63. De ligging van drie punten A, B en C, welke zich niet in eene regte lijn bevinden, is gegeven; men kan, uit eenig punt D, den hoek ADB en uit een ander punt E den hoek BEC waarnemen; ook kunnen de hoeken BDE en BED waargenomen worden; doch verdere metingen laat het terrein niet toe: zoo nu de punten D en E zich in hetzelfde vlak van A, B en C bevinden, wordt gevraagd:

1°. Eene algebraïsche formule, ter berekening van eene der onbekenden, waar door de punten D en E kunnen bepaald worden?

2°. Eene Geometrische constructie, door welke de vijf punten A, B, C, D en E, behoorlijk op de kaart kunnen gebragt worden? Door

U. HUGUENIN.

64.

(*) Dit Voorstel laat zich zeer gemakkelijk meetkunstig construeren: door de Algebra, komt men op eene vierkants vergelijking, die men door eene kunstgreep ontwijken kan, niet tegenstaande men door dezelve de beide wortels kennen leert.

64. Een in figuur gegeven onregelmatig vierhoekig veld ABCD, door eene regte lijn EF, welke in ſtelling gegeven is, in twee ongelijke, doch bekende deelen verdeeld zijnde; (namelijk in het bouwland EFCD en het weiland ABFE) volgens eene regte lijn KM dusdanig te verdeelen, dat het ſtuk weiland AKLE het m^{de} gedeelte van het geheele weiland, het ſtuk bouwland FLMC het n^{de} gedeelte van het geheele bouwland, en eindelijk dat het ſtuk AKMD het p^{de} gedeelte van het geheele veld zij? Door

A. .K .B

E. .L .F

D. .M .C

U. HUGUENIN.

65. Van eenen regthoekigen driehoek de hypothenuſe en het verſchil der regthoekszijden gegeven zijnde, den driehoek te beſchrijven? Door

MOZES LEMANS.

66. Iemand naar zijnen ouderdom gevraagd zijnde, zegt: zoo gij uit twee getallen, wier verſchil is = 676, en het product van het verſchil derzelver cubi met de ſom der getallen zelven = 6301 8294 8096, de vijfhoekswortelen trekt, en die wortelen zamen addeert, dan hebt gij het begeerde. Nu wordt naar den ouderdom gevraagd? Door

MOZES LEMANS.

67. Iemand koopt een huis voor eenige zesthalven, hetzelve betalende met goudene ducaten,

met halve ducatons, met goud-guldens, of met guldens, moet hij er telkens een zesthalf bij doen; vrage hoe veel dit huis kost naar de minste waarde? Door

JAN PAUW.

68. A en B mangelen, A heeft goed, dat hem gereed kost 10 stuiv., stelt het in mangeling op 12 stuiv., begeert $\frac{1}{3}$ in geld; nog heeft hij goed, dat hem gereed kost 18 stuiv., stelt het in mangeling op 20 stuiv., begeert $\frac{1}{5}$ in geld: B stelt zijn goed op 39 stuiv. na vooraf $\frac{1}{4}$ in geld genoten te hebben, vrage naar de waarde van B zijn goed? Door

JAN PAUW.

69. Een winkelier koopt van A, B, C en D eenige waren: namelijk van A zoo veel ℔ als hem het ℔ van B guldens kost, van B zoo veel ℔ als hem het ℔ van C guldens kost, van C zoo veel ℔ als hem het ℔ van D guldens kost; indien hij nu van D tweemaal zoo veel ℔ koopt als van A, en ieder ℔ van A zoo veel guldens kost als C meer ponden dan B verkoopt; vrage hoe veel hij van ieder kan gekogt hebben en tot wat prijs? zoo hij 800 guldens besteedt en in het geheel 60 ℔ gekogt heeft: als mede hoe veel antwoorden in heele getallen hier op komen kunnen? Door

JAN PAUW.

70. In een stad staan twee torens juist 500 voeten van elkander; tusschen beide deze torens is met den grond gelijk eene groote vierkante steen gemetseld, welks middelpunt op 280 voeten af-

afstands van den hoogsten toren is. Op deze steen is te lezen, dat het middelpunt 75 voeten van den top des hoogsten torens verder afstaat dan van den top des anderen; ook dat het verschil der hoogten dezer torens 45 voeten bedraagt. Men vraagt naar de hoogte van iederen toren? Door

P. WOLFF.

71. In een gezelschap, bestaande uit 15 perzonen, zoo mannen als vrouwen, verteert iedere perzoon zoo veel guldens als er van zijn geslacht perzonen zijn; zoo de mannen meer verteeren dan de vrouwen, en 9 maal de gezamentlijke verteering gelijk is aan de som der cuben van het getal der mannen en der vrouwen, vraagt men hoe veel mannen en vrouwen er waren?

NB. Men verlangt de oplossing, zonder de leerwijze der vierkants vergelijkingen of van hoogere magten. Door

P. WOLFF.

72. In een zeker fabriek werken 16 perzonen van beiderlei geslacht, echter zijn er meer mannen dan vrouwen; ieder perzoon verdient in de week zoo veel guldens als er van zijn geslacht perzonen arbeiden. De eigenaar dezer fabriek kwam te overlijden, en had bij testament den werklieden een legaat gemaakt, bestaande in zoo veel guldens als de som der cuben van het getal der mannen en der vrouwen bedraagt. Zoo hun dit legaat met het geen zij in drie weken verdiend hadden wordt betaald met *f* 1624. vraagt men hoe veel mannen en vrouwen er in de fabriek arbeidden?

NB. De oplossing wordt verlangd onder dezelfde voorwaarde als die van het voorgaande Voorstel. Door

P. WOLFF.

73. Men begeert in een tuin 24 boomen te planten, zoodanig dat men 28 regels hebbe van 4 boomen ieder; de vraag is hoe de boomen geplaatst moeten worden? Door

O. S. BANGMA.

74. Wanneer van eene globe eenige schijven van gelijke dikte, door onderling parallele vlakken, zijn afgesneden, vraagt men de betrekking tusschen de inhouden van deze schijven te bepalen? Door

J. R. SCHMIDT.

75. Wanneer van eenen bol op dezelfde wijze eenige schijven van gelijken inhoud zijn afgesneden, en de dikte der eerste schijf, benevens de middellijn van den bol gegeven zijn, vraagt men de dikten van de andere schijven te bepalen? Door

J. R. SCHMIDT.

76. Zoo van eene globe eenige schijven van gelijken inhoud zijn afgesneden, en de dikten der eerste en tweede schijf gegeven zijn, vraagt men de middellijn der globe te berekenen? Door

J. R. SCHMIDT.

77. Een bol is in n schijven van gelijke dikte gesneden, zoo nu gegeven is de inhoud van de p^{de} schijf $= a$, begeert men hier uit den inhoud van de q^{de} schijf, als mede den inhoud van den geheelen bol te bepalen? Door

J. R. SCHMIDT.

78. Iemands jaren van ouderdom zijn te gelijk een driehoekig en een vierkant getal, wiens laatste wortel twee minder dan de wortel van het eerste is; welk een ouderdom heeft hij dan bereikt? Door

JACOB DE GELDER.

79. Wanneer *Alexander de Groote* vijf jaren vroeger gestorven ware, zou hij gedurende een vierde van zijnen leeftijd geregeerd hebben; doch indien hij negen jaren langer geleefd had, zou hij gedurende de helft van zijnen leeftijd aan de regering geweest zijn: in welk jaar zijns ouderdoms en zijner regering is hij dan gestorven? Door

JACOB DE GELDER.

80. Er zijn thans (A°. 1812) sedert den dood van ISAAC NEWTON, juist zoo veel jaren verloopen, als deze beroemde man oud geworden is, en toen hij geboren werd, zou onze landgenoot, CHRISTIAAN HUIGENS, (indien deze namelijk één jaar minder geleefd had,) één-vijfde van zijnen ouderdom bereikt hebben. Wanneer nu, tien en één-half jaar voor den dood van HUIGENS, NEWTON op de helft van zijne jaren was, en, twee jaren na den dood des laatsten, sedert de geboorte van HUIGENS eene geheele eeuw verloopen is geweest, vraagt men: hoe oud deze wiskundigen geworden en wanneer zij geboren en overleden zijn? Door

JACOB DE GELDER.

81. Volgens de Wet moeten de vogtmaten en graanmaten eene cilindervormige gedaante hebben; in de vogtmaten moet de hoogte het dubbeld van de middellijn van de basis en in de graanmaten de hoogte gelijk aan de middellijn van de basis zijn: men begeert dan eene formule te vinden, om de afmetingen van den liter, benevens van alle maten, welke van denzelven, zoo in het oorspronkelijke en alleen wettig stelsel, als in de nadere modificatie van hetzelve, afhangen, in millimeters te bepalen? Door

JACOB DE GELDER.

82. Een kunstenaar moet eene liter-maat, in de gedaante van eenen afgeknotten kegel, maken, welks hoogte tot de middellijn van den bodem staat als *drie* tot *twee*, en de middellijn van den bodem tot de middellijn van het bovenvlak in dezelfde evenredigheid: men vraagt: hoe vele millimeters hij deze hoogte en middellijnen binnenwerks nemen moet, om tot zijn oogmerk te komen? (De liter is de inhoud van eenen cubieken dicimeter) Door

JACOB DE GELDER.

83. De gevallen te vinden, waarin $\frac{x}{1+x^2}$ een maximum of minimum wordt? (*a*) Door

P. VAN EEGHEN, CHZ.

(*a*) STRABBE, *Fluxierekening*, pag. 186. No. 63.

84. De gevallen te bepalen, waarin de functie $x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ een maximum of minimum wordt? (*b*) Door

P. VAN EEGHEN CHZ.

85. Twee getallen ſtaan tot elkander, als twee tot één; van het eerſte een zeker getal afnemende, en dit zelfde getal bij het tweede voegende, zijn ſom en verſchil niet alleen gelijk, maar ieder bijzonder is het vierkant van dit getal; vrage welke getallen bedoeld worden? Door

A. VAN DER SWAN.

86. Wanneer men van het vierkant van een zeker getal aftrekt 29, en tot hetzelfde vierkant één addeert, en dan, de ſom met het verſchil vermenigvuldigende, 511000 tot product bekomt, is de vraag, welk getal bedoeld wordt? Door

A. VAN DER SWAN.

87. Eenige kooplieden leggen elk 125 maal zoo veel guldens in als zij kooplieden zijn, en winnen daar mede zoo veel ten honderd als zij kooplieden zijn. Wanneer men hun geheele kapitaal door hun aller winst deelt, komt er 25: hoe veel kooplieden zijn er dan geweest? (*c*) Door

A. VAN DER SWAN.

88.

(*b*) Idem, pag. 186. N°. 65.
(*c*) Zie O. S. BANGMA, *Inl. tot de Algebra*, pag. 46. N°. 32.

88. Vier getallen te vinden, zoodanig: dat altijd het verschil van twee derzelven, naar welgevallen genomen, een rationaal quadraat zij? (d) Door

L. VAN HEUSDEN.

89. Men begeert een getal te vinden van die eigenschap, dat, wanneer men hetzelve eerst tot een driehoekig en daar na tot een derighoekig getal verheft, als dan het product van het laatste en twee-en-één-derde maal het eerste, opgeteld met 100534, gelijk zij aan de som van even zoo veel termen van de vierkanten der natuurlijke opklimmende zeshoekige getallen, als er éénheden in het gevraagde getal zijn? Door

M. J ZUIDHOF.

90. De ligging van drie punten A, B en C, welke zich niet in eene regte lijn bevinden, is gegeven; uit een onbekend punt D kan men den hoek ADB waarnemen, het punt C kan echter uit dit standpunt niet worden gezien; doch, wanneer men in de rigting van BD te rug gaat, tot in E, (in diervoege, dat BDE eene regte lijn zij,) kan de hoek BEC waargenomen worden; en daar men bovendien de lengte DE meten kan, wordt gevraagd, in de veronderstelling dat de punten A, B, C, D en E in het zelfde vlak gelegen zijn:

1°. Eene formule ter berekening van eene der onbekenden, waar door de ligging der punten A, B en C, kan bepaald worden?

2°.

(d) STRABBE, *Inl. tot de Math. Wetens.* pag. 252. No. 36.

2°. Eene geometrische constructie, door welke de standpunten D en E, benevens hunne afstand DE, in behoorlijke verbinding met de punten A, B en C, op de kaart kunnen gebragt worden? Door

U. HUGUENIN.

91. In eenen gegeven cirkel een' driehoek ABC te beschrijven, zoodanig, dat, als men de zijden AB, BC en CA dezes driehoeks aan de eene zijde verlengt, deze verlengingen respectivelijk door de punten b, c en a gaan, welke, buiten den cirkel, in stand gegeven zijn? Door

U. HUGUENIN.

92. De Heer VEGA heeft, in zijne *Vorlesungen über die Mathematick*, tweede Editie, pag. 543. tot oefening zijner lezers (onder anderen meer) het volgende voorstel ter ontbinding opgegeven: de grootste en kleinste ordinaten gelijk mede de keer- of wendings-punten der kromme lijn te bepalen, tot welke de vergelijking

$$y = 864x - \frac{252x^2}{a} + \frac{28x^3}{a^2} - \frac{x^4}{a^3}$$

behoort: daar hij geene oplossing van dit vraagstuk gegeven heeft, wordt dezelve gevraagd? Door

U. HUGUENIN.

93. Op de gegevene regte lijn AB is de onbepaalde lijn AC perpendiculair, en in deze laatste is een punt D in afstand van A gegeven: uit D beweegt zich een punt gelijkmatig naar C; te gelijker tijd beweegt zich uit B met eene gelijkma-

matige beweging, welke grooter is dan die van het eerste bewegende punt, zoodanig echter, dat de beweging van dit tweede punt steeds gerigt zij naar het eerste punt, waar ook deze bewegende punten zich bevinden mogen: zoo nu AB = a, hoek ABD = α en de verhouding der snelheid van het punt B tot die van het punt D is als m tot n, wordt gevraagd de kromme lijn te bepalen, welke het uit B bewegend punt beschrijft, zoo als ook de plaats op de lijn AC aan te geven, waar zich deze beide punten te gelijk bevinden of ontmoeten zullen? Door

U. HUGUENIN.

94. Er zijn drie arithmetische progressien, wanneer men dezelve onder elkander schrijft, en dan de overeenkomstige termen met elkander vermenigvuldigt, komt er eene nieuwe reeks van de volgende eigenschap: de som der 1ste en 3de min de 2de term is 30, de som der 2de en 4de min de 3de is 71, de som der 3de en 5de min de 4de is 150, en zoo voortgaande komt er 279, 470, enz.: men vraagt naar die arithmetische reeksen? Door

J. R. SCHMIDT.

95. Van eene reeks is gegeven de som der 1ste, 3de en 5de termen 50, de som der 2de, 4de en 6de termen 98; de som der 3de, 5de en 7de is 179, en zoo vervolgende komt 311, 518, enz.: men vraagt de algemeene term van deze reeks? Door

J. R. SCHMIDT.

96. In eenen cirkel van eene gegevene middellijn, *a*, den grootsten driehoek te plaatsen, zoodanig, dat één zijner drie hoeken het dubbeld van eenen der twee andere hoeken zij? Door

JACOB DE GELDER.

97. In eenen gegevenen cirkel, wiens middellijn $= a$ is, kan men eene oneindige menigte driehoeken beschrijven, welker éénе hoek het dubbeld van éénen der twee anderen is: men vraagt: of er, onder alle deze driehoeken, een driehoek bestaa, wiens omtrek een *maximum* of *minimum* zij, en zoo ja, dan begeert men de zijden van dien driehoek te bepalen? Door

JACOB DE GELDER.

98. In eenen gegevenen cirkel, eenen driehoek te beschrijven, wiens hoek A gelijk tweemaal den hoek B is, en in welken de grootste cirkel kan beschreven worden? Door

JACOB DE GELDER.

99. In eenen cirkel, wiens middellijn gelijk aan dertien decimeters is, is een punt, op den afstand van drie decimeters van het middelpunt, gegeven: nu begeert men te vinden: hoedanig, uit dit punt, twee lijnen tot aan den omtrek, onder eenen regten hoek, moeten getrokken worden, op dat het deel des cirkels, tusschen die twee lijnen begrepen, gelijk zij aan een vierde gedeelte van zijnen geheelen inhoud? Door

JACOB DE GELDER.

100.

100. Gegeven zijnde

$$xx + yy - 5x + 9y = 968$$
$$8yy + xy - 30x + 54y = 5808$$

de waarden van x en y door eene vierkante vergelijking te vinden? Door

JACOB DE GELDER.

101. Twee schepen A en B liggen Zuid en Noord van elkander; A, ten Noorden liggende, zeilt van daar O. Z. O. en B N. N. O. tot dat zij bij elkander komen in C; zoo nu B 6 mijlen meer gezeild heeft dan A, vraagt men: hoe veel mijlen ieder gezeild heeft? en hoe ver zij eerst van elkander lagen? Door

JAN PAUW.

102. Twee schepen liggen regt Oost en West van elkander; A, die ten Oosten ligt, zeilt van daar regt Zuiden en B Z. O. ten O. tot dat zij bij elkander komen in C; zoo nu B 8 mijlen meer gezeild heeft dan A, vraagt men: hoe ver zij eerst van elkander gelegen hebben? en hoe veel mijlen ieder gezeild heeft? Door

JAN PAUW.

103. Iemand was eene zekere som dukaten schuldig, waarop hij betaalde zevenmaal zoo veel dukatons als hij nog dukaten schuldig bleef, en daarenboven nog 5 dukatons; wederom, wat verzameld hebbende, betaalde hij driemaal zoo veel dukatons, als hij nu dukaten schuldig bleef; nu resten er ter betaling nog eenige dukaten schuld, indien het heele dukaten zijn, die hij schuldig

 blijft,

blijft, is de vraag: hoe veel de minste som bedraagt, die hij in het eerst schuldig was? Door

JAN PAUW.

104. Een zilversmid heeft eene balans met ongelijke armen; in de schaal van den langsten arm eene gouden snuifdoos gewogen hebbende, bevond hij derzelver zwaarte 10 lood of 100 eng. trooisch gewigt; doch leide hij de doos in de schaal van den kortsten arm, zoo woog dezelve 65 grammes en $18\frac{1}{2}$ milli-gr.: men vraagt naar de zwaarte der doos, zoo in trooisch als in metrisch gewigt? Door

J. C. VAN SETTEN.

105. In eenen cirkel is een gelijkbeenige driehoek abc beschreven, men verlangt, om in dien zelfden cirkel nog eenen anderen gelijkbeenigen driehoek te beschrijven, welke, met den eerstgemelden, denzelfden ingeschreven cirkel gemeen heeft; zoo nu de zijden des gegevenen driehoeks $ab = bc = 13$ en de basis $ac = 10$ is, vraagt men naar de zijden des anderen. Door

J. C. VAN SETTEN.

106. Het bovenwiel A van eenen watermolen heeft 57 kammen; de schijfloop B, boven aan de spil, welke door het bovenwiel in beweging gebragt wordt, heeft 31 staven; het spoorwiel C, beneden aan den spil, 25 staven; en het wiel D, aan het waterrad, 81 kammen. Men vraagt: 1°. hoe veel maal zal het scheprad tegen de wieken omdraaijen; 2°. hoe veel maal elke wiel; 3°. na hoe veel omgangen van de wieken en in hoe veel tijds, (de wieken in een minuut vijftien maal omgaande,) zullen alle de deelen van het

loo-

loopend werk wederom in den zelfden ſtand komen, als toen de molen begon te malen? Door

F. J. MÉAN.

107. Wanneer van eene rekenkunſtige reeks van vijf termen, de eerſte term, met de éénheid vermeerderd zijnde, in den laatſten term viermaal en de ſom der twee eerſte termen min drie in de ſom der twee laatſte termen min vijf driemaal verhouden is, vraagt men deze rekenkunſtige reeks te vinden? Door

JACOB DE GELDER.

108. Wanneer men voor een zeker getal francs 40 guldens, en, voor dat zelfde onbekende getal guldens, 176 francs en 40 centimes kan inwisſelen, welke eene evenredigheid beſtaat er dan tusſchen den franc en den gulden? Door

JACOB DE GELDER.

109. Hoe kan men *honderd* gulden met *honderd* ſtukken gelds, als *zesthalven* van $5\frac{1}{2}$ ſtuivers, *dertiendhalven* van $12\frac{1}{2}$ ſtuivers en *Zeeuwſche Rijksdaalders* van 52 ſtuivers betalen? Door

JACOB DE GELDER.

110. Het getal 112 in twee deelen te verdeelen, zoodanig, dat het vierkant van het verſchil der deelen, met één-negende van het eerſte en één-zevende van het tweede deel, te zamen genomen, gelijk zij aan 210? Door

JACOB DE GELDER.

111. Wanneer men in de baſis AB van eenen gelijkbeenigen driehoek ABC, een punt P naar welgevallen aanneemt, dan zal de ſom van de

afstanden van dit punt P tot de gelijke beenen, AC en BC, dezes gelijkbeenigen driehoeks, gelijk zijn aan den afstand van één der hoeken aan de basis tot het overstaande been; men vraagt naar het bewijs? Door

JACOB DE GELDER.

112. Gegeven zijnde, een ongelijkzijdige vierhoek, waarvan de basis AB doet 120, BC 66, CD 50 en DA 32; dezelve in eenen cirkel beschreven zijnde, zoo wordt uit den hoek C, naar beneden, de diameter des cirkels getrokken, en van het onderste einde des diameters, naar boven, eene terugloopende lijn, door den vierhoek, tot aan den omtrek des cirkels, welke lijn den vierhoek deelt in rede als 33 tot 56. Vrage naar de lengte dezer deellijn? (e) Door

M. J. ZUIDHOF.

113. In een driehoek zijn twee bekende hoeken, doende 45° en 60°, en hunne overstaande zijden verschillen $4\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$. Vrage naar de lengte der drie zijden? (f) Door

M. J. ZUIDHOF.

114. Iemand is schuldig om 1200 gl. over $7\frac{1}{2}$ maand te betalen; hij betaalt echter terstond eene aanzienlijke som; over 2 maanden 100 gl. meer, voorts over 2 maanden de helft van den voorigen post, waardoor hij de rest nog $1\frac{7}{8}$ maand boven den bepaalden tijd behouden kan; men vraagt: hoe veel ieder keer betaald is? Door

M. J. ZUIDHOF.

115.

(e) Het 98 Lid der Kunstk. van H. MEISZNER.
(f) H. MEISZNER, Kunstl. Aanh. N°. 327.

115. Trek de *tetrahedraal-wortel* uit $x^6 + 21 x^5 + 168 x^4 + 637 x^3 + 1175 x^2 + 1022 x + 336$, gedeeld door 6? (g) (*) Door

M. J. ZUIDHOF.

116. Een Praagsch Burger schonk eens aan Keizer KAREL *de Vierde* eene aanzienlijke som Goud-guldens, welke de beminnaars der Rekenkunst, op de volgende wijze, zullen kunnen ontdekken: de geheele som was het product van drie getallen, waarvan het tweede vijfmaal zoo groot als het eerste en tevens gelijk aan het vierde gedeelte van het derde was; zijnde het *vierhoekig pyrgoïdaal* (†) van het eerste, het *vierhoe-*

(g) P. HALCKEN, *Zinn. Confect*, N°. 171.

(*) Een *tetrahedraal*, *vierzijdig* of *viervlakkig getal*, is eigenlijk niets anders dan een *driehoekig piramidaal* getal, het welk, indien x de wortel is, de som is van $1 + 3 + 6 + 10 +$ *enz.* $+ \frac{1}{2} x (x + 1)$, en dus gelijk bekend is, gelijk aan $\frac{1}{6} x (x + 1) (x + 2)$. De *tetrahedraal-wortel* uit eene gestelde uitdrukking te trekken, is eene uitdrukking te vinden, welke, indien zij, naar de voorschrevene formule, in de *tetrahedraal* gebragt wordt, de gegevene uitdrukking weder voortbrengt. *Noot van de provisionele Wetensch. Commissie.*

(†) Zie wat figuurlijke getallen zijn, (DE GELDER'S II *Cursus Bladz.* 330, *Noot* 84). *Piramidaal* getallen ontstaan uit de sommen der *Polygonaal* getallen (zie de aangeh. plaats.) — Een *Columnaar* of *Zuilgetal* is een polygonaal getal met zijnen wortel vermenigvuldigd. — Een *Pyrgoïdaal* of *Torengetal* is de som van een *Piramidaal* en *Columnaar getal*, tot denzelfden wortel behorende. — Zij dus x de wortel, dan is x^2 zijn *tetragonaal* of *vierhoekig* getal; $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 +$ *enz.* $+ x^2 = \frac{1}{6} x (x + 1) (2 x + 1)$ zijn *piramidaal tetragonaal* of *vierhoekig piramidaal* getal; voorts, naar de gegevene bepalingen, $x^2 \times x$ of x^3 het *vierhoekig Columnaar* getal, en $x^3 + \frac{1}{6} x (x + 1) (2 x + 1)$ het vierhoekig pyrgoïdaal getal. *Noot van de provisionele Wetensch. Commissie.*

hoekig columnaar van het tweede en het *vierhoekig piramidaal* van het derde dezer factores, bij elkander opgeteld, gelijk aan 2812985? (*h*) Door

M. J. ZUIDHOF.

117. In eenen regelmatigen vijfhoek, een quadraat te beschrijven, waarvan een der zijden parallel is aan een der zijden van den vijfhoek? (*) Door

J. R. SCHMIDT.

118. Wanneer uit een gegeven punt, lijnen naar eene gegevene lijn getrokken worden, en op deze lijnen gelijkvormige figuren beschreven worden, (te weten alle aan dezelfde zijde,) vraagt men de vergelijking van de lijn te bepalen, waar in de overeenkomstige punten van deze gelijkvormige figuren liggen? Door

J. R. SCHMIDT.

119. Wanneer men, in den omtrek van eenen cirkel, een punt A neemt, en, uit dit punt eenige koorden AB, AC, AD, enz. trekt, en op deze koorden gelijkvormige driehoeken ABE, ACF, ADG beschrijft, mits dat hunne toppen E, F en G, altijd aan denzelfden kant dezer koorden liggen; dan liggen de toppen dezer driehoeken altijd in eenen tweeden cirkel: men vraagt naar het bewijs? Door

JACOB DE GELDER.

120.

(*h*) P. HALCKEN, *Zinnen Confect.* N°. 172.

(*) Van dit Voorstel zijn reeds onderscheidene constructien gegeven, in onze *Wiskundige Oefeningen*, II *D. Voorst.* 175 en in het *Wisk. Mengelwerk*, II *D. Voorst.* 152; men vraagt hier echter eene eenvoudiger constructie. *Voorsteller.*

120. De basis van de Hyperbolische Logarithmen is 2,718281828459045235360287 4 enz. (*zie Tab. de* CALLET *p.* 14), men begeert de tientallige breuk, die bij het getal 2 staat, in eene gedurige breuk herleid te hebben, om te zien, of er in de series van de op elkander volgende breuken dezer gedurige breuk ook eenige regelmaat te bespeuren zij, zoo ja, welke is dezelve? Door

O. S. BANGMA.

121. Wanneer men met het uiteinde A van den diameter eens cirkels, den omtrek rond wandelt, terwijl men dien diameter, al wandelende, door het punt B van den omtrek schuift, zal het ander uiteinde des diameters, rondom den cirkel, eene kromlijnige figuur beschrijven, waarvan de inhoud en de omtrek gevraagd wordt. Door

O. S. BANGMA.

122. 1°. Wordt gevraagd de Integraal der differentiaal uitdrukking $\frac{(3+zz)\,dz}{(1+zz)\sqrt[4]{(1+6z+z^4)}}$ te vinden? Door

U. HUGUENIN.

123. 2°. De differentiaal uitdrukkingen

$$\frac{(1-zz)^2\,dz}{(1+zz)\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}} \text{ en } \frac{(1+zz)^2\,dz}{(1-zz)\sqrt[4]{(1-6zz+z^4)}}$$

te integreren. Door

U. HUGUENIN.

124. 3°. De Integraal der differentiaal-uitdrukking $\frac{dx}{(1 + x)\sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}$ te vinden? Door

U. HUGUENIN.

125. 4°. De differentiaal-uitdrukking $\frac{dz}{(3 - zz)\sqrt[3]{(1 + zz)}}$ te integreren? Door

U. HUGUENIN.

126. 5°. Wordt begeerd de differentiaal-uitdrukking $\frac{dz}{(3 + zz)\sqrt[3]{(1 + 3zz)}}$ te integreren? Door

U. HUGUENIN.

127. 6°. De Integraal van $\frac{dz}{(3 - zz)\sqrt[3]{(1 - 3zz)}}$ te vinden? (*) Door

U. HUGUENIN.

128.

(*) Elke differentiaal-uitdrukking, in de vijf eerste nommers voorkomende, kan, door eene enkele substitutie, tot eenen integrabelen vorm gebragt worden, uitgezonderd de tweede uitdrukking in n°. 2, welke echter, uit de eerste uitdrukking van het zelfde numero, kan afgeleid worden. *Voorsteller.*

128. Wanneer, uit eenig punt A, lijnen AR getrokken worden, naar eene gegevene lijn PQ, en eene lijn DE parallel aan PQ getrokken wordt, fnijdende de lijnen AR of derzelver verlengden in S, vraagt men de kromme lijn te bepalen, gevormd door de punten M, welke voortkomen, door, uit ieder punt S, eene perpendiculair SN op PQ te trekken, en in SN een punt M te nemen, zoodanig dat NM = AR zij? Door

J. R. SCHMIDT.

129. Wanneer, uit eenig punt A, lijnen AM naar eene gegevene lijn PQ getrokken worden, en men op PQ, altoos naar denzelfden kant, overal MN even groot neemt, en dan uit N perpendiculairen oprigt op PQ, welke AM of derzelver verlengde, fnijden in O, vraagt men naar de plaats van het punt O? Door

J. R. SCHMIDT.

130. Stellende dat een fcheve hoek KLM, (bij voorbeeld uit hout gemaakt,) met deszelfs eene been LK, langs een liniaal RS bewogen worde, (blijvende dus het eene been LM, gedurende deze beweging, evenwijdig aan zich zelven,) en dat een draad, FPS, met deszelfs eene einde, aan het uiteinde van het been LM van dien hoek KLM, in S, zij vastgemaakt, en, met deszelfs andere uiteinde, in eenig punt F; welk eene kromme lijn zal dan het punt P befchrijven, wanneer de draad, (altijd onrekbaar onderfteld wordende,) gedurende de beweging van den hoek KLM, met deszelfs gedeelte PS tegen het been LM van dien hoek uitgeftrekt blijve, en het andere deel PF met LM eenigen hoek make? Door

JACOB DE GELDER.

131. Twee onbepaalde regte lijnen AB en AC liggen op elkander; de lijn AB draait, in hetzelfde vlak, met eene gelijkmatige snelheid, om het punt A, en ten zelven tijde, dat deze lijn begint te draaijen, begint de lijn AC (die langs AB lag,) evenwijdig aan zich zelve, met eene gelijkmatige beweging, in hetzelfde vlak, waarin AB omwentelt, naar P bewogen te worden: men vraagt, naar de vergelijking der kromme lijn, welke, door de snijding dezer bewegende lijnen ontstaat, en bovendien de hoedanigheden dezer kromme, tot welke de *Quadratrix* van DINOSTRATES behoort, en die onnoemelijke vele takken heeft, te ontwikkelen? Door

JACOB DE GELDER.

132. Wanneer men zich twee gelijkmiddelpuntige cirkels verbeeldt en den omtrek van eenen dezer twee cirkels, op eene, in eene standvastige stelling, gegevene regte lijn, laat omdraaijen, zoodanig, dat deze twee cirkels ten opzigte van elkander in dezelfde onderlinge betrekkelijke stelling blijven, dan vraagt men: welk eene kromme lijn eenig punt van den omtrek des anderen cirkels, gedurende deze beweging, beschrijven zal, en voorts den loop en de hoedanigheden dezer kromme lijn, als hare subtangens, buigpunten, keerpunten, knopen (of *nodi*), kromtestraal, inhoud, enz. te onderzoeken? Door

JACOB DE GELDER.

133. Men vraagt naar de afstanden, die de boomen, in figuur 62 (*Voorst.* 73.) op elken regel van elkander hebben, wanneer NO en PQ, door de breedte en lengte van den tuin, gegeven zijn;

zijn; niet door constructie; maar door berekening? Door

O. S. BANGMA.

134. Men vraagt naar de afstanden, die de boomen, in figuur 61, (*Voorst.* 73) op elken regel van elkander hebben, als mede de afstanden DN en AQ, of OB en PC, wanneer DO en AP, of NB en QC door de breedte en lengte van den tuin gegeven zijn? Door berekening, als voren. Door

O. S. BANGMA.

135. Men begeert in eenen bol van eene gegevene straal een cilindervormig gat te boren (de as van den cilinder door het middelpunt gaande,) zoodanig, dat het overblijvend massive deel van den bol gelijk aan zeven-achtste van denzelven zij? Door

JACOB DE GELDER.

136. Wanneer, in eenen driehoek, een cirkel beschreven is, en voorts nog de cirkels, welke ééne der zijden uitwendig en de andere verlengde zijden inwendig aanraken; dan zullen de lijnen, welke, uit de hoekpunten dezes driehoeks, tot de aanrakings-punten van denzelfden cirkel getrokken worden, elkander in hetzelfde punt ontmoeten: men vraagt zulks te bewijzen? Door

JACOB DE GELDER.

137. Wanneer, men om eenen driehoek ABC eenen cirkel beschrijft, en eenen der bogen ADB, door ééne der zijden dezes driehoeks onderspannen

 wor-

wordende, in D, in twee gelijke deelen verdeelt; dan zal, zoo wel het middelpunt des cirkels, welke in dezen driehoek beschreven is, als het middelpunt des cirkels, welke de zijde AB uitwendig en de zijden AC en BC inwendig aanraakt, gelegen zijn in den omtrek van eenen anderen cirkel, welke, uit het midden dezes boogs, (dat is uit D,) als middelpunt, met de koorde van dien halven boog AD beschreven wordt: men vraagt hier van het bewijs? Door

JACOB DE GELDER.

138. De kromme lijn, welker vergelijking . . $xy = [b \pm \sqrt{(b^2 - y^2)}] \times (a - y)$ is, door punten te construeren? Door

J. R. SCHMIDT.

139. Men begeert de kromme lijn, waarvan de vergelijking is $x = \pm (a - y) \sqrt{\frac{2b - y}{y}}$, door punten te beschrijven? Door

J. R. SCHMIDT.

140. Als de zijden van eenen driehoek, in eenen cirkel beschreven, gegeven zijn, wordt gevraagd naar de zijden van den gelijkvormigen driehoek, om dien cirkel beschreven zijnde? Door

MOSES LEMANS.

141. Men vraagt: de hoeveelste der breuken $\frac{3}{9}$, $\frac{10}{11}$, $\frac{17}{13}$, enz. welker tellers met 7 en noemers met 2 opklimmen, een geheel getal zal zijn, en hoe vele dezer breuken die eigenschap zullen hebben? Door

JACOB DE GELDER.

142. Een gebroken te vinden, hetwelk, met deszelfs cubus verminderd zijnde, het verschil gelijk zij aan het vierkant van dit gebroken? Door

JACOB DE GELDER.

143. Zoek eene evenredigheid, welker twee eerste termen, elk met *één* vermeerderd zijnde, de sommen in reden staan, als *één* tot *twee*, zoodanig, dat de tweede term plus *één* tot den derden term min *één* staat, als *vier* tot *vijf*, en dat de som der uiterste termen *zes* meer zij dan de som der middelsten? Door

JACOB DE GELDER.

144. Een gebroken te vinden, hetwelk van deszelfs omgekeerde afgetrokken zijnde, er n.maal dit gebroken overblijve? Door

JACOB DE GELDER.

145. Gegeven zijnde $x = \sqrt{(ay^3 - b)}$, vraagt men y zoodanig te bepalen, dat x rationaal worde? (*i*) Door

A. FOCK.

146. Men begeert uit de vergelijkingen $x^{x+y} = y^n$ en $y^{x+y} = x^m$ de waarden van x en y te vinden? (*k*) (*) Door

A. FOCK.

147.

(*i*) VENEMA, *Editie van* 1783. Voorst. tot besluit, N°. 16.

(*k*) Idem, N°. 7.

(*) Dit werkstuk komt voor in de *Wisk. Verlustiging* I *Deel* N°. 172. De oplossing is aldaar onvolledig en alleen toegepast op het geval, dat $\sqrt{mn}$ rationaal is: men verlangt eene betere en vollediger oplossing. (*Wetensch. Commissie.*)

147. Anno 1716, in de lente, op éénen namiddag, stak men, op eene zekere plaats, drie stokken perpendiculair in de aarde; de lengte van den stok A boven de oppervlakte der aarde was 9, die van B 7 en die van C 4 voeten; de afstand van A tot B was $7\frac{1}{2}$, van B tot C $9\frac{1}{2}$, en van A tot C $16\frac{3}{10}$ voeten. Men bevond, dat de uiteinden van de schaduwen dezer drie stokken successivelijk door het zelfde punt gingen en dat dit punt even ver van de toppen der drie stokken gelegen was; men vraagt: hieruit den dag des jaars en de poolshoogte der plaats te bepalen, benevens de tijden, wanneer de schaduw van elken stok in het gezegde punt kwam? (*l*) Door

A. FOCK.

148. Indien twee in grootte gegevene hoeken CAD en CBD om de gegevene hoekpunten A en B beweegbaar aangenomen worden en de beenen AD en BD elkander, in eene in stelling gegevene lijn EF, gedurende deze beweging, bestendig doorsnijden, vraagt men: van welke natuur de kromme lijn zijn zal, welke door de snijding van de twee andere beenen AC en BC dezer hoeken geboren wordt? (*) Door

A. FOCK.

149. Men begeert eenen kegel en eenen cilinder van gelijke basis, gelijken inhoud en gelijke oppervlakte; vrage naar de afmetingen van deze beide ligchamen? Door

O. S. BANGMA.

(*l*) P. HALCKEN, *Zinnen Confect.* N°. 573.

(*) Eene oplossing van dit voorstel komt voor bij den MARQUIS de L'HOPITAL, *Traité Analytique des Sections coniques, Exemple XI*, *pag.* 28. (*Wet. Commissie*)

150. Van vijf getallen is tweemaal het eerste gelijk aan de som van al de anderen, zoo ook driemaal het tweede, viermaal het derde, en vijfmaal het vierde, elk gelijk aan de som der overige getallen; wanneer nu het product van alle die getallen gegeven is, vraagt men, hoe dezelve kunnen bepaald worden? Door

JACOB DE GELDER.

151. Eene grootheid a zoodanig in drie deelen te verdeelen, dat het eerste tot het tweede sta, als p tot q, en dat het product der deelen een *maximum* zij? Door

JACOB DE GELDER.

152. Iemand op zekere graden Z. Br. zijnde, terwijl de zon 4° 18′ Z. Decl. had, schoot de zon tweemalen voor den middag: vond de eerste maal, ten 11 uren, hare ware hoogte te zijn 58° 53′, en de tweede maal ten 12u 9′ de ware hoogte 65° 25′, zoo begeert hij daardoor de Z. Br. te vinden? (m) Door

M. J. ZUIDHOF.

153. De differentiaal-uitdrukking

$$\frac{\delta x}{(a+bx^3)\sqrt[6]{(a+2bx^3)}}$$

te integreren? Door

U. HUGUENIN.

154. De differentiaal-vergelijking $\delta y + ay\delta\varphi = b \, Cos.\varphi \, \delta\varphi$ te integreren? Door

U. HUGUENIN.

155

(m) K. DE VRIES, *Schatkamer*, het laatste voorstel.

155. De integraal der vergelijking $\partial y - x^2 \partial y + y \partial x - by^2 \partial x + by^2 x^2 \partial x = 0$ te vinden? Door

U. HUGUENIN.

156. De vergelijking $\frac{\partial y}{y^2} - \frac{Sin.\, \varphi^2 \partial y}{y^2} + \frac{a \partial \varphi}{y} - ab \partial \varphi + ab\, Sin.\, \varphi^2 \partial \varphi = 2b\, Sin.\, \varphi\; Cos.\, \varphi \partial \varphi - 2b\, Cos.\, \varphi\; Sin.\, \varphi^3 \partial \varphi$ te integreren? Door

U. HUGUENIN.

157. De differentiaal-vergelijking van de tweede orde, $Cos.\, m\varphi\, (Sin.\, m\varphi)^n \partial\partial \varphi + mn (Cos.\, m\varphi)^2 \ldots \times (Sin.\, m\varphi)^{n-1} \partial \varphi^2 - m (Sin.\, m\varphi)^{n+1} \partial \varphi^2 \ldots + a\, Cos.\, m\varphi \times (Sin.\, m\varphi)^n \partial \varphi \partial x + \ldots\ldots b\, (Cos\, m\varphi)^2 \times (Sin.\, m\varphi)^{2n} \partial \varphi^2 = 0$ te integreren, als ∂x standvastig is? Door

U. HUGUENIN.

158. De differentiaal-vergelijking van de tweede orde $\frac{\partial x}{1 + x^3} = y \partial x + 2 x \partial y + \frac{x^2 \partial\partial y}{2 \partial x}$ te integreren, als ∂x standvastig is? Door

U. HUGUENIN.

159. De differentiaal-vergelijking van de derde orde $\frac{\partial x}{1 + x^2} = y \partial x + 3 x \partial y + \frac{3 x^2 \partial\partial y}{2 \partial x} + \frac{x^3 \partial^3 y}{6 \partial x^2}$ te integreren, als men ∂x als standvastig aanneemt? Door

U. HUGUENIN.

160. De integraal te vinden van de differentiaal-uitdrukking $\frac{\partial \varphi}{Cos.\, \varphi^3} \int \frac{\partial x}{Cos.\, \varphi^5}$? Door

U. HUGUENIN.

161. Iemand koopt twee ſtukken lijnwaad, waar van het een 6 ellen langer is dan het ander, elk tot zoo veel ſtuivers de el als elk ellen lang is; zoo men de ſtuivers, die beide te zamen in gelde bedragen, multipliceert met de ſtuivers die het een ſtuk meer kost dan het ander, komt er 226800; vrage hoe lang elk ſtuk geweest zij. (n) Door

R. LOBATTO.

162. Iemand mij gevraagd hebbende, wanneer ik geboren was? antwoordde ik hem: ik ben geboren op den ✳ △ dag van de △ ✳ maand des jaars △ 401 △; bijaldien nu deze getallen in drie onderſcheidene talſtelſels zijn uitgedrukt, welker grondtallen, in de dagteekening van de maand één meer en in het jaartal één minder zijn dan in het getal, dat de hoeveelſte maand uitdrukt; zoo ook nog bovendien, alle die getallen in ons gewoon tientallig ſtelſel uitgedrukt zijnde, het jaartal een vierkant getal is, welks wortel driemaal de ſom der maand en dagteekening met nog drie evenaart en tweemaal de maand met de ſom van jaartal en dagteekening te zamen 1777 bedragen, en eindelijk het cijfer, door △ afgebeeld, één meer is dan het cijfer door ✳ voorgeſteld, zoo zeg mij dan wanneer ik geboren ben? Door

JAN PAUW.

163. De jaren van mijnen ouden vriend en zijne beminde, waar mede hij zich in het huwelijk ſtaat te begeven, zijn zoodanig, dat indien men bij ieders jaren een zeker getal vergaart, en dit

(n) BANGMA, *Algebra*, p. 274. N°. 37.

dit zelfde getal van de ſom hunner beider jaren aftrekt, er drie vierkante getallen te voorſchijn komen, zijnde de wortel van het laatſte één meer dan die van het eerſte, en gelijk aan het dubbeld van dien van het tweede: ook is het verſchil tusſchen den eerſten en tweeden wortel het dubbeld van het getal, dat men bij ieders jaren vergaard heeft. Vrage naar hun beider jaren? Door

JAN PAUW.

164. *Cajus* is zoo veel jaren ouder dan *Titus*, dat de vierkants-wortelen uit de getallen, welke de jaren hunner ouderdommen uitdrukken, de éénheid van elkander verſchillen; wanneer nu de vierkants-wortel uit het getal der jaren, dat *Cajus* ouder dan *Titus* is, wederom één minder is dan de vierkants-wortel uit het getal der jaren van *Titus*, vraagt men hier uit de ouderdommen dezer twee perſonen te vinden? Door

JACOB DE GELDER.

165. Het getal 1040 in twee deelen te verdeelen, zoodanig dat, wanneer men het grootſte deel door het kleinſte en het kleinſte deel door het grootſte deelt, de ſom dezer twee quotienten gelijk 80 zij? Door

JACOB DE GELDER.

166. Verdeel het getal 144 in vier deelen, zoodanig, dat wanneer men, in rangorde van deze deelen aftrekt de getallen 2, 3, 4 en 5, de vierkantswortel uit de helft van het eerſte, uit één-derde van het tweede, uit één-vierde van het derde en uit één-vijfde van het vierde verſchil, in eene rekenkundige reeks en wel met één opklimmen? Door

JACOB DE GELDER.

167.

167. Vindt vier getallen in eene opklimmende rekenkundige reeks, bij welke, in rangorde de getallen 1, 5, 25 en 93 opgeteld zijnde, de sommen in eene meetkundige reeks opklimmen? Door

JACOB DE GELDER.

168. De zoon en dochter van eenen mijner vrienden zijn te zamen 21 jaren oud, en het verschil van de vierkanten hunner jaren is een drieletterig getal, welks achterste letter de jaren des zoons en de twee voorsten die der dochter aanduiden; vrage naar ieders ouderdom? Door.

A. VAN DER SWAN.

169. Iemand naar zijnen ouderdom, en dien zijner huisgenoten gevraagd zijnde, antwoordde: mijne vrouw is 2 jaren jonger dan ik, en mijn zoon is 3 jaren ouder dan mijne dochter; ook hebben deze met hun beiden juist de helft onzer jaren bereikt: zoo men nu de som hunner jaren, als mede die der onzen, ieder bijzonder in het vierkant brengt, dan zullen de twee achterste getalmerken van het verschil der vierkanten de som der jaren mijner kinderen, en de overige naar voren, de som der jaren van onzen ouderdom aanwijzen: vrage naar den ouderdom van elk bijzonder? Door

A. VAN DER SWAN.

170. Men begeert eenen voorgestelden driehoek, door lijnen uit de hoekpunten tot eenig punt binnen den driehoek getrokken, zoodanig te verdeelen, dat de deelen tot elkander staan als de vierkanten op de zijden dezes driehoeks. Door

O. S. BANGMA.

171. Op eene gegevene regte lijn als basis eenen gelijkbeenigen driehoek en eenen regthoek te beschrijven, van gelijken inhoud en van gelijken omtrek. Door

O. S. BANGMA.

172. Door vier gegevene stippen op een vlak vier lijnen te trekken, die door hunne onderlinge snijdingen een vierkant vormen. Door

O. S. BANGMA.

173. Op de zijde AB eens voorgestelden driehoeks ABC twee stippen F en G te vinden, zoo na bij elkander als mogelijk is, om uit dezelve twee regte lijnen te kunnen trekken, waar door de driehoek in vier gelijke deelen verdeeld worde, en dan op de zijden AC en BC de punten D en E te bepalen, tot welke deze lijnen getrokken moeten worden. Door

O. S. BANGMA.

174. Er zijn vier arithmetische progressen: zoo men dezelve onder elkander schrijft, en dan de overeenkomstige termen der eerste en tweede reeks optelt, en daar van die van de derde aftrekt; vervolgens de overeenkomstige termen van de tweede en derde reeks optelt, en daar van die van de vierde reeks aftrekt; op gelijke wijze van de som der derde en vierde die van de eerste, en eindelijk van de som der vierde en eerste die van de tweede aftrekt; dan bekomt men vier andere reeksen, welke wederom onder elkander geschreven, en de overeenkomstige termen met elkander vermenigvuldigd zijnde, eene nieuwe reeks voortbrengen, waar van de achter elkander volgende termen, alle door 24 gedeeld, geven 0, 4, 25, 84, 210, 440 enz., men vraagt: hoe hier

hier door vier zulke arithmetische progressen gevonden kunnen worden? Door

J. R. SCHMIDT.

175. Nog drie arithmetische progressen te vinden, van de volgende eigenschap: wanneer men dezelve onder elkander schrijft, en dan de overeenkomstige termen van de eerste en tweede, van de tweede en derde, en van de derde en eerste te zamen vermenigvuldigt, komen er drie andere reeksen; deze wederom onder elkander schrijvende, en de som der overeenkomstige termen van de eerste en tweede, van de tweede en derde, en van de derde en eerste dezer nieuwe reeksen nemende, komen er nog drie andere reeksen; en wanneer eindelijk deze onder elkander geschreven en de overeenkomstige termen te zamen vermenigvuldigd worden, dan verkrijgt men de reeks: 3240, — 480, 864, 0, — 3000, 0, 0, — 80256, enz. Door

J. R. SCHMIDT.

176. Van de reeks 2, 7, 11, 17, 28 enz. is de n^{de} term *plus* 20 gelijk aan de som van m termen van de reeks 3, 5, 6, 7, 9 enz.; en de som van $n - 1$ termen der eerste reeks is gelijk aan het product, dat men verkrijgt, door de $(n - 1)^{de}$ term van de tweede reeks *plus* 1, met 9 te vermenigvuldigen: men vraagt naar de getallen m en n? (*o*) Door

J. R. SCHMIDT.

177.

(*o*) Men raadplege om tot de Oplossing dezer Voorstellen te komen, de Oplossingen van *Voorstel* 94 en 95.

177. Van twee plaatſen A en B, welke beide op de breedte van 52°22′ liggen, en wier verſchil in lengte 212° 10′ is, den afſtand in duitſche mijlen te vinden? Door

A. FOCK.

178. Aannemende dat de aarde eene bolronde gedaante hebbe, te bepalen, in welke punten de groote cirkel, welke door twee gegevene plaatſen van het oppervlak der aarde gaat, den evennagts cirkel en den zonsweg zullen doorſnijden? Door

JACOB DE GELDER.

179. Hetzelfde aannemende, vraagt men, in welke punten des Hemels, de gezigteinders van twee gegevene plaatſen der aarde elkander zullen doorſnijden? Door

JACOB DE GELDER.

180. Van eenen driehoek ABC, in eenen cirkel beſchreven, is het verſchil van de middellijn des cirkels en de loodlijn BD, uit den hoek B op de overſtaande zijde nedergelaten, zoo groot als het verſchil van de ſom der zijden AB en BC, en de middellijn des cirkels: zoo nu de lijnen BD, BA, en BC, in eene rekenkundige reeks zijn, waar van het verſchil 2 is, wordt gevraagd naar de waarde dezer lijnen? Door

R. LOBATTO.

181. In een gegeven vierkant eenen gelijkzijdigen driehoek te beſchrijven, waar van een der hoeken in een' hoek des driehoeks ligt? ſtelkundig op te losſen. Door

R. LOBATTO.

182.

182. Twee torens AB en DC verschillen in hoogte van elkander 100 Meters: indien nu deze torens op eenen afstand van 1050 Meters van elkander staan, en een waarnemer zich zoodanig in een punt E tusschen dezelve bevindt, dat hij de toppen dezer torens onder gelijke hoeken BEA en CED ziet (veronderstellende dat de grond, waar op deze torens staan, effen of horizontaal zij) en eindelijk zoo nu de beide gezigtslijnen BE en CE eenen hoek van 112°37′11″95 insluiten, wordt gevraagd naar de hoogte van iederen toren, en op welken afstand de waarnemer zich van ieder derzelven bevonden hebbe? Door

R. Lobatto.

183. Aan een punt C, in den omtrek eens cirkels, (zie *Fig.* 88.) worden eene menigte driehoeken in dien cirkel geconstrueerd, in welke hoek A gelijk tweemaal hoek B is: men kan zich natuurlijk voorstellen, dat de middelpunten der cirkels, in deze driehoeken beschreven, eenen veranderlijken afstand zullen hebben van het middelpunt des cirkels, in welken alle die driehoeken beschreven zijn; men vraagt voor welken driehoek die afstand een *maximum* of *minimum* worden zal? (*p*) Door

Jacob de Gelder.

184. Van alle driehoeken ABC (*Fig.* 88.) in eenen cirkel beschreven, waar van het verschil der hoeken A min B eene standvastige grootheid is, te vinden: *a*) of er een driehoek besta, wiens inhoud een *maximum* of *minimum* zij? *b*) Of

(*p*) De jonge beoefenaar raadplege de Oplossingen van N°. 96; 97 en 98 hier boven, en inzonderheid van 98. de Gelder.

Of er een beſta, wiens omtrek een *maximum* of *minimum* zij? *c*) Of er onder alle dezen een te vinden is, wiens ingeſchreven cirkel een *maximum* zij? *d*) En eindelijk voor welken dezer driehoeken de afſtand van het middelpunt des ingeſchreven cirkels van het middelpunt des ſtandvastigen cirkels, in welke zij alle beſchreven zijn, het digtst bij gelegen of het verst verwijderd zij? (*q*) Door

JACOB DE GELDER.

185. Welk een driehoek van een gegeven omtrek kan in eenen gegevenen cirkel beſchreven worden, mits de cirkel, in dien driehoek beſchreven, zoo groot valle als mogelijk zij? Door

JACOB DE GELDER.

186. Van eene ellips zijn gegeven twee toegevoegde middellijnen, en de hoek die een derzelven met de groote as maakt; de asſen te vinden? Door

A. FOCK.

187. De groote en kleine asſen van eene ellips gegeven zijnde, de twee zamengevoegde middellijnen te vinden, welke met elkander den grootſten of kleinſten hoek maken? Door

JACOB DE GELDER.

188. Wanneer men uit twee overſtaande hoeken B en D van een parallelogram ABCD, door eenig punt E van den diagonaal AC lijnen trekt, als

(*q*) De jonge beoefenaars raadplegen, om dit Werkſtuk op te losſen, de Oplosſingen van N°. 96, 97 en 98 van dit Deel. DE GELDER.

als BEF en DEG, ſnijdende AD en AB in F en G, dan zal altijd driehoek DEF gelijk driehoek BEG en driehoek AEF gelijk driehoek AEG zijn: hoe bewijst men dit. Door

O. S. BANGMA.

189. Uit de hoeken A en B eens driehoeks zijn twee lijnen tot de overſtaande zijden getogen, als AE en BD, elkander in F ſnijdende, waar door de vierhoek CDFE gevormd wordt; in dezen vierhoek zijn getrokken de diagonalen CF en DE; nu is gegeven; driehoek CDF $= a$, driehoek CEF $= b$ en driehoek DCE $= c$; men vraagt naar den inhoud des driehoeks ABC. Door

O. S. BANGMA.

190. De middellijn van eenen cirkel gegeven zijnde, eene regte lijn te conſtrueren gelijk aan den geheelen, halven of vierde omtrek, zoodanig dat deze conſtructie aan de evenredigheid van METIUS, als 113 tot 355 volkomen voldoe? Door

JACOB DE GELDER.

191. De vergelijkingen $xy = 125x + 300y$ en $y^2 - x^2 = a$ op te losſen. Door

JACOB DE GELDER.

192. De ſubtangenten, buigpunten, aſymptoten enz. der kromme lijn te vinden, waar van

$$\frac{y}{a} = \frac{x^2 - (c + 2d)\,x + 2cd}{x^2 - ax + 6x^2}$$

de vergelijking is. (r) Door

JACOB DE GELDER.

193

(r) De eerstbeginnende raadplege en beſtudere de

H op-

193. Den loop en verdere eigenfchappen der kromme lijn, welker vergelijking is

$$y = a\,Sin.\,x \times Sin.\,2x \times Sin.\,3\,x$$

te onderzoeken. Door

JACOB DE GELDER.

194. Den loop en verdere eigenfchappen der kromme lijn, welker vergelijking is

$$y = a\,(Sin.\,x + Sin.\,2x + Sin.\,3\,x)$$

te onderzoeken. Door

JACOB DE GELDER.

195. Wanneer men de hypothenufe van eenen regthoekigen driehoek met de uiteinden langs de regthoeks zijden laat glijden, zoo dat dezelve door alle mogelijke ftanden gaat, van den verticalen tot den horizontalen, dan kan men zich eene kromme lijn voorftellen, welke door deze hypothenufe in alle hare ftanden geraakt wordt; men vraagt naar de vergelijking van deze kromme, derzelver inhoud en rectificatie. Door

O. S. BANGMA.

196. In ieder der beenen van eenen regtlijnigen hoek zijn gegeven twee ftippen, uit welke men lijnen getrokken heeft tot een zeker ander punt in het vlak van den hoek; nu is de fom der vierkanten op deze vier lijnen gelijk aan viermaal het vierkant op de lijn, die dit punt met den top

oplosfing van N° 92 van dit Deel. Hij zal vinden dat voor bepaalde en eindige abscisfen der kromme, zekere ordinaten oneindig groot en afymptoten der kromme lijn worden. DE GELDER.

top des hoeks vereenigt; men vraagt naar de ligging van dit punt? Door

O. S. BANGMA.

197. Op een vlak zijn gegeven drie punten A, B en C; men begeert op dit vlak de meetkundige plaats te vinden van het punt D, zoo dat men hebbe $AD^2 + BD^2 = 2 \times CD^2$. Door

O. S. BANGMA.

198. Men begeert twee kegels te maken van gelijke oppervlakte en gelijken inhoud, (de grondvlakken mede gerekend) zoo nu de radien der grondvlakken gegeven zijn, vraagt men naar de hoogte dezer kegels, derzelver inhoud en oppervlakte? Door

O. S. BANGMA.

199. Men begeert twee cijlinders van gelijken inhoud en gelijke oppervlakte, de grondvlakken mede gerekend; zoo nu de radien der grondvlakken gegeven zijn, vraagt men naar de hoogte van deze cijlinders, als mede derzelver inhoud en oppervlakte. Door

O. S. BANGMA.

200. Er is een cirkel wiens middelpunt A en middellijn BAD is, gegeven: men trekt verscheidene ſtralen AF en neemt op dezelve, van het middelpunt A af te rekenen, derzelver gedeelte AP gelijk aan de ſinus van den dubbelden boog BF, begrepen tusſchen de ſtralen AB en

AF: hoedanig zal dan de loop en de hoedanigheid der kromme lijn zijn, welke door de vereeniging van de punten P geboren wordt, en welke is de inhoud en de lengte dezer kromme lijn? Door

JACOB DE GELDER.

*

ONTBINDINGEN

VAN DE

VOORGAANDE VOORSTELLEN.



N°. 1. Door

JACOB DE GELDER, *L. van Heusden*, *F. J. Méan*, *N. Bondt*, *Christoffer Termars*, *P. Wolff*, *A. van der Swan*, *Mozes Lemans*, *P. van Eeghen Chz.*, *C. J. van Brussel*, *P. Guyde Coral*, *H. Klumper*, *L. C. Mazel*, *J. H. Heemskerk*, *P. Hage*, *Jan Pauw*, *A. L. Hector*, en *P. van Zuilen*.

Stel het grootste deel $= x$, dan is het kleinste $= 276 - x$, en het grootste min het kleinste $= 2x - 276$. Men heeft derhalve volgens de voorwaarde der vraag

$$2x - 276 = \frac{1}{6} \times 276 = 46$$

$$2x = 46 + 276 = 322$$

$$x = \frac{322}{2} = 161 \text{ het grootste}$$

en $276 - x = 115$ het kleinste.

A N°. 2.

N°. 2. Door

JACOB DE GELDER, *Jan Pauw*, *N. Bondt*, *P. Guyde Coral*, *A. van der Swan*, *P. Wolff*, *C. J. van Brusfel*, *P. van Eeghen Chz.*, *Mozes Lemans*, *H. Klumper*, *J. H. Heemskerk*, *L. C. Mazel*, *P. Hage*, *F. J. Méan*, *A. L. Hector*, *en P. van Zuilen.*

Stel wederom het grootfte deel $= x$; dan is het kleinfte $= 208 - x$, en het verfchil der deelen $= 2x - 208$, en dan is volgens de voorwaarde der vraag

$$\tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{3}(208 - x) + 4 = 4(2x - 208)$$

Vermenigvuldig de leden der vergelijking met 12, het kleinfte gemeene veelvoud van de noemers der breuken, die in dezelve voorkomen, dan heeft men

$$9x + 832 - 4x + 48 = 96x - 9984$$

Derhalve

$$(9 - 4 - 96)x = -9984 - 832 - 48$$

$$\text{of } -91x = -10864$$

$$\text{derhalve } x = 112 \text{ het grootfte}$$

$$\text{en } 208 - x = 208 - 112 = 96 \text{ het kleinfte.}$$

N°. 3.

N°. 3. Door

JACOB DE GELDER, *P. Wolff*, *A. van der Swan*, *N. Bondt*, *P. Hage*, *J. H. Heemskerk*, *C. J. van Brussel*, *P. van Eeghen Chz.*, *L. C. Mazel*, *H. Klumper*, *P. Guyde Coral*, *F. J. Méan*, *Jan Pauw*, en *A. L. Hector*.

Stel het jaartal $= x$, dan is het jaartal dat men 307 vroeger schreef $= x - 307$ en het jaartal dat men 445 later schreef $= x + 445$, en nu is

$$\tfrac{1}{2}(x-307)=\tfrac{1}{3}(x+445)$$
$$3x - 921 = 2x + 890$$
$$3x - 2x = 921 + 890$$
of $x = 1811$ het begeerde jaartal

en $\frac{1}{2}(x - 307) = \frac{1}{3}(x + 445) = 752$ jaren de stichting van Romen voor Christus geboorte.

N°. 4. Door

JACOB DE GELDER, *Jan Pauw*, *A. van der Swan*, *F. J. Méan*, *H. Klumper*, *N. Bondt*, *P. Guyde Coral*, *P. Wolff*, *L. C. Mazel*, *C. J. van Brussel*, *P. van Eeghen Chz.*, *J. H. Heemskerk*, en *P. Hage*.

Stel voor de producten, die met drie opklimmen x, $x + 3$, $x + 6$ en $x + 9$; dan zijn de

deeler van het getal 2196, klaarblijkelijk $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}(x+3)$, $\frac{1}{4}(x+6)$, en $\frac{1}{5}(x+9)$; deze deelen moeten nu te zamen genomen het geheel uitmaken; men heeft daarom

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}(x+3)+\frac{1}{4}(x+6)+\frac{1}{5}(x+9)=2196$$

vermenigvuldigd met 60

$$30x+20(x+3)+15(x+6)+12(x+9)=131760$$

of na ontwikkeling der producten

$$30x+20x+60+15x+90+12x+108=131760$$
$$(30+20+15+12)x=131760-20-60-90-108$$
$$\text{of } 77x=131502$$
$$x=\frac{131502}{77}=1707\tfrac{9}{11}$$

Hier uit volgt nu $\frac{1}{2}x = 853\frac{10}{11}$, $\frac{1}{3}(x+3) = 570\frac{8}{11}$, $\frac{1}{4}(x+6) = 428\frac{5}{11}$ en $\frac{1}{5}(x+9) = 343\frac{4}{11}$ de begeerde deelen.

N°. 5. Door

JACOB DE GELDER, *L. van Heusden*, *Jan Pauw*, *P. Hage*, *F. J. Méan*, *H. Klumper*, *N. Bondt*, *P. Wolff*, *A. van der Swan*, *J. H. Heemskerk*, *C. J. van Brussel*, *L. C. Mazel*, *P. Guyde Coral*, *Mozes Lemans*, *P. van Eeghen Chz.*, *A. L. Hector*, *en P. van Zwilen.*

Stel het gevraagde getal $= x$, dan moet

$$x+7:x+9=x+18:x+23$$
$$(x+7)\times(x+23)=(x+9)\times(x+18)$$

of

of de producten ontwikkelende

$$x^2 + 30x + 161 = x^2 + 27x + 162$$

en aan beide zijden x^2 aftrekkende

$$30x + 161 = 27x + 162$$

$$30x - 27x = 162 - 161$$

$$3x = 1$$

en $x = \frac{1}{3}$ het begeerde getal.

N°. 6. Door

P. Hage, en C. J. van Setten.

Laat (*Fig.* 1.) EQ de equator zijn, M het middelpunt der aarde, N een der polen, en BC de paralel van 50 gr. breedte, zijnde de weg, die door het schip gemaakt wordt; verleng MB tot in D, zoo dat BD = 160 voet zij, trek BH en DI loodregt op MN; dan is D de top van den mast als het schip in B is, BH de radius van de paralel BC en DI de radius van den cirkel, die door den top des masts beschreven wordt. Stel de omtrek van de paralel = x en de omtrek van DI = y, dan heeft men, om dat alle cirkels gelijkvormig zijn

$$BH : DI = x : y$$

maar de gelijkvormige driehoeken MBH en MDI geven

$$BH : DI = MB : MD$$

dus $MB : MD = x : y$

$$MB : MD - MB = x : y - x$$

$$MB : BD = x : y - x$$

$$\text{Dus } y - x = \frac{x \times BD}{MB} = \frac{160 x}{MB}$$

Maar $\angle BMH = 40^\circ$ en $BH = MB \,.\, Sin. \angle BMH$, dus

$$y - x = \frac{160 x}{BH} \times Sin.\ 40^\circ.$$

Nu is de radius tot den omtrek ten naaste bij bij als $113 : 2 \times 355$, dus $\frac{x}{BH} = \frac{710}{113}$ waar uit volgt

$$y - x = \frac{160 \times 710}{113} \times Sin.\ 40^\circ.$$

$$= \frac{113600}{113} \times Sin.\ 40^\circ.$$

$= 646,2$ voet, die de top des masts meer afleggen moet, dan het gedeelte van het schip, dat de oppervlakte van de zee raseert.

Voorts is uit het bovenstaande

$$BH = MB \times Sin.\ 40^\circ,$$

maar $BH : x = MB : 360 \times 15$

dus $x = 360 \times 15 \times Sin.\ 40^\circ.$

$$= 5400 \,.\, Sin.\ 40^\circ.$$

en $\frac{1}{40} x = 135 \,.\, Sin.\ 40^\circ.$

$= 86,776$ dagen voor de reis.

N°. 7.

N°. 7. Door

W. VAN HAARST, *P. van Eeghen Chz.*, *Jan Pauw*, *J. H. Heemskerk*, *C. J. van Brussel*, *P. Wolff*, *en A. L. Hector.*

Volgens de opgaaf is ∠ ACB = 33°. 45′ (*Fig.* 2.)

∠ CBA = 78°. 45′

∠ CDB = 33°. 45′

∠ DCA = 33°. 45′

dus AD = AC

nu heeft men uit den △ ABC

Sin. C : AB = *Sin.* B : AC

33°. 45 :	600	78°. 45′
9,74474	2,77815	9,99157
	9,99157	
	12,76972	
	9,74474	
	3,02498 = 1059 AC	

Uit den △ ACD heeft men

Sin. D : AC = *Sin.* A : DC

33°. 45′	1059	112°. 30′
9,74474	3,02498	9.96562
	9,96562	
	12,99060	
	9,74474	

3,24586 = 1761 DC
8 halve uren

gezeild roeden 14088 in de wacht
12 voeten

169056 voeten
23707½
komt 7⅛ mijl na genoeg in een wacht.

Uit den △ ACF heeft men

Rad : AC = *Sin.* A : CF

1059	22°. 30′
3,02498	9,58284
9,58284	

2,60782 = 405 R. of ⅕ mijl nagenoeg van de kust bij de eerste waarneming.

Uit

Uit den △ ADC heeft men

Rad : AD = *Sin.* A : DE

1059	45°
3,02498	9,84949
9,84949	

2,87447 = 749 R. of ⅜ mijl nagenoeg van de kust bij de tweede waarneming.

N°. 8. Door

C. J. van Brusfel, P. van Eeghen Chz., N. Bondt, P. Wolff, H. Klumper, Mozes Lemans, A. van der Swan, Jan Pauw, P. Hage, P. JONGLAS, *en A. L. Hector.*

Stel x lasten van de 1ste foort, y van de 2de, z van de 3de en v van de 4de, dan is

$$x + y + z + v = 20$$

$$200x + 210y + 220z + 230v = 20.215$$

10 ———

$$20x + 21y + 22z + 23v = 430$$

$$20x + 20y + 20z + 20v = 400$$

$$y + 2z + 3v = 30$$

$$y = 30 - 2z - 3v$$

$$\text{dus } x = z + 2v - 10$$

$y + 2z = 30 - 3v$ zijnde, zoo kan v niet grooter zijn dan 9, neem dan

$\left.\begin{array}{r} v=9 \text{ zoo is } y = 3-2z \\ \text{en } x = 8+z \end{array}\right\} z = 1\,..$ dus 1 antw.

$\left.\begin{array}{r} v=8 \text{ zoo is } y = 6-2z \\ \text{en } x = 6+z \end{array}\right\} z = 1\,..\,2$ dus 2 ——

$\left.\begin{array}{r} v=7 \text{ zoo is } y = 9-2z \\ \text{en } x = 4+z \end{array}\right\} z = 1\,..\,4$ dus 4 ——

$\left.\begin{array}{r} v=6 \text{ zoo is } y = 12-2z \\ \text{en } x = 2+z \end{array}\right\} z = 1\,..\,5$ dus 5 ——

$\left.\begin{array}{r} v=5 \text{ zoo is } y = 15-2z \\ \text{en } x = z \end{array}\right\} z = 1\,..\,7$ dus 7 ——

$\left.\begin{array}{r} v=4 \text{ zoo is } y = 18-2z \\ \text{en } x = z-2 \end{array}\right\} z = 3\,..\,8$ dus 6 ——

$\left.\begin{array}{r} v=3 \text{ zoo is } y = 21-2z \\ \text{en } x = z-4 \end{array}\right\} z = 5\,..\,10$ dus 6 ——

$\left.\begin{array}{r} v=2 \text{ zoo is } y = 24-2z \\ \text{en } x = z-6 \end{array}\right\} z = 7\,..\,11$ dus 5 ——

$\left.\begin{array}{r} v=1 \text{ zoo is } y = 27-2z \\ \text{en } x = z-8 \end{array}\right\} z = 9\,..\,13$ dus 5 ——

41 antw.

N°. 9.

N°. 9. Door

H. Klumper, *C. J. van Brussel*, P. JONGLAS, *P. Wolff*, *Jan Pauw*, *P. Guyde Coral*, *P. Hage*, *A. van der Swan*. *P. van Eeghen Chz.*, *N. Bondt*, *L. van Heusden*, en *A. L. Hector*.

Stel dat in de eene heerlijkheid x en in de andere y steden waren, dan is $x + y = 14$, voorts

x	steden	y
x		y
—		—
x^2	dorpen	y^2
x^2		y^2
—		—
x^4	boerew.	y^4
x		y
—		—
x^5	koeijen	y^5

dus $x^5 + y^5 = 40544$

$$x + y \overline{\qquad\qquad}$$

$$x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = 2896$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; 4$$

$$4x^4 - 4x^3y + 4x^2y^2 - 4xy^3 + 4y^4 = 11584$$

maar

maar $(x + y)^4 = 14^4 =$

$$x^4 + 4x^3y + 6x^2y + 4xy^3 + y^4 = 38416$$

$$5x^4 + 10x^2y^2 + 5y^4 = 50000$$

5 ———

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 10000$$

$\sqrt{}$ ———

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$(x + y)^2 = 196$$

——— af

$$2xy = 96$$

dus $x^2 - 2xy + y^2 = 4$

$\sqrt{}$ ———

$$x - y = 2$$

$$x + y = 14$$

dus $x = 8$ en $y = 6$

8		6
64	dorpen . . .	36
64		36
4096	berew. .	1296
8		6
32768	koeijen .	7776

N°. 10.

N°. 10. Door

H. Klumper, M. J. ZUIDHOF, *Jan Pauw*, *P. Hage*, *L. C. Mazel*, *P. Wolff*, *P. van Eeghen Chz.*, *C. J. van Brussel*, *en A. L. Hector*.

Hij kocht 30 ell. breed $2\frac{1}{2}$ ell., maar het kromp in de lengte op 5 ell. $\frac{3}{8}$ ell. en dus op 30 ell. $2\frac{1}{4}$ ell., bleef dus na de krimping $27\frac{3}{4}$ ell.

De breedte verloor op $1\frac{1}{4}$ ell. $\frac{3}{16}$ dus op $2\frac{1}{2}$ ell. $\frac{3}{8}$, blijft nog $2\frac{1}{8}$ ell. breed; nu is $2\frac{1}{8} \times 27\frac{3}{4} = 58\frac{31}{32}$ vierkante ellen na de krimping.

Dit nu moet met voering bekleed worden, dat $1\frac{3}{4}$ ell. breed is, maar door het krimpen op de 18 ell. $1\frac{3}{4}$ ell. in lengte verliest, en dus $\frac{7}{72}$ op ieder el, blijft dus 1 el slechts $\frac{65}{72}$ el lang. De breedte verliest $\frac{1}{16}$, blijft dus nog $1\frac{11}{16}$ el. Dus is de vlakke inhoud van een el voering na de krimping $= \frac{65}{72} \times 1\frac{11}{16} = \frac{1775}{1152}$, dus

$$\frac{1775}{1152} : 1 \text{ el} = 58\frac{31}{32} : 38\frac{46}{65} \text{ el}$$

dus $38\frac{46}{65}$ el ongekrompen voering.

N°. 11.

N°. 11. Door

M. J. ZUIDHOF, *A. van der Swan*, *P. van Eeghen Chz.*, *en Jan Pauw.*

12 maanden het jaar
4 maanden gebruik

8 maanden fchade te rekenen

12 *m* : 5 verl. = 8 *m* : $3\frac{1}{2}$ verl.
van 100 ink.

$96\frac{1}{2}$ verk.

$96\frac{1}{2}$ verk. : 100 ink. = $4040\frac{2}{3}$ verk.

komt 4180 gl. de fchuldbr. aan kapitaal en een jaar intr. door den koopman te betalen.

$104\frac{1}{2}$: 100 = 4180 : 4000 guld. kap. de groote van de fchuldbrief.

ANDERS DOOR

C. J. van Brusfel, *P. Wolff*, *en O. S. Bangma.*

Stel den inkoop = x, dan bedraagt de intrest, à $4\frac{1}{2}$ pCt., in het jaar $\frac{9}{200}x$, dus $\frac{3}{200}x$ in vier maanden, en $x + \frac{3}{200}x = \frac{203}{200}x$ de waarde van de fchuldbrief over vier maanden; nu maakt 5 ten 100 verlies in het jaar $\frac{5}{3}$ in 4 maanden, dus

100 :

$$100 : \tfrac{5}{3} = \tfrac{203}{200}x : \tfrac{203}{12000}x$$

$$\text{en } \tfrac{203}{200}x - \tfrac{203}{12000}x = 4040\tfrac{2}{3}$$

$$\frac{59.203}{12000}x = 4040\tfrac{2}{3}$$

$$29 \text{ ——————— } 12000$$

$$59.7x = 1672000$$

$$x = f\ 4048\tfrac{176}{413} \text{ inkoop}$$

$$= f\ 4048—8—8\tfrac{152}{413}$$

$\tfrac{9}{200}x = f$ 182—3—$9\tfrac{132}{413}$ intrest van het geheele jaar.

dus f 4230—12—$1\tfrac{291}{413}$ het geen de koopman betalen moet.

N°. 12. Door

M. J. Zuidhof, *Jan Pauw*, *P. van Eeghen Chz.*, *J. H. Heemskerk*, *P. Wolff*, *N. Bondt*, *en A. L. Hector.*

N. O. t. O. of de vijfde ſtreek geeft met 27 mijl verh. 1 gr. veranderde br. ten N en 22½ mijl afw. ten O.

Nu is *ab* (*Fig.* 3.) = 1 gr. gegiste en ad = 1°20′ vertr. verand. br. De Zeeman, die de koers vertrouwt, ſtelt zijn beſtek in A, regtlijnig voort, tot op de breedte van *d*; maar de zeeman B, die de verheid vertrouwt, zet een voet des pasſers in *a* en maakt *a*B = *ac*: derhal-

halve komt zijn bestek in B. En volgens de gewone b.rekening komt het ware bestek, uit *c*, regt ten N, in *e*; derhalve is B ten Westen en A ten Oosten van het ware; wier afstanden nu gezogt moeten worden.

Op de vijfde streek geeft 1°20′ verand. br. 30 mijl afw. = *d*A, en $22\frac{1}{2}$ mijl was *de*, alzoo was het bestek van A $7\frac{1}{2}$ mijl beoosten.

$ac = aB = 27$ mijl en $ad = 20$ mijl zijnde, zoo is $aB^2 - ad^2 = dB^2$, of $Bd = 18\frac{1}{4}$ mijl bijna; en $22\frac{1}{2}$ mijl het ware zijnde, zoo is B $4\frac{1}{4}$ mijl bewesten, dus B met zijn vertrouwdeverheid het naaste bij de waarheid.

N°. 13. Door

J. R. SCHMIDT, *C. J. van Brussel*, *P. van Eeghen Chz.*, *en N. Bondt.*

Laat ABC (*Fig.* 4.) den driehoek zijn, PQ, PR en PS de perpendiculairen; zoo dan AP, BP en CP getrokken worden, is (van SWINDEN 2 B. 7 P. 3 g.)

$$AQ^2 - BQ^2 = AP^2 - BP^2$$
$$BR^2 - CR^2 = BP^2 - CP^2$$
$$CS^2 - AS^2 = CP^2 - AP^2$$
add.
$$AQ^2 + BR^2 + CS^2 - BQ^2 - CR^2 - AS^2 = 0$$
$$AQ^2 + BR^2 + CS^2 = BQ^2 + CR^2 + AS^2$$

Dat is: wanneer in eenen driehoek, uit eenig punt binnen of buiten denzelven, perpendiculairen op

op de zijden nedergelaten worden, is de ſom der quadraten van de ſegmenten, welke geen hoek met elkander gemeen hebben, gelijk de ſom der quadraten van de andere ſegmenten.

1ſte Gevolg.

Wanneer R in C valt, zoo als in *Fig.* 5, is; om dat als dan CR = o is

$$AQ^2 + BC^2 + CS^2 = BQ^2 + AS^2$$

2de Gevolg.

Wanneer R in C en Q in A valt, zoo als in *Fig.* 6, is AQ en CR = o, en wij hebben in dit geval

$$BC^2 + CS^2 = AB^2 + AS^2$$

3de Gevolg (Fig. 4.)

Men kan deze ſtelling ook omkeren en zeggen: dat wanneer de zijden zoodanig gedeeld zijn, dat $AQ^2 + BR^2 + CS^2 = BQ^2 + CR^2 + AS^2$ is, de perpendiculairen, die uit Q, R, en S op de zijden worden geſteld, elkander in eenzelfde punt P moeten ontmoeten.

Want zoo de perpend. uit Q niet door het ſnijpunt P van de perpend. uit R en S ging, zou er een ander punt Q′ in AB kunnen genomen worden, zoodanig dat de perp. uit dit door P ging, en dan zou door het bewezene

$$AQ'^2 + BR^2 + CS^2 = BQ'^2 + CR^2 + AS^2$$

maar

$$AQ^2 + BR^2 + CS^2 = BQ^2 + CR^2 + AS^2 \text{ onderſt.}$$

dus $AQ'^2 - AQ^2 = BQ'^2 - BQ^2$

$AQ'^2 - BQ'^2 = AQ^2 - BQ^2$

door $AQ' + BQ = AQ + BQ$ gedeeld

komt $AQ' - BQ' = AQ - BQ$

$AQ' - AQ = BQ' - BQ$

$Q'Q = - Q'Q$

$Q'Q = 0$

waar uit volgt dat geen andere dan de perp. uit Q door het snijpunt P van de perp. uit R en S kan gaan; en dit omgekeerde gaat ook door op de waarheden in het 1e en 2e gevolg vervat.

N°. 14. Door

P. van Eeghen Chz., J. R. Schmidt, *C. J. van Brussel*, en *A. L. Hector*.

Kortheidshalve kan men de cirkels noemen naar derzelver middelpunten; laten dan *a*, *b*, en *c* de drie eerste cirkels zijn, dan moeten (*Fig.* 7), vooreerst, AB, CD en EF elkander in een punt snijden.

Vereenig de middelpunten *a*, *b*, en *c* door de lijnen *ab*, *ac* en *bc*; dan is AB perp. op *ab*, en midden door gedeeld in *d*; insgelijks CD perp. *cb*, en midden door gedeeld in *e*; en EF perp. op *ac*, en midden door gedeeld in *f*. Trek de lijnen *a*B, *a*F, *b*B, *b*C, *c*C en *c*F, dan heeft men:

aB^2

$$aB^2 - bB^2 = ad^2 - bd^2$$

$$bC^2 - cC^2 = be^2 - ce^2$$

$$cF^2 - aF^2 = cf^2 - af^2$$

maar $aB = aF$, $bB = bC$, en $cC = cF$, dus

$$ad^2 + be^2 + cf^2 = bd^2 + ce^2 + af^2$$

Dus ontmoeten de perp., die in d, e en f opgerigt zijn, elkander in eenzelfde punt S (volgens het voorgaand voorstel.)

Beschrijf nu op AB, CD en EF als middellijnen cirkels, dan moeten, ten tweede, GH, IK en LM, elkander ook in dit punt S snijden; want:

De cirkels a, d en f beschouwende, zoo blijkt, volgens het geen boven bewezen is, dat AB, EF en IK, elkander in het punt S snijden; dus gaat ook GH door het punt S, als mede LM.

Trek nu de lijnen NO, PQ en RT, dan moeten, ten derde, deze lijnen ook door het punt S gaan. Want uit de beschouwing van de cirkels c, d en f, blijkt, dat PQ, IK en EF elkander in eenzelfde punt snijden; en daar het bewezen is dat de beide laatste lijnen elkander in S snijden, zoo moet ook de eerste door dat punt gaan. Gevolgelijk gaan RT en NO ook door het punt S.

Ten vierde: de regthoeken uit de deelen, waar in ieder dezer lijnen door het gemeene deelpunt gesneden wordt, zijn alle even groot.

Want AB, IK, LM en PQ zijn koorden in den zelfden cirkel d; dus $AS \times BS = IS \times KS = LS \times MS = PS \times QS$.

Verder CD, GH, RT en LM zijn koorden

 in

in den cirkel *e*, dus CS × DS = GS × HS = RS × TS = LS × MS.

Eindelijk EF, GH, IK en NO zijn koorden in den cirkel *f*, dus ES × FS = GS × HS = IS × KS = NS = OS.

En dus alle deze regthoeken aan elkander gelijk.

N°. 15. Door

J. R. Schmidt.

Laat ACBD (*Fig.* 8.) de vierhoek zijn, dan moeten wij bewijzen dat, IH en IF getrokken hebbende, GE en HF elkander op AB zullen ontmoeten, dat is; wij moeten bewijzen dat, trekkende GEK, de punten H, F en K, in eene regte lijn zullen zijn.

Om dat nu HI eene regte lijn is heeft men uit den △ ADC (de Gelder *Meetk.* 14 B. 1 St.)

$$AH \times GC \times DI = AG \times DH \times CI$$

Zoo is ook in △ DBC, om dat FI eene regte lijn is

$$BE \times CI \times DF = BF \times DI \times CE$$

en in △ ACB, om dat GK eene regte lijn is

$$CE \times AG \times BK = CG \times BE \times AK$$

Deze drie equatien vermenigvuldigd, en door de gelijke factoren gedeeld, geven

AH

$$AH \times DF \times BK = DH \times BF \times AK$$

en dus liggen H, F en K in eene regte lijn (DE GELDER *Meetk.* 14 B, 2e St.)

GEVOLG.

Zoo FE || DC is, en EG || AB getrokken wordt, zal ook HG || CD en dus FH || EG zijn. Deze eigenschap vindt hare toepasfing dikwijls in de perfpectief of doorzigtkunde.

N°. 16. Door

J. R. SCHMIDT.

ACBD (*Fig.* 9.) is een vierhoek waar van AB en CD de diagonalen zijn, nu ontmoeten GH en FE, volgens onderftelling, elkander in een punt I op de diagonaal CD; dus moeten volgens het 15de Voorftel GE en FH elkander op de andere diagonaal AB ontmoeten, en hun fnijpunt K' bijgevolg in eene regte lijn met A en B liggen.

Aanmerking. Wanneer GC en HD parallel aan elkander zijn, volgt hier uit dat ook BK' parallel aan deze lijnen zal zijn, en het is klaar, dat deze eigenfchap ook ftand zal houden, wanneer IK, IL en IM parallel aan elkander zijn.

N°. 17. Door

J. R. SCHMIDT *en A. L. Hector.*

Laten FR en PC (*Fig.* 10.) getrokken worden, dan

dan is volgens de onderftelling en het gevolg van het voorgaand Voorftel het fnijpunt K' met B in eene regte lijn, welke parallel met DC en FG is.

Maar uit het zelfde gevolg en de onderftelling is ook K' met A in eene regte lijn, welke parallel met PQ en RS is.

Daar nu PQ, RS, CD en FG onderling parallel zijn, is K'A en K'B parallel aan een dezer lijnen, en zij maken dus te zamen eene regte lijn uit, parallel met alle deze lijnen.

Aanmerking. Men had dit Voorftel nog algemeener kunnen maken, want zoo PQ, RS, CD en FG, onderling niet parallel waren, maar in een zelfde punt te zamen kwamen, zou ook AB door dit zelfde punt moeten gaan, wordende dit op gelijke wijze uit de voorgaande propofitie bewezen.

N°. 18. Door

L. van Heusden, S. VAN DER PAUW, *C. J. van Brussel*, *P. van Eaghen Chz.*, *en A. L. Hentor.*

Is geplaatst in het eerfte deel van het Wiskundig Mengelwerk, zijnde aldaar N°. 192.

N°. 19.

N°. 19. Door

L. van Heusden, S. VAN DER PAUW, *en P. van Eeghen Chz.*

Is geplaatst in het eerste deel van het Wiskundig Mengelwerk, zijnde aldaar N°. 193.

N°. 20. Door

L. van Heusden, S. VAN DER PAUW, *C. J. van Brussel*, *N. Bondt*, *P. van Eeghen Chz.*, *F. J. Méan*, *en A. L. Hector.*

Is geplaatst in het eerste deel van het Wiskundig Mengelwerk, zijnde aldaar N°. 194.

N°. 21. Door

P. van Eeghen Chz., S. VAN DER PAUW, *en A. L. Hector.*

Neem in AB (*Fig.* 11.) eene derde evenredige BF tot BA en BD; deel AF midden door in G en trek GH perp. op AB tot dat dezelve de lijn DE in H ontmoet; maak GI = BD en trek IK perp. op AB; trek uit H door A de regte HL

en

en befchrijf uit K met AB als radius een cirkelboog, fnijdende HL in L; trek nu KL en uit A parallel aan dezelve de lijn AC; dan BC getrokken hebbende, is het begeerde verrigt; want:

Trek CM perp. op AB, dan is

$$AC : KL = HC : HK = GM : GI$$

Maar $KL = AB$ en $GI = BD$ *Conftr.*

dus $AC : AB = GM : BD$

of $AC : GM = AB : BD$

Maar $AB : BD = BD : BF$ *Conftr.*

dus $GM \times AB = AC \times BD$

en $BD^2 = AB \times BF$

Nu is volgens de Conftructie

$$AG = GF$$

$$MG = MG$$

——————— af

rest $AM = GF - MG$

van $FM = FM$

———————

blijft $FM - AM = 2\,MG$

Hier bij wederzijds BF geaddeerd

komt $BM - AM = 2\,MG + BF$

Maar $BM + AM = AB$

——————— mult.

$$BM^2 - AM^2 = 2\,MG \,.\, AB + BF \,.\, AB$$

maar

maar $BM^2 - AM^2 = BC^2 - AC^2$

dus $BC^2 - AC^2 = 2\,MG \,.\, AB + BF \,.\, AB$

$= 2\,AC \,.\, BD + BD^2$

of $BC^2 = AC^2 + 2\,AC \,.\, BD + BD^2$

dus $BC = AC + BD$

N°. 22. Door

A. L. Hector, D. H. Waterman, *F. J. Méan*, *H. Klumper*, *C. J. van Brussel*, *P. Guyde Coral*, *L. C. Mazel*, *Mozes Lemans*, *P. van Eeghen Chz.*, *A. van der Swan*, *P. Wolff*, *N. Bondt*, *P. Hage*, *Jan Pauw*, *en L. van Heusden.*

Stel $7x$

en $6x$ voor de lengte der ftukken

x

$6x$

$6x^2 = 96$

$x^2 = 16$ dus $x = 4$

$7x = 28$ en $6x = 24$

$6 - 5\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ verlies, $5\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2} = 1$ winst

14 verlies — 24 winst

14 verl.

10 winst

N°. 23.

N°. 23. Door

H. Klumper, *P. Hage*, *A. van der Swan*, D. H. WATERMAN, *Mozes Lemans*, *P. van Eeghen Chz.*, *P. Guyde Coral*, *A. L. Hector*, *Jan Pauw*, en *C. J. van Brussel.*

Stel dat hij de el verkocht voor x st.

$$x$$
$$16$$

$$16 : x - 16 = 100 : \frac{25x - 400}{4}$$

$$\frac{25x - 400}{4} + 5\tfrac{1}{2} = x$$

4

$$25x - 400 + 22 = 4x$$

$$21x = 378$$

21

$$x = 18 \text{ stuiv.}$$

N°. 24. Door

D. H. WATERMAN, *A. L. Hector*, *L. C. Mazel*, *F. J. Maan*, *N. Bandt*, *H. Klumper*, *C. J. van Bruissel*, *P. van Beghen Chz.*, *Jan Pauw*, *P. Hage*, *P. Guyda Coral*, *A. van der Swan*, *P. Wolff*, en *Mozes Lemans*.

Stel de deelen $7x$ en $11y$

dan is $7x + 11y = 100$

$$x = 14 - y - \frac{4y-2}{7}$$

stel $= 14 - y - a$

dus $4y - 2 = 7a$

$$y = a + \frac{3a+2}{4}$$

stel $= a + b$

dus $3a + 2 = 4b$

$$a = b + \frac{b-2}{3}$$

stel $= b + c$

dus $b - 2 = 3c$

$b = 3c + 2$

$a = 4c + 2$

$y = 7c + 4$

$x = 8 - 11c$

Neem $c = 0$, komt $x = 8$ en $y = 4$, dus 56 en 44 de begeerde deelen.

NB. „ Is opgelost, volgens *Mozes Lemans*, bij Euler II D. 2 Afd. §. 5."

N°. 25.

N°. 25. Door

D. H. Waterman, N. Bondt, L. van Heusden, F. J. Méan, A. L. Hector, P. Hage, P. Wolff, J. H. Heemskerk, C. J. van Brussel, Jan Pauw, H. Klumper, L. C. Mekel, A. van der Swan, Moses Lemans, P. van Eeghen Chz., en P. Guyde Coral.

Stel de deelen $50 + x$ en $50 - x$

zoo is $(50 + x)(50 - x) = 2500 - x^2$

dus $2500 - x^2 = 1811$

$x^2 = 689$

$x = \sqrt{689}$

en de deelen

$50 + \sqrt{689}$ en $50 - \sqrt{689}$.

N. 26

N°. 26. Door

J. WESTENDORP, *L. van Heusden*, *Mozes Lemans*, *C. J. van Brussel*, *F. J. Méan*, *P. van Eeghen Chz.*, *N. Bondt*, en *A. van der Swan*.

Om den inhoud van den △ ABC (*Fig.* 12.) te vinden

AB = 34
AC = 20
BC = 42
———
96
2 ———
48 = 3 . 16
48 — 34 = 14 = 1 . 14
48 — 20 = 28 = 2 . 14
48 — 42 = 6 = 2 . 3
√ ———
△ ABC = 2 . 3 . 4 . 14 = 336

Om den inhoud van den △ CBE te vinden

CE = 60
½ BF = 15
———
△ CBE = 900

Om

Om den inhoud van den △ CDF te vinden

$$CE = 60$$
$$\tfrac{1}{2}\,DG = 24$$
$$\triangle\,CDF = 1440$$
$$\triangle\,CBE = 900$$
$$\triangle\,ABC = 336$$
$$\textit{Fig.}\ ABCDE = 2676$$

N°. 27. Door

L. van Heusden, J. Westendorp, *C. J. van Brussel*, *N. Bondt*, *F. J. Méan*, *Mozes Lemans*, *P. van Eeghen Chz.*, *en A. van der Swan.*

Trek uit de Tophoeken C en D (*Fig.* 13.) perpendiculairen op AB en laat G het midden van AB zijn, dan is

$$AB : AC + BC = AC - BC : 2\,FG$$
$$105 : 165 = 35 : 2\,FG$$
$$FG = \frac{165 \cdot 35}{210} = 27\tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{1}{2}\,AB = \ldots\ 52\tfrac{1}{2}$$
$$25 = BF$$

Voorts

Voorts $AB : BD + AD = BD - AD : 2\,EG$

$$105 : 135 = 35 : 2\,EG$$

$$EG = \frac{135 \cdot 35}{210} = 22\tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{1}{2}\,AB = AG = 52\tfrac{1}{2}$$

$$30 = AE$$

$$DI = EF = EG + FG = 50$$

$$DE^2 = AD^2 - AE^2 = (AD + AE)(AD - AE)$$

$$= 80 \cdot 20 = 1600$$

$$\sqrt{}$$

$$DE = 40$$

$$CF^2 = BC^2 - BF^2 = (BC + BF)(BC - BF)$$

$$= 90 \cdot 40 = 3600$$

$$\sqrt{}$$

$$CF = 60$$

dus $CI = CF - DE = 20$

$$DC^2 = DI^2 + CI^2 = 2500 + 400 = 2900$$

$DC = 10\sqrt{29}$ de begeerde afstand.

N°. 28. Door

L. van Heusden, P. van Eeghen Chz., N. Bondt, F. J. Méan, C. J. van Brussel, J. WESTENDORP, *en A. van der Swan.*

Trek BI (*Fig.* 14.) parallel CE en EG parallel BD, dan is

$$AD : AE = AB : AG$$

$$\text{of } 15 : 5 = 8 : 2\tfrac{2}{3}$$

$$AD : AE = BD : GE$$

$$\text{of } 15 : 5 = 17 : 5\tfrac{2}{3}$$

$$AC = 12$$

$$AG = 2\tfrac{2}{3}$$

$$CG = 9\tfrac{1}{3} : GE = BC : BF$$

$$\text{of } 9\tfrac{1}{3} : 5\tfrac{2}{3} = 4 : 2\tfrac{3}{7}$$

$$\text{dus } DF = BD - BF = 14\tfrac{4}{7}$$

$$\text{voorts } GC : EC = BC : CF$$

$$9\tfrac{1}{3} : 13 = 4 : 5\tfrac{4}{7}$$

$$\text{dus } EF = CE - CF = 7\tfrac{3}{7}$$

dat te vinden was.

N°. 29. Door

L. van Heusden, *P. van Eeghen Chz.*, J. Westendorp, *N. Bondt*, en *A. van der Swan*.

Trek uit de tophoeken C en D, (*Fig.* 15.) op de bazis AB, de perpendiculairen CK en DI, als mede CF parallel BE, dan heeft men

AC = 70	AD = 140
BC = 119	BD = 91
AB = 147	AB = 147
S = 336	S = 378
$\frac{1}{2}$ S = 168 = 8.21	$\frac{1}{2}$ S = 189 = 9.21
$\frac{1}{2}$S — AC = 98 = 2.49	49 = 1.49
$\frac{1}{2}$S — BC = 49 = 1.49	98 = 2.49
$\frac{1}{2}$S — AB = 21 = 1.21	42 = 2.21
$\sqrt{}$ ———	$\sqrt{}$ ———
△ ABC = 4.49.21	△ ABD = 6.49.21

verder △ ABD : △ ABC = DI : CK

= DB : CF

of 6 : 4 = 91 : $60\frac{2}{3}$.

$$\text{maar } CK = \frac{2 \triangle ABC}{AB} = \frac{8.49.21}{7.21} = 56$$

$$AK^2 = (AC + CK)(AC - CK)$$
$$= 126 . 14 = 9 . 14 . 14$$

dus $AK = 3 . 14 = 42$

op dezelfde wijze

$$KF^2 = (CF + CK)(CF - CK)$$
$$= 116\tfrac{2}{3} . 4\tfrac{2}{3}$$
$$= \frac{350 . 14}{9} = \frac{700 . 7}{9}$$

dus $KF = \frac{70}{3} = 23\tfrac{1}{3}$

$$AF = AK + KF = 65\tfrac{1}{3}$$

eindelijk

$$AF : AB = AC : AE$$
$$= \triangle ABC : \triangle ABE$$

of $65\tfrac{1}{3} : 147 = 4.49.21 : \triangle ABE$

komt $\triangle ABE = 9261.$

A N D E R S.

Door *C. J. van Brusfel.*

$$Cos. ABE = \frac{AB^2 + AD^2 - AD^2}{2 AB . BD} = \tfrac{5}{13}$$

$$Sin. ABE = \sqrt{1 - Cos. ABE^2} = \tfrac{12}{13}$$

Cos.

$$Cos.\ BAE = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2\ AB\ .\ AC} = \tfrac{3}{5}$$

$$Sin.\ BAE = \sqrt{1 - Cos.\ BAE^2} = \tfrac{4}{5}$$

$$Sin.\ E = Sin.\ (ABE + BAE)$$
$$= Sin.ABE.Cos.BAE + Cos.ABE.Sin.ABE$$
$$= \tfrac{56}{65}.$$

en dus heeft men (*zie* DE GELDER, *grondbeginselen der Meetk.* 8 *Stell.* 9 *Boek*) den inhoud van den driehoek

$$ABE = \frac{AB^2 \times Sin.ABE\ .\ Sin.\ BAE}{2\ Sin.\ E} = 9261$$

N°. 30. Door

J. WESTENDORP, *P. van Eeghen Chz.*, *C. J. van Brussel*, *en N. Bondt.*

Verleng (*Fig.* 16.) alle de zijden tot dat zij in G en H te zamen komen, dan is AGDH het regthoekig paralallogram, dat door afsnijding der overstaande hoeken tot eenen ongelijkzijdigen zeshoek gemaakt is.

Stel GC $= x$ en GB $= y$, zoo is GD $= 72 + x$ en GA $= 45 + y$,

dus $x^2 + y^2 = 289$.

 dus

dus $\overline{72+x}^2 + \overline{45+y}^2 = 10000$

en $x^2 + y^2 = 289$

maar $(72+x)^2 = 5184 + 144\,x + x^2$

en $(45+y)^2 = 2025 + 90\,y + y^2$

add.

dus $10000 = 7498 + 144\,x + 90\,y$

$2502 = 144\,x + 90\,y$

18

$139 = 8\,x + 5\,y$

$y = \frac{139 - 8\,x}{5}$

√

$y^2 = \frac{19321 - 2224\,x + 64\,x^2}{25}$

$x^2 = x^2$ geaddeerd

$289 = \frac{19321 - 2224\,x + 89\,x^2}{25}$

$7225 = 19321 - 2224\,x + 89\,x^2$

$0 = 12096 - 2224\,x + 89\,x^2$

$89\,x^2 - 2224\,x = -12096$

89

$89\,(89\,x^2 - 2224\,x) = -1076544$

$(1112)^2 = 1236544$

$(89\,x - 1112)^2 = 160000$

√

89 *x*

$$89x - 1112 = \pm 400$$
$$89x = 1112 \pm 400$$
$$= 1512 \text{ of } 712$$
$$\text{dus } x = 16\tfrac{88}{89} \text{ of } 8$$
$$8x = 135\tfrac{81}{89} \text{ of } 64$$

van 139 aftrekkende, komt

$$3\tfrac{8}{89} \text{ en } 75$$

door 5 deelende, komt

$$y = \tfrac{55}{89} \text{ of } 15$$

Door de eerste waarden van x en y verkrygt men

$$\text{regth. AGDH} = \text{AG . GD} - \text{BG . GC}$$
$$= (72 + x)(45 + y) - xy$$
$$= 3240 + 45x + 72y$$
$$= 3240 + 764\tfrac{44}{89} + 44\tfrac{44}{89}$$
$$= 4048\tfrac{88}{89}$$

Door de tweede waarden van x en y heeft men

$$\text{regth. AGDH} = 3240 + 360 + 1080$$
$$= 4680$$

N°. 31. Door

P. van Eeghen Chz., J. WESTENDORP, *N. Bondt*, *L. van Heusden*, *C. J. van Brussel*, *en A. van der Swan.*

Trek DE perp. op AB dan is AE = 8 en DE = $8\sqrt{3}$,

dus $\triangle$ ABD = $64\sqrt{3}$

De perpendiculaire hoogte van $\triangle$ ADC is AE, dus

$$\triangle\ ACD = \frac{AC \times AE}{2} = 48$$

dus Trap. ABDC = $48 + 64\sqrt{3}$.

N°. 32. Door

C. J. van Brussel, L. VAN HEUSDEN, *en P. van Eeghen Chz.*

Laat P (*Fig.* 18.) het begeerde punt zijn, en D het midden van AB; stel AD = DB = a, D = x en de loodlijn CP = y, dan is AC = $a + x$ en BC = $a - x$, dus

$$AP^2 = \overline{a + x}^2 + y^2$$

$$BP^2 = \overline{a - x}^2 + y^2$$

$$\therefore AP^2 - BP^2 = 4ax$$

$$\text{en } \Delta\ APB = ay$$

Laat nu de gegevene reden zijn als p tot q, zoo is

$$4ax : ay = p : q$$

$$\text{dus } y = \frac{4qx}{p}$$

Maak dan x of DC $= p$ en y of CP $= 4q$, en trek eene onbepaalde regte lijn door D en P, dan zullen alle punten van deze regte aan het begeerde voldoen.

N°. 33. Door

C. J. van Brussel, L. VAN HEUSDEN, *P. van Eeghen Chz.*, *en N. Bondt.*

Laat RS (*Fig.* 19.) de gegevene cirkel zijn; trek in denzelven eene choorde AB = M; beschrijf uit G een cirkel Q, welke deze choorde raakt, en trek uit het punt O eene raaklijn aan den cirkel Q, deze zal den gegevenen cirkel in het begeerde punt P snijden (*zie* STEENSTRA, 7 Pr. 3 B.)

N°. 34. Door

C. J. van Brusſel, *en* P. VAN EEGHEN CHZ.

Laat AB (*Fig.* 20.) een der zijden van den driehoek zijn dan zal de grootſte driehoek, welke op AB als bazis in den cirkel beſchreven kan worden, die gene zijn die de langſte perdendiculair heeft; gevolgelijk de gelijkbeenige ACB; zoo nu niet AB gelijk BC was, zou men op AC als bazis een' driehoek kunnen beſchrijven, die grooter was dan ACB, namelijk de gelijkbeenige; dus moet AC = BC en AB = BC zijn; derhalve is de gelijkzijdige driehoek de grootſte die er in eenen cirkel beſchreven kan worden.

N°. 35. Door

P. VAN EEGHEN CHZ., *L. van Heusden*, *en* *C. J. van Brusſel.*

Stel (*Fig.* 21.) EB = BC = x, AE = AD = y, DF = CF = z en de radius = a, dan is

$$\triangle \text{ ABF} = \sqrt{xyz\,(x+y+z)}$$

$$\text{en } \triangle \text{ ABF} = a\,(x+y+z)$$

$$\text{dus } x+y+z = minimum.$$

$$\text{en } xyz = a^2\,(x+y+z)$$

dus

— $\sqrt{5}$, de harmonische progressi
vereischten der vraag voldoet.

der eindvergelijking in t, welke tu
valt, kan alleen door benaderin
rden: doch, deze wortel zullen w
en, omdat dezelve geene bestaanba
en voor de termen der harmonisch
kan: want, stellen wij $t = 1 + \omega$
$= \frac{1}{2}\sqrt{2at} = \frac{1}{2}\sqrt{[160(1+\omega)]} =$
$+ \omega)]$ en $4u = 8\sqrt{[10(1+\omega)]}$
$x - y)^2 = t^2 - 4u = (1+\omega)^2 -$
$(1+\omega)]$. Laat nu ω op zijn grootst
$= 2$ zijn, dan blijft nog $(x-y)^2$
n $x - y$ onbestaanbaar, derhalve, enz.

N°. 51. Door

Eeghen, *Chz.*, *L. van Heusden*, J. Wes-
dorp, *C. J. van Brussel*, *en J. C.*
etten.

ns den regel in het voorstel opgegeven is
B Cub. D B
48 : 1728 = $9\frac{173}{378}$:

komt $\frac{7150}{21}$ cub. duim voor den inhoud
et duikend deel.

nu dat x duim van d ... ter in het wa-
ter

ter zinkt, dan is de middellijn van den cirkel op het water $= 2\sqrt{12x - x^2}$ duim en dus den inhoud deszelven $= \frac{11(24x - 2x^2)}{7}$. Nu is, volgens *de Gelder, Meetk. pag.* 386:

$$\frac{11}{7}(24x - 2x^2)\tfrac{1}{2}x + \frac{11}{21}x^3 = \frac{7150}{21}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \; 21$$

$$33(12x^2 - x^3) + 11x^3 = 7150$$

$$11 \; \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$3(12x^2 - x^3) + x^3 = 650$$

$$36x^2 - 2x^3 = 650$$

$$x^3 - 18x^2 + 325 = 0$$

Waar uit $x = 5$, dus zinkt de kogel 5 duim in het water.

N°. 52. Door

C. J. van Brussel, P. HAGE, *J. C. van Setten*, *P. van Eeghen Chz.*, *en A. van der Swan.*

Voor eerst heeft men 4 ft. : 1 roede = 100$\frac{4}{5}$ gl. : 504 roeden. Stel vervolgens de twee getallen, welke het getal der dagen (tot het werk noodig) uitdrukken, $2x$ en x, dan heeft men $(4x^2 + x^2 + 4x^2 + 3x) = 1806$; zoo men nu deze vergelijking oplost, vindt men $x = 14$ en dus het getal der dagen = 42. Laat nu ver-

verder A dagelijks $y + 1$ roeden omſpitten, dan zal B dagelijks y en C dagelijks $y - 1$ roeden omſpitten, en dan heeft men weder $3 . 42y = 504$; dus $y = 4$, $y + 1 = 5$ en $y - 1 = 3$. Stel nu eindelijk dat A z, en B en C ieder v dagen gewerkt hebben, dan heeft A $5z$, B $4v$ en C $3v$ roeden omgeſpit, en dan is $5z = 3v$ en $4v = 504 - 6v$. Zoo men deze vergelijkingen oplost, vindt men $z = 30\frac{6}{25}$ en $v = 50\frac{2}{5}$, zoo dat A $151\frac{1}{5}$, B $201\frac{3}{5}$ en C $151\frac{1}{5}$ heeft omgeſpit; dus ontvangen A en C ieder f 30 — $4\frac{4}{5}$ en B f 40 — $6\frac{2}{5}$.

N°. 53. Door

M. J. Zuidhof, *Jan Pauw*, *en P. van Eeghen Chz.*

In (*Fig.* 28.) is AE = 1900 roeden, $\angle$ C = $\angle$ A = 60°, dus $\angle$ E = 30°. de zons hoogte. Derhalve

Rad. : AE = *Sin.* E : AB

AE = 1900 *Log.* . . 3,27875
$\angle$E = 30°. *Log. Sin.* 9,69897

2,97772 *Log.* 950 = AB,

de hoogte des bergs.

Om den tijd te vinden zoo zij (*Fig.* 29.)

PT =

PT = 90°. — PN = 53°. 40′ *C. Log. S.* 0.09389
PS = 90°. — BS = 66°. 37′ *C. Log. S.* 0.03722
PT = 90°. — AS = 60. 0

Som 180.17
2
90.8½ *Log. Sin.* 9.99999
TS = 60.
30.8½ *Log. Sin.* 9.70082
19.83192
2
9.91596

Log. Cos. 34°. 30′
2
69°. 0′ = ∠ SPT
15
4u. 36′ voormiddag
12. 0
7u. 24′ 's morgens

Voorts *Sin.* ST : *Sin.* ∠ P = *Sin.* SP : *Sin.* ∠ T
60°. 0′ 69°. 0′ 66°. 37′

9.97015
9.96278
19.93293
9.93753
9.99540 *Log. Sin.* 81°. 41′
90°
de zon ben. het O 8° 19′

en

en 22°. 30′ bezuiden het Oost gepeild zijnde, zoo is de som 30°. 49′ de Noordwestering van het compas.

N°. 54. Door

O. S. Bangma, *J. R. Schmidt*, *U. Huguenin*, *P. van Eeghen Chz.*, *C. J. van Brussel*, *N. Bondt*, *en F. J. Méan.*

Constructie.

1°. Maak ∠A, AB en AD (*Fig.* 30.) zoo groot als gegeven is.

2°. Beschrijf op BD als koorde eenen cirkelboog BCD, die eenen hoek bevatten kan gelijk den ∠C.

3°. Beschrijf uit A, met AC als radius, eenen cirkelboog, snijdende den voorgemelden boog in C, dan is ABCD de begeerde vierhoek, zoo als uit de constructie van zelf blijkt.

Aanmerking. Vermits de cirkelbogen elkander ook in G snijden, zoo voldoet de vierhoek ABGD ook aan het begeerde

Stelkundige Oplossing.

Door O. S. Bangma.

Stel AB (*Fig.* 30.) $= a$, AD $= b$, AC $= c$.

Laat

Laat E het middelpunt zijn van eenen cirkel, die door de punten B, C en D gaat. Stel ∠ BAE $= x$, ∠ DAE $= y$, ∠ CAE $= z$, ∠ ABE $= p$, ∠ ADE $= q$, AE $= n$, BE $=$ CE $=$ DE $= r$, dan is uit de befchouwing van den driehoek ABD

$$b + a : b - a = Cot. \tfrac{1}{2}A : Tang. \frac{B-D}{2}$$

maar $B = ABE + EBF = p + EBF$

en $D = ADE + EDF = q + EBF$

dus $B - D = p - q$

derh. $Tang. \dfrac{p-q}{2} = \dfrac{b-a}{b+a} . Cot. \tfrac{1}{2}A$

verder, uit △ AEB en △ AED

$$Sin. x : r = Sin. p : n$$

$$Sin. y : r = Sin. q : n$$

dus $Sin. x : Sin. y = Sin. p : Sin. q$

en $\dfrac{Sin. x - Sin. y}{Sin. x + Sin. y} = \dfrac{Sin. p - Sin. q}{Sin. p + Sin. q}$

of $\dfrac{Tang. \left(\frac{x-y}{2}\right)}{Tang. \left(\frac{x+y}{2}\right)} = \dfrac{Tang. \left(\frac{p-q}{2}\right)}{Tang. \left(\frac{p+q}{2}\right)}$

dus

$$\text{dus } Tang.\left(\frac{x-y}{2}\right)=Tang.\left(\frac{x+y}{2}\right).\frac{Tang.\left(\frac{p-q}{2}\right)}{Tang.\left(\frac{p+q}{2}\right)}$$

maar $x+y=A$, en voor $Tang.\left(\frac{p-q}{2}\right)$ de boven gevondene waarde ftellende, komt

$$Tang.\left(\frac{x-y}{2}\right)=\frac{b-a}{b+a}.\ Cot.\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

maar den vierhoek ABED befchouwende, heeft men

$$\angle\ BED = A + p + q$$

$$\text{of } \angle\ BEC + \angle\ CED = A + p + q$$

$$\text{nu is } \angle\ BEC = 2\ \angle\ BDC$$

$$\text{en } \angle\ CED = 2\ \angle\ DBC$$

$$\text{dus } 2\ (\angle\ BDC + \angle\ DBC) = A + p + q$$

$$\angle\ BDC + \angle\ DBC = \tfrac{1}{2}A + \frac{p+q}{2}$$

$$\text{of } 180 - \angle\ BCD = \tfrac{1}{2}A + \frac{p+q}{2}$$

$$\text{dus } \frac{p+q}{2} = 180 - \tfrac{1}{2}A - \angle\ BCD$$

$$\text{en } Cot.\left(\frac{p+q}{2}\right) = -\ Cot.\ (\tfrac{1}{2}A + BCD)$$

$$\text{dus } Tang.\left(\frac{x-y}{2}\right)=-\frac{b-a}{b+a}.\ Cot.\ (\tfrac{1}{2}A+BCD)$$

en

en daar $\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}A$ is, zoo heeft men hier door x en y bekend. Voorts

uit $\triangle$ BEA : $r^2 = n^2 + a^2 - 2na\,Cos.\,x$

uit $\triangle$ CEA : $r^2 = n^2 + c^2 - 2nc\,Cos.\,z$

uit $\triangle$ DEA : $r^2 = n^2 + b^2 - 2nb\,Cos.\,y$

uit deze drie vergelijkingen r en n wegmakende zal men vinden

$$Cos.\,z = \frac{b\,(c^2 - a^2)\,Cos.\,y - a\,(c^2 - b^2)\,Cos\,x}{c\,(b^2 - a^2)}$$

verder

$\angle$ BAC $= x - z$ en $\angle$ DAC $= y + z$

BC $= \sqrt{(a^2 + c^2 - 2ac\;Cos.\,(x - z))}$

DC $= \sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc\;Cos.\,(y + z))}$

waar door het voorstel opgelost is.

Aanmerking. Uit de meetkundige Conftructie van de figuur blijkt, dat z zoo wel negatief als pofitief genomen kan worden, en hier uit ontftaan dan twee verfchillende waarden voor BC en DC.

ANDERS.

Door J. R. SCHMIDT.

Door berekening kan men de gevraagde lijnen op

op de volgende wijze uit de gegevene afleiden (zie figuur 31.)

$$BD = \sqrt{(AB^2 + AD^2 - 2\,AB\,.\,AD\,.\,Cos.\,A)}$$

$$BD : AB = Sin.\,A : Sin.\,BDA = \frac{AB}{BD}\,.\,Sin.\,A$$

$$BD : AD = Sin.\,A : Sin.\,DBA = \frac{AD}{BD}\,.\,Sin.\,A$$

$DF = \frac{1}{2}BD$, $DEF = DCB$, $EDF = 90^\circ. - DEF$, $DE = DF \times Sec.\,EDF$, $EDA = EDF + BDA$,

$$AE = \sqrt{(DE^2 + AD^2 - 2\,DE\,.\,AD\,.\,Cos.\,EDA)}$$

$$AE : DE = Sin.\,EDA : Sin.\,DAE$$

$$EAB = DAB - DAE,\ CE = DE,$$

$$Cos.\,EAC = \frac{AC^2 + AE^2 - EC^2}{2\,AC\,.\,AE}$$

Deze hoek moet positief en negatief genomen worden, omdat AC en AG met AE gelijke hoeken maken.

$$DAC = DAE + EAC,\ CAB = EAB - EAC$$

$$DC = \sqrt{(AD^2 + AC^2 - 2\,AD\,.\,AC\,Cos.\,DAC)}$$

$$BC = \sqrt{(AB^2 + AC^2 - 2\,AB\,.\,AC\,.\,Cos.\,CAB)}$$

Het geen, uit hoofde van EAC positief en negatief, twee verschillende antwoorden zal geven.

ANDERS.

Door *U. Huguenin.*

Uit de meetkundige conſtructie blijkt, dat dit voorſtel niet meer dan twee antwoorden toelaat. Wanneer men echter, bij de algebraiſche ontbinding, niet met omzigtigheid te werk gaat, vervalt men op eene vergelijking van den vierden graad: deze heeft alzoo twee wortelen meer dan het aantal der mogelijke antwoorden van het voorſtel zijn kan; waar uit men alzoo vooraf kan beſluiten: dat deze meerdere wortelen, of imaginair, of ten minſte nutteloos tot de beantwoording van dit voorſtel zijn moeten.

Om de vierde magts vergelijking te vermijden merke men op, dat in den driehoek BDC (*Fig.* 31) is, $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2\,BC \,.\, CD \times$ *Cos.* BCD; of $BC \,.\, CD = \frac{BC^2 + CD^2 - BD^2}{2\, Cos.\ BCD}$.
Voorts heeft men △ BCD + △ ABD = vierh. ABCD, en △ ACB + △ ACD = vierh. ABCD; derhalve is △ BCD + △ ABD = △ ACB + △ ACD, of △ BCD = △ ACB + △ ACD — △ ABD; dat is: $\frac{1}{2}$ BC . CD . *Sin.* BCD = $\frac{1}{2}$ AB . AC . *Sin.* BAC + $\frac{1}{2}$ AC . AD × *Sin.* CAD — $\frac{1}{2}$ AB . AD . *Sin.* BAD; of BC . CD $= AB \,.\, AC \,.\, \frac{Sin.\ BAC}{Sin.\ BCD} + AC \,.\, AD \,.\, \frac{Sin.\ CAD}{Sin.\ BCD} - AB \,.\, AD \,.\, \frac{Sin.\ BAD}{Sin.\ BCD}$, en hier uit volgt: dat, in een' onregelmatigen vierhoek, $AB \,.\, AC \,.\, \frac{Sin.\ BAC}{Sin.\ BCD} + AC \,.\, AD \,.\, \frac{Sin.\ CAD}{Sin.\ BCD} - AB \,.\, AD \,.\, \frac{Sin.\ BAD}{Sin.\ BCD} = \frac{BC^2 + CD^2 - BD^2}{2\, Cos.\ BCD}$ is.

Stelt

Stelt men nu AB $= a$, AD $= b$, AC $= d$, $\angle$ BAD $= \alpha$, en $\angle$ BCD $= \beta$ bekend, en den onbekenden hoek BAC $= \phi$, zoo is $\angle$ CAD $= \alpha - \phi$ en men heeft:

$$\text{in } \triangle \text{ BAC}, BC^2 = a^2 + d^2 - 2ad\, Cos.\, \phi$$

$$\text{in } \triangle \text{ CAD}, DC^2 = b^2 + d^2 - 2bd\, Cos.\, (\alpha - \phi)$$

$$\text{in } \triangle \text{ BAD}, BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\, Cos.\, \alpha$$

zoo men nu deze waarden in de voorgaande vergelijking ftelt en de grootheden, die elkander vernietigen, in het tweede lid weglaat, heeft men:

$$ad . \frac{Sin.\, \phi}{Sin.\, \beta} + bd . \frac{Sin.\, (\alpha - \phi)}{Sin.\, \beta} - ab . \frac{Sin.\, \alpha}{Sin.\, \beta} = \frac{d^2}{Cos.\, \beta} + ab . \frac{Cos.\, \alpha}{Cos.\, \beta} - ad . \frac{Cos.\, \phi}{Cos.\, \beta} - bd \times \frac{Cos.\, (\alpha - \phi)}{Cos.\, \beta}$$

; en hier uit volgt dan:

$$ad . \left(\frac{Sin.\, \phi}{Sin.\, \beta} + \frac{Cos.\, \phi}{Cos.\, \beta}\right) + bd \left(\frac{Sin.(\alpha - \phi)}{Sin.\, \beta} + \frac{Cos.(\alpha - \phi)}{Cos.\, \beta}\right) = \frac{d^2}{Cos.\, \beta} + ab . \left(\frac{Sin.\, \alpha}{Sin.\, \beta} + \frac{Cos.\, \alpha}{Cos.\, \beta}\right) = \frac{d^2}{Cos.\, \beta} + ab\, \frac{Sin.\, (\alpha + \beta)}{Sin.\, \beta . Cos.\, \beta}.$$

Wanneer men deze vergelijking met *Sin.* $\beta \times$ *Cos.* β vermenigvuldigt, en voorts *Sin.* $(\alpha - \phi)$ en *Cos* $(\alpha - \phi)$ in hare bekende uitdrukkingen ontwikkelt, laat zij zich onder den volgenden vorm brengen:

$$[ad\,Cos.\beta - bd(Cos.\alpha\,Cos.\beta - Sin.\alpha\,Sin.\beta)]\,Sin.\phi$$
$$+[ad\,Sin.\beta + bd\,(Sin.\alpha\,Cos.\beta + Cos.\alpha.Sin.\beta)]Cos.\phi$$
$$= d^2\,Sin.\,\beta + ab\,Sin.(\alpha+\beta);\text{ of}$$
$$[ad\,Cos.\,\beta - bd\,Cos.\,(\alpha+\beta)]\,Sin.\,\phi$$
$$+\,[ad\,Sin.\,\beta + bd\,Sin.\,(\alpha+\beta)]\,Cos.\,\phi$$
$$= d^2\,Sin.\,\beta + ab\,Sin.\,(\alpha+\beta)$$

of eindelijk:

$$Sin.\phi + \frac{a\,Sin.\beta + b\,Sin.(\alpha+\beta)}{a\,Cos.\beta - b\,Cos.(\alpha+\beta)}.Cos.\phi$$
$$= \frac{d^2\,Sin.\,\beta + ab\,.\,Sin.\,(\alpha+\beta)}{ad\,Cos.\,\beta - bd\,Cos.\,(\alpha+\beta)}.$$

daar voorts de tangenten der bogen alle mogelijke waardijen hebben kunnen, zoo ſtelle men de bekende grootheid

$$\frac{a\,Sin.\,\beta + b\,Sin.\,(\alpha+\beta)}{a\,Cos.\,\beta - b\,Cos.\,(\alpha+\beta)} = Tang.\,\delta$$

als dan zal, na alles met *Cos.* δ vermenigvuldigd te hebben:

$$Sin.\phi\,Cos.\delta + Cos.\phi\,Sin.\delta = Sin.(\phi+\delta)$$
$$= \frac{d^2\,Sin.\beta + ab\,Sin.(\alpha+\beta)}{ad\,Cos.\beta - bd\,Cos.(\alpha+\beta)}.Cos.\delta$$

zijn, in welke uitdrukking de grootheid ϕ alleen onbe-

bekend is, en, met behulp der ſinus-tafels, uit deze eindvergelijking, kan worden gevonden. (*)

Door-

(*) Dit is eene der fraaiſte analytiſche zetten, ik heb dezelve nergens anders gezien. Eene vergelijking van den vorm $a\ Sin\ \phi + b\ Cos.\ \phi + m = 0$ werd al tijd bij alle ſchrijvers opgelost, zoo als in mijne *Meetk. Anal. Bladz.* 52. §. 141. geleerd is, en loopt, op de gewone wijze aangevat zijnde, tot eene tweede magts vergelijking Wij nemen deze gelegenheid waar, om, bij voorraad, deze plaats met de belangrijke aanmerking, welke de Heer HUGUENIN ons al vroeger medededeelde, te verrijken, en om, door de bijvoeging van deze noot, deze fraaije herleiding beter in het oog te doen loopen, daar wij, ten aanzien van verdere bijzonderheden, op welke ons de mededeeling van den Heer HUGUENIN heeft opmerkzaam gemaakt, den lezer heenwijzen naar de *Bijvoegſelen, op het I Boek onzer Meetkundige Analyſis.*

Men deele de vergelijking door a, dan heeft men: $Sin.\ \phi + \frac{b}{a}\ Cos.\ \phi = -\frac{m}{a}$; nu kan $\frac{b}{a}$ altijd aan de tangens van eenen boog α gelijk geſteld worden en dan is $Sin.\ \phi + \frac{Sin.\ \alpha}{Cos.\ \alpha}\ .\ Cos.\ \phi = -\frac{m}{a}$; of, alles met $Cos.\ \alpha$ vermenigvuldigdende: $Sin.\ \phi\ Cos.\ \alpha + Sin\ \alpha\ Cos.\ \phi = Sin.\ (\phi + \alpha) = -\frac{m}{a}\ Cos.\ \alpha$.

Is in deze vergelijking b negatief, dan wordt ook α negatief, en omdat $Sin.\ (\phi + \alpha)$ ook gelijk $Sin.\ (180^\circ - \phi - \alpha)$ is, zoo vindt men twee waarden voor ϕ, die met de twee wortels der tweede magts vergelijking, in de gewone oploſſing, overeenkomen en in getallen ook veel gemakkelijker berekend kunnen worden

Men

Doordien de hoeken $(\varphi + \delta)$ en $(180^\circ - \varphi - \delta)$ dezelfde finus hebben, is het tweede antwoord van ons voorftel $Sin. (180^\circ - \varphi - \delta)$

$$= \frac{d^2 Sin. \beta + ab . Sin. (\alpha + \beta)}{ad Cos. \beta - bd Cos. (\alpha + \beta)} . Cos. \delta$$

en deze beide antwoorden zijn mogelijk, wanneer het tweede lid

$$\frac{d^2 Sin. \beta + ab . Sin. (\alpha + \beta)}{ad Cos. \beta - bd Cos. (\alpha + \beta)} . Cos. \delta < 1 \text{ is;}$$

Is deze uitdrukking echter $= 1$, zoo is $Sin. (\varphi + \delta) = 1 = Sin. 90^\circ$, of $\varphi + \delta = 90^\circ$; waar door dan ook $180^\circ - \varphi - \delta = 90^\circ$ is, en te kennen geeft: dat, in dit geval, de beide wortels gelijk worden, zoo dat het voorftel flechts ééne oplosfing toelaat; is daar en tegen

$$\frac{d^2 Sin. \beta + ab Sin. (\alpha + \beta)}{ad Cos. \beta - bd Cos. (\alpha + \beta)} . Cos. \delta > 1,$$

zoo

Men kan ook de gegevene vergelijking door b deelen, en, in het quotient

$$\frac{a}{b} Sin. \varphi + Cos. \varphi = -\frac{m}{b}$$

$\frac{a}{b} = Cot. \zeta = \frac{Cos. \zeta}{Sin. \zeta}$ ftellen, als wanneer men vinden zal: $Sin. \varphi . Cos. \zeta + Cos. \varphi . Sin. \zeta = Sin. (\varphi + \zeta) = -\frac{m}{b} Sin. \zeta.$

Ja, men kan ook nog, op andere wijzen, de gegevene vergelijking tot de eerfte magt herleiden.

JACOB DE GELDER.

zoo zijn de beide wortels onmogelijk; wijl geen ſinus grooter dan de eenheid, of de ſinus-totus wezen kan, het welk volmaakt met onze geometriſche conſtructie overeenſtemt. Wanneer men eenmaal de waardij van ϕ voor beide antwoorden bepaald heeft, kunnen de beide zijden, uit de voorheen gevondene uitdrukkingen voor BC^2 en CD^2 gemakkelijk berekend worden.

N°. 55. Door

O. S. Bangma, *P. van Eeghen, Chz.*, *en N. Bondt.*

Stel (*Fig.* 30) $\angle$ BAC $= a$, $\angle$ BCA $= b$, $\angle$ DAC $= c$, $\angle$ ACD $= d$, $\angle$ ABD $= x$ en $\angle$ CBD $= y$, dan heeft men:

in $\triangle$ ABD; *Sin.* A : BD $=$ *Sin.* x : AD

in $\triangle$ CBD, BD : *Sin.* C $=$ DC : *Sin.* y

in $\triangle$ ADC, *Sin.* d : *Sin.* c $=$ AD : DC

dus *Sin.* d . *Sin.* A : *Sin.* c . *Sin.* C $=$ *Sin.* x : *Sin.* y

$$\text{en } \frac{Sin.\,x - Sin.\,y}{Sin.\,x + Sin.\,y} = \frac{Tang.\,\frac{x-y}{2}}{Tang.\,\frac{x+y}{2}} =$$

$$\frac{Sin.\,d\,.\,Sin.\,A - Sin.\,c\,.\,Sin.\,C}{Sin.\,d\,.\,Sin.\,A + Sin.\,c\,.\,Sin.\,C} = N$$

 maar

maar $x + y = 180^\circ - a - b$, dus

$$Tang. \frac{x-y}{2} = Cot. \frac{a+b}{2} \times N$$

$x - y$ gevonden hebbende en $x + y$ bekend zijnde, zoo heeft men ook x en y, waar door

$$BDC = 180^\circ - C - y \text{ en } BDA = 180^\circ - A - x$$

ANDERS.

Door *J. R. Schmidt.*

De hoeken en zijden zoo noemende, als in figuur 32 is aangewezen, hebben wij $x = w - a$, $y = 180^\circ - (b + w)$, $z = 180^\circ - (c + w)$, $v = w - d$, verder is

$$A : B = Sin. v : Sin. y$$

$$B : C = Sin. c : Sin. d$$

$$C : D = Sin. x : Sin. z$$

$$D : A = Sin. b : Sin. a$$

deze vier equatien multiplicerende, komt er $1 : 1 = Sin. v . Sin. c . Sin. x . Sin. b : Sin. y . Sin. d . Sin. z . Sin. a$ en bijgevolg $Sin v . Sin. c . Sin. x . Sin. b = Sin. y . Sin. d . Sin. z . Sin. a$; ſtellende nu voor x, y, z en v hare waarden, verkrijgt men $Sin. (w - d) . Sin. (w - a) . Sin. b . Sin. c = Sin. (w + b) . Sin. (w + c) . Sin. a . Sin. d$. Deze equatie ontwikkeld en alles door $Cos. w^2 \times Cos. a . Cos. b . Cos. c . Cos. d$ gedeeld, geeft

(Tang.

$(\text{Tang.}\, w - \text{Tang.}\, d) \times (\text{Tang.}\, w - \text{Tang.}\, a) \times \text{Tang.}\, b \,.\, \text{Tang.}\, c = (\text{Tang.}\, w + \text{Tang.}\, b) \times (\text{Tang.}\, w + \text{Tang.}\, c) \,.\, \text{Tang.}\, a \,.\, \text{Tang}\, d$; en, wanneer wij de aangewezene multiplicatien verrichten,

$$\text{Tang.}w^2.\text{Tang.}b.\text{Tang.}c - \text{Tang.}w(\text{Tang.}a + \text{Tang.}d) \times$$
$$\text{Tang.}b\,.\,\text{Tang}\,.c + \text{Tang.}a\,.\,\text{Tang.}b\,.\,\text{Tang.}c\,.\,\text{Tang.}d =$$
$$\text{Tang}\;w^2\,\text{Tang.}a.\text{Tang.}d + \text{Tang.}w(\text{Tang.}b + \text{Tang}\,c) \times$$
$$\text{Tang.}a\,.\,\text{Tang.}d + \text{Tang.}a\,.\,\text{Tang.}b\,.\,\text{Tang.}c.\text{Tang.}d.$$

dat is:

$$\text{Tang.}\,w^2(\text{Tang.}\,b\,.\,\text{Tang.}\,c - \text{Tang.}\,a\,.\,\text{Tang}\,.\,d) =$$
$$\text{Tang.}\,w\,(\text{Tang}\;a + \text{Tang.}\;d)\;\text{Tang.}\;b\,.\,\text{Tang.}\;c +$$
$$\text{Tang.}\;w\;(\text{Tang.}\;b + \text{Tang.}\;c)\;\text{Tang.}\;a\,.\,\text{Tang.}\;d$$

en deelende alles door $\text{Tang.}\;w$ en door

$$\text{Tang.}\;b\,.\,\text{Tang.}\;c - \text{Tang.}\;a\,.\,\text{Tang.}\;d,$$

$$\text{Tang.}w = \frac{(T.a + T.d)\,T.b\,.\,T.c + (T.b + Tc)\,T.a\,.\,T.d}{\text{Tang.}\;b\,.\,\text{Tang.}\;c - \text{Tang.}\;a\,.\,\text{Tang.}\;d}$$

waar door w en dus ook x, y, z en v bepaald zijn.

ANDERS.

Door *F. J. Méan.*

Maak de diagonaal AC (*Fig.* 30.) naar welgevallen, verder de hoeken CAB, CAD, ACB en

en ACD gelijk aan de gegevene deelen, door het voorstel bekend gegeven; dan zal de vierhoek ABCD gelijkvormig zijn aan den voorgestelden, en de diagonaal BD trekkende, dan zullen CDB, ADB, CBD en ABD de begeerde deelen zijn.

N°. 56. Door

Door O. S. BANGMA.

Stel AB (*Fig.* 30.) $= a$, BC $= b$, CD $= c$, AD $= d$, en inhoud $= I$, $\angle$ ABD $= x$, $\angle$ CBD $= y$, AC $= p$ en BD $= q$, dan is

$$\triangle \text{ABD} = \tfrac{1}{2}\, aq \,.\, Sin.\, x$$
$$\triangle \text{BCD} = \tfrac{1}{2}\, bq \,.\, Sin.\, y$$

dus $(a\, Sin.\, x + b\, Sin.\, y)\, q = 2\, I \ldots\ldots (1)$

Voorts uit de driehoeken ABD en BCD

$$d^2 = a^2 + q^2 - 2aq\, Cos.\, x \ldots\ldots (2)$$
$$c^2 = b^2 + q^2 - 2bq\, Cos.\, y \ldots\ldots (3)$$

Als men nu uit deze drie vergelijkingen x en y wegmaakt, verkrijgt men eene vergelijking in q; nu heeft men door de eerste vergelijking:

$$(a^2 Sin.\, x^2 + b^2 Sin.\, y^2 + 2\, ab Sin.\, x\,.\, Sin.\, y)q^2 = 4\, I^2$$

$$2ab Sin.\, x Sin.\, y\,.\, q^2 = 4\, I^2 - (a^2 Sin.\, x^2 + b^2 Sin\, y^2)q^2$$

$$4\,a^2 b^2 \,Sin.\, x^2 \,Sin.\, y^2\, q^4 = 16\, I^4 - 8\, I^2 \times$$
$$(a^2 \,Sin.\, x^2 + b^2 \,Sin.\, y^2)\, q^2 + (a^2 \,Sin.\, x^2 + b^2 \,Sin.\, y^2)^2\, q^4$$
$$0 = 16\, I^4 - 8\, I^2 (a^2 \,Sin.\, x^2 + b^2 \,Sin.\, y^2)\, q^2$$
$$+ (a^2 \,Sin.\, x^2 - b^2 \,Sin.\, y^2)^2\, q^4 \ldots\ldots\ldots (4)$$

Door de tweede vergelijking heeft men

$$2\,a\,q \,Cos.\, x = a^2 - d^2 + q^2$$
$$4\,a^2 q^2 \,Cos.\, x^2 = (a^2 - d^2)^2 + 2\,(a^2 - d^2)\, q^2 + q^4$$
$$4\,a^2 q^2 \,Sin.\, x^2 = 4\,a^2 q^2 \,Sin.\, x^2$$

$$4\,a^2 q^2 = 4\,a^2 q^2 \,Sin.\, x^2 + (a^2 - d^2)^2$$
$$+ 2\,(a^2 - d^2)\, q^2 + q^4$$
$$2\,(a^2 + d^2)\, q^2 = 4 a^2 q^2 \,Sin.\, x^2 + (a^2 - d^2)^2 + q^4 \ldots\ldots (5)$$

Op gelijke wijze door de derde vergelijking:

$$2\,(b^2 + c^2)\, q^2 = 4 b^2 q^2 \,Sin.\, y^2 + (b^2 - c^2)^2 + q^4 \ldots\ldots (6)$$

Het verſchil hier van is:

$$2\,(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)\, q^2 = 4\,(a^2 \,Sin.\, x^2 - b^2 \,Sin.\, y^2)\, q^2$$
$$+ (a^2 - d^2)^2 - (b^2 - c^2)^2.$$

Stel om te verkorten

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = r$$
$$a^2 - d^2 + b^2 - c^2 = n$$
$$a^2 - d^2 - b^2 + c^2 = m$$

komt:

$$2\,r\,q^2 = 4\,(a^2 \,Sin.\, x^2 - b^2 \,Sin.\, y^2)\, q^2 + m\,n \ldots\ldots (7)$$

Door

Door (5) en (6) te adderen, heeft men:

$$2(a^2+b^2+c^2+d^2)q^2 = 4(a^2\,Sin.\,x^2+b^2\,Sin.\,y^2)q^2$$
$$+(a^2-d^2)^2+(b^2-c^2)^2+2q^4$$

Stel $a^2+b^2+c^2+d^2=s$, en daar

$(a^2-d^2)^2+(b^2-c^2)^2=\frac{m^2+n^2}{2}$ is, zoo

heeft men:

$$2sq^2 = 4(a^2\,Sin.\,x^2+b^2\,Sin.\,y^2)q^2$$
$$+\tfrac{1}{2}m^2+\tfrac{1}{2}n^2+2q^4 \quad \ldots\ldots (8)$$

Uit (7) volgt: $(a^2\,Sin.\,x^2-b^2\,Sin.\,q^2)^2 q^4$

$$=\tfrac{1}{4}r^2q^4-\tfrac{1}{4}mnrq^2+\tfrac{1}{16}m^2n^2$$

Uit (8) volgt: $8(a^2\,Sin.\,x^2+b^2\,Sin.\,y^2)q^2$

$$=4sq^2-4q^4-m^2-n^2$$

deze waarden in (4) gesteld, komt

$$0=16I^4-4sI^2q^2+4I^2q^4+m^2I^2$$
$$+n^2I^2+\tfrac{1}{4}r^2q^4-\tfrac{1}{4}mnrq^2+\tfrac{1}{16}m^2n^2, \text{ of:}$$
$$(4I^2+\tfrac{1}{4}r^2)q^4=(4sI^2+\tfrac{1}{4}mnr)q^2-$$
$$(4I^2+\tfrac{1}{4}m^2)(4I^2+\tfrac{1}{4}n^2)$$

Stel $4I^2+\frac{1}{4}r^2=R$, $4sI^2+\frac{1}{4}mnr=S$

$4I^2+\frac{1}{4}m^2=M$ en $4I^2+\frac{1}{4}n^2=N$.

komt

komt $Rq^4 = Sq^2 - MN$.

$$q^2 = \frac{\frac{1}{2}S \pm \sqrt{(\frac{1}{4}S^2 - MNR)}}{R}$$

Om AC $= p$ te vinden, zoo trekke men de vergelijking (2) van (3), komt

$$c^2 - d^2 = b^2 - a^2 + 2(a\,Cos.\,x - b\,Cos.\,y)\,q$$

$$\text{of } a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2(a\,Cos.\,x - b\,Cos.\,y)\,q$$

$$\text{of } \tfrac{1}{2}m = (a\,Cos.\,x - b\,Cos.\,y)\,q$$

$$\tfrac{1}{4}m^2 = (a^2\,Cos.\,x^2 + b^2\,Cos\,y^2 - 2ab\,Cos.\,x\,Cos.\,y)\,q^2$$

maar door (1) heeft men

$$4\,I^2 = (a^2\,Sin.\,x^2 + b^2\,Sin.\,y^2 + 2ab\,Sin.\,x\,.Sin.\,y)\,q^2$$

deze twee vergelijkingen adderende, komt

$$M = [a^2 + b^2 - 2ab\,Cos.\,(x + y)]\,q^2$$
$$= (a^2 + b^2 - 2ab\,Cos.\,B)\,q^2$$

Maar uit den driehoek ABC heeft men

$$p^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,Cos.\,B$$

$$\text{dus } p^2\,q^2 = M$$

$$p^2 = \frac{M}{q^2} = \frac{MR}{\frac{1}{2}S \pm \sqrt{(\frac{1}{4}S^2 - MNR)}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}S \mp \sqrt{(\frac{1}{4}S^2 - MNR)}}{N}$$

A N-

ANDERS.

Door *J. R. Schmidt*, *en P. van Eeghen*, *Chz.*

Alles ſtellende, zoo als in figuur 33 is aangewezen en den inhoud i noemende, hebben wij:

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} AC . BF = \tfrac{1}{2} AC . BE . Sin. \varphi$$

$$\triangle ACD = \tfrac{1}{2} AC . DG = \tfrac{1}{2} AC . DE . Sin. \varphi$$

waar van de ſom is:

$$\text{vierh. } ABCD = \tfrac{1}{2} AC . BD . Sin. \varphi$$

dat is $$i = \tfrac{1}{2} xy Sin. \varphi \quad . \; . \; . \quad (1)$$

verder is:

$$d^2 = AE^2 + BE^2 - 2 AE . BE Cos. \varphi$$

$$a^2 = CE^2 + BE^2 + 2 CE . BE . Cos. \varphi$$

waar van het verſchil is:

$$a^2 - d^2 = CE^2 - AE^2 + 2 AC . BE . Cos. \varphi$$

Op gelijke wijze is

$$c^2 - b^2 = AE^2 - CE^2 + 2 AC . DE . Cos. \varphi$$

adderende nu deze twee equatien, komt

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2 xy Cos. \varphi \quad . \; . \; . \quad (2)$$

en deelende 4 maal de equatie (1) door (2), komt

$$Tang. \varphi = \frac{4i}{a^2 - b^2 + c^2 - d^2} \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

waar

waardoor de hoek der diagonalen bekend is in de zijden en den inhoud.

De equatien (1) en (2), gequadrateerd, geven:

$$4\, x^2\, y^2\, Sin.\, \varphi^2 = 16\, i^2, \text{ en}$$

$$4\, x^2\, y^2\, Cos.\, \varphi^2 = (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2$$

deze equatien geaddeerd en de som door 4 gedeeld, geeft

$$x^2\, y^2 = \tfrac{1}{4}\,(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 + 4\, i^2 \quad . \; . \; . \; (4)$$

waardoor het product der diagonalen bekend is in de zijden en den inhoud.

Nu is (*zie de Meetk. Analysis*, *pag.* 112.)

$$x^2\, y^2\, (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (x^2 + y^2)\, x^2\, y^2$$
$$+ x^2\, (a^2 c^2 + b^2 d^2 - a^2 d^2 - b^2 c^2)$$
$$+ y^2\, (a^2 c^2 + b^2 d^2 - c^2 d^2 - a^2 b^2) =$$
$$a^4 c^2 + a^2 c^4 + b^4 d^2 + b^2 d^4 - a^2 b^2 c^2$$
$$- b^2 c^2 d^2 - c^2 d^2 a^2 - d^2 a^2 b^2$$

Hierin de gevondene waarde van $x^2\, y^2$ (4) gebragt, komt, na behoorlijke herleiding:

$$x^2\, ((a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2 + 16\, i^2) +$$
$$y^2\, ((a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 16\, i^2) =$$
$$(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)$$
$$+ 16\, (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\, i^2.$$

Zoo

Zoo wij nu kortheidshalve stellen:

$$(a^2-b^2+c^2-d^2)^2+16i^2=m^2$$

$$(a^2-b^2-c^2+d^2)^2+16i^2=p^2$$

$$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+16i^2=q^2$$

en $(a^2-b^2+c^2-d^2)(a^2-b^2-c^2+d^2)(a^2+b^2-c^2-d^2)$

$$+16(a^2+b^2+c^2+d^2)i^2=r$$

hebben wij $p^2x^2+q^2y^2=r$

en $2xy=m$

dus $2pqxy=pqm$

$$(px+qy)^2=r+pqm$$

$$(px-qy)^2=r-pqm$$

$$px+qy=\sqrt{(r+pqm)}$$

$$px-qy=\sqrt{(r-pqm)}$$

dus $x=\dfrac{\sqrt{(r+pqm)}+\sqrt{(r-pqm)}}{2p}$

en $y=\dfrac{\sqrt{(r+pqm)}-\sqrt{(r-pqm)}}{2q}$

No. 57. Door

U. Huguenin, P. van Eeghen, Chz., N. Bondt, en F. J. Méan.

Zij P (*Fig.* 34.) het middelpunt des grootsten halven cirkel AHD; dan is (BD getrokken hebbende) DC = BC = PD = BP, en PBCD is een pa-

parallelogram van vier gelijke zijden, of *rhombus*, van hetwelke de inhoud gelijk aan die der *mixtilinische* figuur is.

Men beteekene de inhouden der halve cirkels AHD, AGF en FED respectivelijk door A, B en C: daar nu AU = UF = FD = $\frac{1}{3}$ AD, alzoo AF = $\frac{2}{3}$ AD is, en de inhouden der cirkels, mitsdien ook hunne helften, zich verhouden als de quadraten hunner middellijnen, zoo heeft men:

$$A : B = AD^2 : \tfrac{4}{9} AD^2, \text{ of } B = \tfrac{4}{9} A$$

$$A : C = AD^2 : \tfrac{1}{9} AD^2, \text{ of } C = \tfrac{1}{9} A.$$

Dierhalve is de inhoud der kromlijnige figuur AHIDEFGA $= A - B + C = A - \frac{4}{9} A + \frac{1}{9} A = \frac{2}{3} A$; maar doordien de sectors BPC en CPD ieder gelijk $\frac{1}{3}$ van den halven cirkel A zijn, zoo volgt: dat sector BCDP $= \frac{2}{3}$ A is, en dat hij dus ook gelijk aan den inhoud der kromlijnige figuur AHIDEFGA wezen zal.

Subtraheert men van dezen sector, gelijk mede van de kromlijnige figuur, segment BCH + segment CID, zoo rest parallelogram PBCD = *mixtilinische* figuur ABCDEFGA.

N°. 58. Door

Jacob de Gelder.

Wij nemen tot grondslag van de oplossing van dit Vraagstuk aan de XXI *Stelling* van het III *Boek* van onze *Beginselen der Meetkunst*, dewelke zegt: *Wanneer men de basis van eenen driehoek ABC, in een punt D, zoodanig verdeelt, dat de deelen AD en BD tot elkander staan in reden, als een getal q tot een getal p; dan zal, de lijn CD getrokken hebbende,*

$$p \times AC^2 + q \times BC = p \times AD^2 + q \times BD^2 + (p+q) \times CD^2$$

zijn. (Men zie het betoog dezer stelling op de aangehaalde plaats.) Men kan deze vergelijking onder eene eenigzins eenvoudiger gedaante voorstellen. Volgens de onderstelling, is AD : BD = $q : p$, derhalve heeft men ook:

$$AD + DB, \text{ of } AB : AD = p + q : q$$

$$AD + BD, \text{ of } AB : BD = p + q : p$$

en dan volgt hieruit:

$$AD = \frac{q}{p+q} \times AB; \textit{ en derh. } AD^2 = \frac{q^2}{(p+q)^2} \times AB^2$$

$$BD = \frac{p}{p+q} \times AB \quad \ldots \quad BD^2 = \frac{p^2}{(p+q)^2} \times AB^2$$

$$p \times AD^2 = \frac{pq^2}{(p+q)^2} \times AB^2 \text{ en } q \times BD^2 = \frac{p^2 q}{(p+q)^2} \times AB$$

en de vergelijking van het XXI *Voorstel* wordt dan, door de substitutie dezer waarden,

$$p \times AC^2 + q \times BC^2 = \frac{pq}{p+q} \times AB^2 + (p+q) \times CD^2 \ldots (Q)$$

en het is, onder deze gedaante, dat wij dezelve in de oplossing van ons Vraagstuk gebruiken zullen. Dit beginsel dan te baat nemende, kan men, van geval tot geval voortgaande, de oplossing van het voorgestelde Werkstuk tot eenen algemeenen regel en van daar tot eene algemeene constructie brengen.

I. Geval. Laten (*Fig.* 35.) gegeven zijn twee punten A en B, en stel, dat P zulk een punt zij, dat, getrokken hebbende de lijnen AP en BP, de som der vlakken $p \times AP^2 + q \times BP^2$ = een gegeven vlak R zij. Bij aldien men dan de punten A en B vereenigt en de lijn AB in M zoodanig verdeelt, dat AM : BM = $q : p$

zij;

zijn dan zal, volgens het geene wij zoo even bewezen hebben:

$$p \times AP^2 + q \times BP^2 = \frac{pq}{p+q} \times AB^2 + (p+q) \times PM^2 = R$$

zijn. Nu zijn de punten A en B in stelling gegeven; bij gevolg is de lijn AB in grootte gegeven; daar nu de coefficienten p en q, benevens het vlak R, gegeven zijn, is ook PM, welke door de vergelijking

$$PM^2 = \frac{(p+q) \times R - pq \times AB^2}{(p+q)^2}$$

geven is, insgelijks in grootte gegeven en kan door eene constructie gevonden worden. Wanneer men nu, in het vlak, in hetwelk de punten A, B en P liggen, uit M, als middelpunt, met MP als straal, eenen cirkel beschrijft; dan zal de omtrek van dien cirkel de plaats van alle de punten zijn, welke de som der vlakken $p \times AP^2 + q \times BP^2 = R$ maakt; want, voor elk ander punt P' is, aangezien al de stralen van eenen cirkel gelijk zijn:

$$p \times AP'^2 + q \times BP'^2 = \frac{pq}{p+q} \times AB^2 + (p+q) \times MP'^2 = R.$$

en bij gevolg is de omtrek des cirkels, welke met

$$PM = \frac{\sqrt{[(p+q) \times R - pq \times AB^2]}}{p+q}$$

als straal, beschreven wordt, de plaats der punten, welke de som der vlakken $p \times AP^2 + q \times BP^2$ gelijk aan een gegeven vlak, of aan eene standvastige grootheid, maakt. Dan, deze meetkunstige plaats strekt zich verder, dan tot den omtrek van dien cirkel, uit. Immers, wanneer men zich eenen bol verbeeldt, wiens middelpunt in M is, en welke de lijn MP tot straal heeft, dan zullen, aangezien alle stralen van eenen bol aan elkander gelijk zijn, alle de punten P', P'', enz.

van het oppervlak van dien bol, de eigenschap hebben, dat, wanneer de lijnen AP', BP'; AP'' en BP'' getrokken worden, er een driehoek ABP', ABP'', *enz.* in de ruimte ontstaan zal, die dezelfde eigenschap, als de driehoek ABP, zal hebben, en bij gevolg zal, voor alle de punten P', P'', *enz.* de som der vlakken $p \times AP'^2 + q \times BP'^2$ of $p \times AP''^2 + q \times BP''^2 = \frac{pq}{p+q} \times AB^2 + (p+q) \times MP^2 = R$ zijn, en men mag dan hieruit besluiten: *dat, bij aldien er twee punten gegeven zijn, de plaats der gevraagde punten, welke de som der vlakken $p \times AP^2 + q \times BP^2$ standvastig maakt, een bol zal zijn, wiens middelpunt in stelling en wiens straal in grootte gegeven is.*

II Geval. Zijn gegeven (*Fig.* 36.) drie punten A, B en C en laat een punt P zoodanig gevonden zijn, dat $p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2 = R$ zij. Men deele, na de punten A en B vereënigd te hebben, AB in D zoodanig, dat $AD : BD = q : p$ zij; dan zal, zie vergelijking (Q),

$$p \times AP^2 + q \times BP^2 = \frac{pq}{p+q} \times AB^2 + (p+q) PD^2 \quad . \quad . \quad (\mu)$$

zijn. Men telle hier bij $r \times CP^2 = r \times CP^2$; dan is:

$$p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2 = \frac{pq}{p+q} \times AB^2 + \ldots\ldots (p+q) \times PD^2 + r \times CP^2.$$

Men vereënige nu het punt C met het punt D, en deele de lijn CD in M zoodanig, dat $DM : CM = r : p + q$ zij: dan zal, na dat men de lijn PM getrokken heeft, $(p+q) \times DP^2 + r \times CP^2 = \frac{(p+q)r}{p+q+r} \times DC^2 + (p+q+r) \times PM^2$

PM² zijn. Stelt men deze waarde in de vergelijking (μ) hier boven; dan verkrijgt men:

$$p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2 = \frac{pq}{p+q} \times AB^2 + \frac{(p+q) \times r}{p+q+r} \times CD^2 + (p+q+r) \times PM^2 = R$$

en dan volgt hieruit:

$$PM^2 = \frac{R - \frac{pq}{p+q} \times AB^2 - \frac{(p+q)r}{p+q+r} \times CD^2}{p+q+r}$$

Nu zijn R, AB en CD gegeven, benevens de getallen, of coëfficienten p, q en r; derhalve is ook PM gegeven en kan door conſtructie gevonden worden. *Daar dan PM eene gegevene en ſtandvastige grootheid is, zal de cirkel of de bol, welke M tot middelpunt en PM tot ſtraal heeft, de plaats der punten zijn, welke, wanneer uit dezelve de lijnen AP, BP en CP tot de gegevene punten A, B en C getrokken worden, de ſom der vlakken $p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2$ eene gegevene of ſtandvastige grootheid R zal maken.*

III Geval. Laten er (*Fig.* 37.) vier punten A, B, C en D gegeven zijn. Stel, dat het punt P gevonden zij, zoodanig, dat $p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2 + s \times DP^2 =$ het gegeven vlak R zij: men deele dan vooreerst, na de punten A en B vereenigd te hebben, AB in E zoodanig dat AE : BE $= q : p$ zij; men vereenige voorts de punten C en E, deele CE in F zoodanig, dat EF : CF $= r : p + q$ zij; dan is, indien men de lijn PF trekt, volgens het II *Geval*,

$$p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2 = \frac{pq}{p+q} \times AB^2 + \frac{(p+q)r}{p+q+r} \times CE^2 + (p+q+r) \times PF^2$$

 Men

Men telle aan beide zijden dezer vergelijking $s \times PD^2$, dan is:

$$p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2 + s \times DP^2 = \frac{pq}{p+q} \times AB^2$$

$$+ \frac{(p+q)r}{p+q+r} \times CE^2 + (p+q+r)PF^2 + s \times PD^2 = R \quad (\mu')$$

Men vereënige nu de punten D en F en deele de lijn DF in M zoodanig, dat MF : DM = s : $p + q + r$ zij; dan is, zie vergelijking (Q)

$$(p+q+r) \times PF^2 + s \times DP^2 = \frac{(p+q+r) \times s}{p+q+r+s}$$

$$\ldots\ldots \times DF^2 + (p+q+r+s) \times PM^2$$

en ftelt men nu deze waarde in vergelijking (μ'); dan heeft men:

$$p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2 + s \times DP^2 = \frac{pq}{p+q} \times AB^2 +$$

$$\frac{(p+q)r}{p+q+r} \times CE^2 + \frac{(p+q+r)s}{p+q+r+s} \times DF^2 + (p+q+r+s)$$

$$\ldots\ldots \times PM^2 = R$$

en hier uit volgt, $PM^2 = \ldots\ldots$

$$\frac{R - \frac{pq}{p+q} \times AB^2 - \frac{(p+q)r}{p+q+r} \times CE^2 + \frac{(p+q+r)s}{p+q+r+s} \times DF^2}{p+q+r+s}$$

en daar nu R, AB, CE en DF, benevens de grootheden, of getallen, p, q, r en s, gegeven zijn, of door conftructie gevonden kunnen worden, heeft PM eene bepaalde waarde, welke van die gegevens afhangt: *indien men dan een' cirkel of bol conftrueert, welks middelpunt in M is, en welke PM tot ftraal heeft; dan zal de omtrek van dien cirkel of het oppervlak van dien bol, wederom de plaats der punten P zijn, welke de fom der vlakken* $p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2$

$CP^2 + s \times DP^2$ gelijk aan eene standvastige en gegevene grootheid R maken zal.

Wij hebben, in de beschouwing van dit geval, stilzwijgend onderstelde: dat de punten A, B, C en D, alle in hetzelfde lagen; dan, wanneer men eenige oogenblikken bij de wijze, op welke het punt M en de straal PM, naar de gegevene voorwaarde van het Vraagstuk, gevonden worden stil staat; zal men zien, dat de wijze van redeneren en oplossen dezelfde zal blijven, wanneer de punten A, B, C en D, niet alle in hetzelfde vlak liggen: men zal toch, in dit algemeene geval, even, als wanneer alle de gegevene punten in hetzelfde vlak liggen, A met B kunnen verbinden en AE : BE $= q : p$ stellen; C en E vereenigen en EF : CF $= r : p + q$ stellen en eindelijk D en F kunnen vereenigen en MF : DM $= s : p + q + r$ stellen, zonder dat de in de ruimte verspreide ligging der punten daarin eenige hinderpaal in den weg stelt: *en de uitkomst der oplossing van het IV Geval wordt bijgevolg in geenen deele gewijzigd, wanneer de punten A, B, C en D niet in hetzelfde vlak liggen.*

IV Geval. Wanneer er vijf punten (*Fig.* 38,) A, B, C, D en E, het zij in een vlak het zij in de ruimte verspreid liggen, en aangenomen wordt, dat het punt P één der punten zij, welke de som der vlakken $p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2 + s \times DP^2 + t \times EP^2 = R$ maakt; dan zal, na, als boven, AB in F zoodanig verdeeld te hebben, dat AF : BF $= q : p$ zij, en voorts, na genomen te hebben, FG : GC $= r : p + q$; GH : HD $= s : p + q + r$, volgens het derde geval,

$$p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2 + s \times DP^2 = \frac{pq}{p+q} \times AB^2$$

$$+ \frac{(p+q)r}{p+q+r} \times CF^2 + \frac{(p+q+r)s}{p+q+r+s} \times DG^2 + (p+q+r+s)$$

$$\times PH^2$$

$\times$ PH^2 zijn: en telt men aan beide zijden dezer vergelijking bij $t \times EP^2$; en ftelt men dan voor $t \times PH^2 + (p+q+r+s) \times PE^2$ derzelver waarde $\frac{(p+q+r+s)t}{p+q+r+s+t} \times EH^2 + (p+q+r+s+t)$ $\times$ PM^2, dan zal men verkrijgen:

$$p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2 + s \times DP^2 + t \times EP^2 =$$

$$\frac{pq}{p+q} \times AB^2 + \frac{(p+q)r}{p+q+r} \times CF^2 + \frac{(p+q+r)s}{p+q+r+s} \times DG^2 \ldots$$

$$+ \frac{(p+q+r+s)t}{p+q+r+s+t} \times EH^2 + (p+q+r+s+t) \times PM^2 = R.$$

en dan volgt hier uit, dat

$$(p+q+r+s+t) \times PM^2 = R - \frac{pq}{p+q} \times AB^2 -$$

$$- \frac{(p+q)r}{p+q+r} \times CF^2 - \frac{(p+q+r)s}{p+q+r+s} \times DG^2 \ldots$$

$$- \frac{(p+q+r+s)t}{p+q+r+s+t} \times EH^2$$

en dat PM^2 bijgevolg bekend en gegeven zal zijn.

Men ziet hieruit: dat, het zij al de punten A, B, C, D en E in het zelfde vlak liggen, het zij dezelve, naar welgevallen, in de ruimte verfpreid zijn; de punten F, G, H en M door conftructie bepaald worden en van de coefficienten p, q, r, s en t afhangen, en *dat*, eindelijk, *alle punten P, welke op denzelfden afftand van M verwijderd zijn en door de laatfte vergelijking bepaald worden, in den omtrek van eenen cirkel, of in het oppervlak van eenen bol, zullen liggen, welks middelpunt P in ftelling en welks ftraal PM in grootte gegeven is.*

Het is niet noodig de gevallen, voor zes, zeven en meer punten, elk afzonderlijk, voor te dra-

dragen: men ziet, uit de naauwkeurige vergelijking der vier eerste: dat, voor de volgende gevallen, alles, op dezelfde regelmatige wijze, zal afloopen en dat, door dien regelmatigen voortgang, de algemeene oplossing van het werkstuk, voor zoo vele punten, als men maar stellen wil, gevonden zal worden.

Laten dan, *Fig.* 39, zoo vele punten A, B, C, D, E, F, G, H, *enz.*, als men goedvindt, het zij in hetzelfde vlak, het zij in de ruimte verspreid liggende, gegeven zijn: dan zal men, om de plaats der punten P te bepalen, welke de eigenschap hebben, dat $p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2 + s \times DP^2 + t \times EP^2 + u \times FP^2 + v \times GP^2 + w \times HP^2 +$ *enz.* $=$ R zij, te werk gaan als volgt:

1°. Vereenig de punten A en B en deel AB in Q, zoodanig dat $AQ : RQ = q : p$ zij.

2°. Vereenig de punten C en Q en deel CQ in R, zoodanig dat $QR : RC = r : p + q$ zij.

3°. Vereenig de punten D en R en deel DR in S zoodanig, dat $RS : SD = s : p + q + r$ zij.

4°. Vereenig de punten E en S en deel ES in T zoodanig, dat $ST : TE = t : p + q + r + s$ zij.

5°. Vereenig de punten F en T en deel FT in U zoodanig, dat $TU : FU = u : p+q+r+s+t$ zij.

6°. Vereenig de punten G en U en deel GU in V zoodanig, dat $UV : VG = v : p + q + r + s + t + u$ zij.

7°. Vereenig de punten V en H en deel VH in W zoodanig, dat $VW : WH = w : p + q + r + s + t + u + v$ zij.

8°. Ga op deze wijze voort, tot dat het laatste punt, dat men naar deze handelwijze, vinden zal, het punt M zij.

Indien dan P één der gegevene punten is, welke de som der vlakken $p \times AP^2 + q \times BP^2 +$ *enz.* gelijk aan eene gegevene, en standvastige grootheid R maakt, dan zal vooreerst:

$$p\times AP^2+q\times BP^2+r\times CP^2+s\times DP^2+t\times EP^2+u\times FP^2$$
$$+v\times GP^2+w\times HP^2+enz.=\frac{pq}{p+q}\times AB^2+\ldots\ldots$$
$$\frac{(p+q)r}{p+q+r}\times CQ^2+\frac{(p+q+r)s}{p+q+r+s}\times DR^2+\frac{(p+q+r+s)t}{p+q+r+s+t}\times ES^2$$
$$+\frac{(p+q+r+s+t)u}{p+q+r+s+t+u}\times FT^2+\frac{(p+q+r+s+t+u)v}{p+q+r+s+t+u+v}\times GU^2$$
$$+\frac{(p+q+r+s+t+u+v)w}{p+q+r+s+t+u+v+w}\times HV^2+enz.\ldots\ldots\ldots$$
$$+(p+q+r+s+t+u+v+w+enz.)\times PM^2=R\ldots(M)$$

zijn; en, daar alle de coëfficienten p, q, r, enz. in waarde, en de punten A, B, C, *enz.* in ſtelling, gegeven zijn, zullen de lijnen AB, CQ, DR, ES, FT, GU, HV, *enz.* in grootte bekend worden, en de lijn MP zal door de vergelijking

$$(p+q+r+s+t+u+v+w+enz.)\times PM^2=$$
$$R-\frac{pq}{p+q}\times AB^2-\frac{(p+q)r}{p+q+r}\times CQ^2-\frac{(p+q+r)s}{p+q+r+s}\times DR^2$$
$$-\frac{(p+q+r+s)t}{p+q+r+s+t}\times ES^2-enz.\ldots\ldots\ldots(N)$$

bepaald zijn. *Het oppervlak van den bol nu, welke M tot middelpunt en MP tot ſtraal heeft, zal dan de plaats der punten zijn, welke de ſom der vlakken* $p\times AP^2+q\times BP^2+$ *enz. gelijk aan een gegeven vlak R maken zal.*

I AANMERKING. Alhoewel de vergelijking (Q), waarvan wij ons in de oploſſing bediend hebben, op de XXI *Stelling* van het III *Boek* der *Beginſelen* beruſt, en deze ſtelling aldaar betoogd is voor het geval, waarin de getallen p en q meetbaar zijn, kan men nogtans deze XXI *Stelling* ook gemakkelijk voor het geval, waarin p en q onderling onmeetbare grootheden zijn, bewijzen; wan-

wanneer men, in het algemeen, in plaats van deze getallen, twee lijnen p en q aanneemt; als wanneer de stelling en de vergelijking (Q), zoo wel voor het onmeetbare, als het meetbare geval, zal kunnen betoogd worden: en is dit zoo, dan gelden ook de algemeene vergelijkingen (M) en (N) voor alle meetbare en onmeetbare waarden van p, q, r, s, t, *enz.*

II AANMERKING. Het blijkt, uit de vergelijking (N), dat het vraagstuk aan eene zekere grenspaal of limiet van mogelijkheid onderworpen is. Immers, zoo lang het gegeven vlak R grooter dan $\frac{pq}{p+q} \times AB^2 + \frac{(p+q)r}{p+q+r} \times CQ^2 + \frac{(p+q+r)s}{p+q+r+s} \times DR^2 +$ *enz.* is, zal $(p+q+r+$ *enz.*$) \times PM^2$ positief zijn, en PM zal eene bestaanbare waarde hebben: in dit geval, bestaat er derhalve altijd een bol, wiens oppervlak de plaats der punten is, welke de som $p \times AP^2 + q \times BP^2 +$ *enz.* $=$ R maakt; doch is R $= \frac{pq}{p+q} \times AB^2 +$ *enz.*; dan bestaat er slechts een enkel punt M, hetwelk die voorwaarde kan vervullen; en is eindelijk R $< \frac{p+q}{pq} \times AB^2 +$ *enz.*, dan is het vraagstuk, daar de gegevens onderling onbestaanbaar zijn, onmogelijk. En, uit dit alles volgt dan: *dat het punt M, zoo als het door de boven opgegeven constructie gevonden wordt, de eigenschap heeft, dat de som van de vierkanten der lijnen AM, BM, CM, DM enz. welke uit de gegevene punten tot dit punt getrokken worden, elk respectivelijk met de coefficienten p, q, r, s, enz. vermenigvuldigd, een minimum of eene kleinste is.*

III AANMERKING. Het voorstel komt bij

Appolonius als een *Theorema*; maar bij ons als een *Problema* voor. Appolonius neemt aan, dat op de lijnen AP, BP, CP, DP *enz.* vlakke figuren beschreven zijn (bij voorbeeld op AP een driehoek, op BD een vierhoek, op CP een vijfhoek,) en dat, voor een ander punt P′, de figuren, op AP′, BP′, CP′, *enz.* beschreven, gelijkvormig zijn aan de figuren, welke voor het punt P, op de lijnen AP, BP en CP, beschreven zijn: nu heeft eenige figuur, welke op eene lijn beschreven is, tot het vierkant van die lijn eene bepaalde betrekking; want men kan elke veelhoekige figuur in eenen regthoek veranderen, welke die lijn tot breedte heeft, en dan staat de inhoud van dien veelhoek tot het vierkant, als de lengte van dien regthoek tot de zijde van dit vierkant. Stellen wij de veelhoeken, op AP, BP, CP, DP, *enz.* beschreven, A, B, C, D, *enz.* en de gelijkvormige veelhoeken op AP′, BP′, CP′, DP′ *enz.* beschreven A′, B′, C′, D′, *enz.*; dan is volgens de beginselen:

$$(A, B, C, D, enz.) :: (AP^2, BP^2, CP^2, DP^2, enz.)$$

en, om dezelfde reden:

$$(A', B', C', D', enz.) :: (AP'^2, BP'^2, CP'^2, DP'^2, enz.)$$

stellen wij nu, het geen altijd zijn mag, dat

$$A : AP^2 = p : 1; B : BP^2 = q : 1; C : CP^2 = r : 1;$$

$$D : DP^2 = s : 1, enz, \text{ zij; dan zal}$$

$$A = p \times AP^2, B = q \times BP^2, C = r \times CP^2, D = s \times DP^2, enz.$$

zijn: maar nu is $A : A' = AP^2 : AP'^2$; derhalve is ook $A : A' = p \times AP^2 : p \times AP'^2$; dan, daar $A = p \times AP^2$ is, zal ook $A' = p \times AP'^2$ zijn, en, om dezelfde reden, $B' = q \times BP'^2$, $C' = r \times CP'^2$, *enz.*: waar uit dan blijkt: *dat het voorstel van* Appolonius *slechts in de wijze van uitdrukken, van het onze*

vor-

verschilt: (*) alleenlijk, daar hij alle punten aanneemt, als in het zelfde vlak gelegen te zijn, is ons voorstel algemeener.

IV Aanmerking. Wij hebben, bij de behandeling van elk geval, de constructie van hetzelve voorbedachtelijk achterwege gelaten, met oogmerk, om, uit de nadere beschouwing der figuur, eene meer algemeene afteleiden.

Laat, *Fig.* 40. gegeven zijn twee punten A en B, met eene onbepaalde regte lijn A′B′, met deze punten in hetzelfde vlak liggende; bij aldien nu AB in Q zoodanig verdeeld wordt, dat AQ : BQ = $q : p$ staat (en dat bijgevolg $p \times AQ = q \times BQ$ is,) dan zal, indien men, uit de punten A, B en Q, de loodlijnen AA′, QQ′ en BB′ op de lijn A′B′ laat vallen;

$$(p+q)\times QQ' = p\times AA' + q\times BB' \ldots\ldots (V)$$

zijn. Laat, om dit te bewijzen, AD en QC evenwijdig aan A′B′ getrokken worden; dan is AA′ = EQ′ = DB′ en QE = CD. Nu is, in de gelijkvormige driehoeken AQE en QBC, AQ : QB = QE : BC = $q : p$; derhalve is ook $p \times QE = q \times BC$. Tel nu de vergelijkingen,

$$p \times AA' = p \times QQ' - p \times QE$$

$$q \times BB' = q \times QQ' + q \times BC$$

bij

(*) Het vijfde voorstel van Appolonius, zoo als het door Simpson is voorgedragen, en ook wezenlijk van de woorden van Pappus niet verschilt, is in deze bewoordingen voorgesteld: „*Indien, uit zoo vele punten, als men goedvindt, tot één punt, regte lijnen getrokken worden, en op alle deze lijnen figuren, die in soort gegeven zijn, beschreven worden, te zamen gelijk zijnde aan een gegeven vlak, dan zal dit punt in den omtrek van eenen in stelling gegevenen cirkel liggen.*"

bij elkander; dan zal men, (daar $p \times QE = q \times BC$ is,) verkrijgen:

$$p \times AA' + q \times BB' = (p + q) \times QQ'$$

dat bewezen moest worden.

Laten nu, na dit vooraf bewezen te hebben, Fig. 41, A, B, C, D, E, F, *enz.* dezelfde punten zijn, als in *Fig.* 39, met dit onderscheid, dat zij hier, als in hetzelfde vlak liggende, worden aangenomen. Men neme, in het vlak dezer punten, twee lijnen XY en XZ en men late, uit alle punten der figuur, loodlijnen op deze twee lijnen vallen, te weten: AA', BB', *enz.* op XY en AA'', BB'', *enz* op XZ.

Wanneer men dan, even gelijk in *Fig.* 39, geschied is, de punten A en B vereenigt en het punt Q zoodanig neemt, dat $AQ : QB = q : p$ zij; dan is volgens vergel. (V)

$$\left.\begin{array}{l}(p+q) \times QQ' = p \times AA' + q \times BB' \\ (p+q) \times QQ'' = p \times AA'' + q \times BB''\end{array}\right\} \ldots\ldots (1)$$

Men vereenige de punten C en Q en deele de lijn CQ in R zoodanig, dat $QR : RC = r : p + q$ zij; dan zal, ingevolge vergelijking (V)

$$(p+q+r) \times RR' = (p+q) \times QQ' + r \times CC'$$

$$(p+q+r) \times RR'' = (p+q) \times QQ'' + r \times CC''$$

zijn: stelt men nu in deze voor $(p + q) \times QQ'$ en $(p + q) \times QQ''$ derzelver waarde, uit vergelijking (1); dan verkrijgt men:

$$\left.\begin{array}{l}(p+q+r) \times RR' = p \times AA' + q \times BB' + r \times CC' \\ (p+q+r) \times RR'' = p \times AA'' + q \times BB'' + r \times CC''\end{array}\right\} (2)$$

Men vereenige al verder de punten D en R en en deele DR in S zoodanig, dat $RS : SD = s : p + q + r$ zij; dan is, SS' en SS'' getrokken hebbende, volgens vergelijking (V),

$(p +$

$$(p+q+r+s)\times SS' = (p+q+r)\times RR' + s\times DD'$$

$$(p+q+r+s)\times SS'' = (p+q+r)\times RR'' + s\times DD''$$

en wanneer men nu wederom in deze de waarden van $(p+q+r)$ RR' en $(p+q+r)\times RR''$, uit vergelijking (2), overbrengt; dan zal men hebben:

$$\left\{\begin{aligned} (p+q+r+s)\times SS' &= p\times AA' + q\times BB' \\ &\quad + r\times CC' + s\times DD' \\ (p+q+r+s)\times SS'' &= p\times AA'' + q\times BB'' \\ &\quad + r\times CC'' + s\times DD'' \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Wanneer men, op deze wijze voortgaat, met de punten E en S te vereenigen en ES in T zoodanig te verdeelen, dat ET : TS = $t : p + q + r + s$ is; voorts F en T te vereenigen en FT in U zoodanig te verdeelen, dat TU : UF = $u : p + q + r + s + t$ is enz. dan zal men eindelijk tot het laatste punt M komen, dat het middelpunt van den cirkel of van den bol is, welks omtrek of oppervlak de plaats der gevraagde punten is, en men zal dan hebben:

$$\left\{\begin{aligned} (p+q+r+s+t)TT' &= p\times AA' + q\times BB' \\ &\quad + r\times CC' + s\times DD' + t\times EE' \\ (p+q+r+s+t)TT'' &= p\times AA'' + q\times BB'' \\ &\quad + r\times CC'' + s\times DD'' + t\times EE'' \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\left\{\begin{aligned} (p+q+r+s+t+u)\times UU' &= p\times AA' + q\times BB' \\ &\quad + r\times CC' + s\times DD' + t\times EE' + u\times FF' \\ (p+q+r+s+t+u)\times UU'' &= p\times AA'' + q\times BB'' \\ &\quad + r\times CC'' + s\times DD'' + t\times EE'' + u\times FF'' \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

en, in het algemeen, zal de wet dezer vergelijkingen, tot in het laatste punt M blijven voortgaan, te weten, voor dat punt, zal

$$(p+q+r+\text{enz.})\times MM' = p\times AA' + q\times BB' + r\times CC' + \text{enz.} \quad (\omega)$$

$$(p+q+r+\text{enz.})\times MM'' = p\times AA'' + q\times BB'' + r\times CC'' + \text{enz.} \quad (\omega)$$

Nu

Nu is, wanneer men de figuur (*Fig.* 41.) opletend beschouwt,

$AA' = XA''$; $BB' = XB''$; $CC' = XC''$; $DD' = XD''$, $EE' = XE''$; $QQ' = XQ''$, $RR' = XR''$; $SS' = XS''$; $TT' = XF''$, $UU' = XU''$; *enz.* en $MM' = XM''$

$AA'' = XA'$; $BB'' = XB'$; $CC'' = XC'$; $DD'' = XD'$; $EE'' = XE'$; $QQ'' = XQ'$; $RR'' = XR'$; $SS'' = XS'$; $TT'' = XF'$; $UU'' = XU'$; *enz.* en $MM'' = XM'$

brengt men dan deze waarden in de vergelijkingen (1) (2) (3) (4), *enz.* (ω) over, zal men, dezelve oplossende, de waarden van XQ' en XQ'' van XR' en XR'', van XS en XS'' *enz.* en in het algemeen, van XM' en XM'' vinden, te weten:

$$XM' = \frac{p \times XA' + q \times XB' + r \times XC' + s \times XD' + enz.}{p + q + r + s + enz.} \quad (\lambda)$$

$$XM'' = \frac{p \times XA'' + q \times XB'' + r \times XC'' + s \times XD'' + enz.}{p + q + r + s + enz.} \quad (\lambda')$$

en daar deze vergelijkingen altijd waarheid zullen blijven, hoedanig, waar en in welke rigting de onbepaalde lijnen XY en XZ worden aangenomen; volgt hier uit, om het middelpunt van den bol te vinden, deze constructie:

Men neme, (indien namelijk de gegevene punten A, B, C, D, E, *enz.* in hetzelfde vlak gelegen zijn.) in dit vlak twee onbepaalde loodlijnen XY en XZ aan; men late, uit de gegevene punten A, B, C, *enz.*, de loodlijnen AA', BB', CC', *enz.* AA'', BB'' en CC'' op dezelve vallen en bepale de punten M' en M'', volgens de formulen (λ) en (λ'). Wanneer men dan, door M' en M'', evenwijdig aan XZ en XY, de lijnen $M'M$ en $M''M$ trekt, dan is het punt M, alwaar deze lijnen elkander snijden, het middelpunt van den cirkel of bol.

Het is waar, de algemeene vergelijkingen (λ) en (λ') gelden voor het geval, dat de punten A,

B, C, D, *enz.* in hetzelfde vlak liggen: doch, wanneer de punten A, B, C, *enz.* in de ruimte verſpreid liggen, dan zal men evenwel nog ſoortgelijke vergelijkingen, ter bepaling van het punt M, vinden. Laten, *Fig.* 41. XY, XZ en XW drie lijnen zijn, loodregt op elkander ſtaande: men verbeelde drie vlakken, door deze lijnen gaande, te weten, de vlakken XYZ, XYW en XWZ. Laten de punten A, B, C, D, *enz.* alle boven het vlak XYZ gelegen zijn: indien men dan, uit deze punten, loodlijnen op dit vlak XYZ laat vallen, dan zullen deze loodlijnen dit vlak in even zoo vele punten ontmoeten, die de projectien der gegevene punten zullen zijn. Laten die projectien door de punten A, B, C, *enz.*, worden afgebeeld; dan zal men de projectie van het punt M, door middel van de formulen (λ) en (λ′), kunnen vinden. Indien men dan verder de gegevene punten A, B, C, D, *enz.* op één der twee andere vlakken, bij voorb. het vlak XYW projecteert en deze projectien op dezelfde wijze als de eerſte behandelt, dan zal men, op de lijn XW, de punten A″, B″, C″, D″, *enz.* Q″, R″, S″, *enz.* M″ (onnoodig in de figuur aan te wijzen,) verkrijgen en men zal, om het punt M″ te bepalen, nog hebben de derde vergelijking

$$XM'' = \frac{p \times XA'' + q \times XB'' + r \times XC'' + s \times XD'' + enz.}{p + q + r + s + enz.} \quad (\lambda'')$$

Bij aldien men dan drie asſen, XY, XZ en XW, aanneemt, en door deze asſen drie vlakken XYZ, XWZ, XWY laat gaan en de afſtanden der punten A, B, C, D, *enz.* tot die vlakken neemt, dan zullen de afſtanden dezer punten tot het vlak XZW zijn,

XA′, XB′, XC′, XD′, *enz.*

de afſtanden van die punten tot het vlak XWY,

XA″, XB″, XC″, XD″, *enz.*

 en

en de afstanden van deze punten tot het vlak XYZ, de lijnen

$$XA'', XB'', XC'', XD'', enz.$$

deze afstanden dan bekend hebbende, zullen de punten M', M'' en M''', door de vergelijkingen (λ), (λ') en (λ''), het zij door dadelijke constructie, het zij door berekening gevonden worden. Men late dan, door de punten M', M'' en M''', drie vlakken, evenwijdig aan WXZ, XWY en XYZ gaan; waar nu deze vlakken elkander snijden, daar ligt het punt M; of, nog beter: men trekke in het vlak XYZ, door M' en M'' twee lijnen, evenwijdig aan XZ en XY. Uit het punt, alwaar deze lijnen elkander snijden, (en dat in de figuur door M is aangewezen,) rigte men eene loodlijn op het vlak XYZ op; en dan zal het uiteinde dezer loodlijn, gelijk gemaakt zijnde aan XM''', het begeerde punt M, dat is, het middelpunt van den begeerden bol zijn.

V Aanmerking. Wat aanbelangt de constructie of bepaling van de waarde van PM, deze kan op eene eenvoudiger wijze, dan door de vergelijking (N), gevonden worden. Indien PM = o gesteld wordt, dan verandert de vergelijking (M) in

$$p \times AM^2 + q \times BM^2 + r \times CM^2 + s \times DM^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots t \times EM^2 + enz =$$

$$\frac{pq}{p+q} \times AB^2 + \frac{(p+q)r}{p+q+r} \times CQ^2 + \frac{(p+q+r)s}{p+q+r+s} \times DR^2 + enz.$$

Indien men dan, voor $\frac{pq}{p+q} \times AB^2 + enz.$ deze waarde in de vergelijking (M) overbrengt, dan heeft men deze waarlijk fraaije vergelijking:

$$p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2 + s \times DP^2 + enz. = p \times AM^2 + q \times BM^2 + r \times CM^2 + s \times DM^2 + enz. + (p+q+r+s+enz.) \times PM^2 \qquad R$$

Uit

Uit welke dan volgt:

$$PM^2 = \frac{R - (p \times AM^2 + q \times BM^2 + r \times CM^2 + s \times DM^2 + enz.)}{p + q + r + s + enz.}$$

welke gemakkelijker dan de vergelijking (N) kan geconſtrueerd worden.

VI Aanmerking. Het is opmerkelijk, dat de vergelijkingen (λ), (λ') en (λ''), waardoor het middelpunt van den cirkel of bol bepaald wordt, dezelfde zijn, als door welke men, in de *Statica*, of *Evenwigtsleer*, het middelpunt van zwaarte bepaalt van ligchamen, welke in de gegevene punten A, B, C, D, *enz.* geplaatst zijn, en welker gewigten reſpectievelijk gelijk of evenredig zijn aan de coefficienten p, q, r, s, t, *enz.*, waarmede, in ons werkſtuk, de vierkanten AP^2, BP^2, CP^2, DP^2, *enz.* vermenigvuldigd worden. *Het middelpunt van den bol, wiens oppervlak de plaats der punten is, welke de ſom der vlakken* $p \times AP^2 + q \times BP^2 + enz. = R =$ *eene ſtandvastige grootheid maakt, is dus het zwaartepunt van ligchamen, in de punten A, B, C, D, enz. geplaatst en reſpectievelijk in gewigt aan de coefficienten p, q, r, s, enz. evenredig zijnde.*

VII Aanmerking. Wanneer men de coefficienten $p = q = r = s = t =$ *enz.* alle $=$ 1 ſtelt; dan worden ook alle vergelijkingen, welke de algemeene oplosſing van het werkſtuk ons heeft leeren kennen, eenvoudiger. De vergelijking (M) wordt als dan:

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 + EP^2 + enz. =$$

$$\tfrac{1}{2}AB^2 + \tfrac{2}{3}CQ^2 + \tfrac{3}{4}DR^2 + \tfrac{4}{5}ES^2 + enz. + nPM^2 = R$$

(zijnde hier n het aantal der gegevene punten.)

De vergelijkingen (λ), (λ') en (λ''), waardoor het middelpunt van den bol gevonden wordt, worden nu deze meer eenvoudiger,

$$XM' = \frac{1}{n} (XA' + XB' + XC' + XD' + enz.$$

$$XM'' = \frac{1}{n} (XA'' + XB'' + XC'' + XD'' + enz.)$$

$$XM''' = \frac{1}{n} (XA''' + XB''' + XC''' + XD''' + enz.)$$

en eindelijk wordt

$$PM^2 = \frac{1}{n} [R - (AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 + enz.)]$$

VIII Aanmerking. Wanneer alle de coefficienten gelijk zijn; dan wordt M het zwaartepunt van gelijke gewigten, welke in de punten A, B, C, D, E, *enz.* geplaatst zijn, of wel dat punt, hetwelk Carnot het *middelpunt van middelbare afstanden* noemt. (Men raadplege over dit punt onze *Meetkundige Analysis*, XLVII *Vraagstuk*, §. 220 *en verv.*) en nu wordt de duisterheid van het IV *Voorstel*, in de noot van *Bladz.* 356 van Montucla's *Historie der Wiskunde* I *Deel*, IV *Boek*, door den Heer Strabbe vertaald, (en welke de vertaler, na alle aangewende moeite, niet had kunnen ophelderen, waarom hij deskundigen tot het mededeelen van deze opheldering uitnoodigt,) geheel uit den weg geruimd. Na dat men, in de 28 *Figuur*, *Plaat* III van de *Historie der Wiskunde*, eene loodlijn PQ op NO getrokken heeft, moet dit vierde Voorstel van Montucla aldus gelezen worden: „ Indien, uit zoo vele punten, als men begeert, tot „ een punt R (*Fig.* 28. van de *Historie der Wiskunde*,) even zoo vele lijnen getrokken worden „ en dat de som van de vierkanten van die lijnen onveranderlijk zij, dan zijn het punt R en „ alle overëenkomstige punten gelegen in eenen cirkel, waarvan men het middelpunt op deze „ wijze bepalen kan. Laat A, B, C, D, E en

„ F

„ F de gegevene punten zijn; wij zullen er zes „ onderstellen. Hebbende de lijn NO getrokken, „ die alle deze punten aan eene zijde laat, zoo „ laat de perpendiculairen AG, BH, *enz.* ge- „ trokken worden, en GT gelijk aan het zesde- „ deel der lijnen GH, GI, GK, GL en GM „ genomen worden, voorts trekke men de lood- „ lijn PQ" (*hier maak ik duidelijkshalve deze verandering*,) „ zoodanig, dat NP gelijk zij aan „ een-zesde van de som der lijnen AG, BH, „ CL, DK, EL en FM; dan zal Q het mid- „ delpunt des cirkels zijn, en zijn straal QR „ zoodanig" (*hier maak ik nog deze verandering*,) „ dat $QR^2 + AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 +$ „ $DQ^2 + EQ^2 + FQ^2 = AR^2 + BR^2 + CR^2 +$ „ $DR^2 + ER^2 + FR^2$ zij." — Men raadplege verder het XLVII *Vraagstuk onzer Meetkundige Analysis.*

N°. 59. Door

JACOB DE GELDER, *en P. van Eeghen, Chz.*

Eene der fraaiste en nuttigste eigenschappen van het metrieke stelsel van Maten en Gewigten bestaat daarin, dat, wanneer men de naauwkeurige lengte van den stoffelijken meter bezit, men alle vlakte- en inhoudsmaten, als mede de gewigten door dezelve bepalen kan; een voordeel, hetwelk geen ander der oude stelsels, welke de onregelmatigheid en willekeur ten grondslage schijnen gehad te hebben, bezitten.

In het metrieke stelsel, is de Gramme het gewigt van zuiver gedistilleerd water, bevat in eenen cubieken centimeter, dat is, in eenen cubus, wiens zijde het honderste gedeelte van den meter uitmaakt, en wel, onder de voorwaarde, dat dit zuiver gedistilleerd water gebragt zij tot deszelfs maximum van digtheid, hetwelk het

water dan bezit, wanneer het de temperatuur van 39¼ graad van den thermometer van FAHRENHEIT verkregen heeft. Nu heeft de cubieke decimeter, (dat is de cubus, welke een-tiende van eenen meter tot zijde heeft,) den inhoud van *duizend* cubieke centimeters; indien dan zulk een cubieke decimeter met zuiver gedistilleerd water, gebragt tot het maximum van digtheid, gevuld is, dan weegt dit water *duizend grammes*, dat is, (naar de aangenomene wijze van de namen der maten en gewigten zamen te ſtellen,) *één kilogramme.*

Men bemerkt hieruit ligtelijk, dat men zelf het gewigt, dat men kilogramme noemt, maken kan; want, wanneer men eenen zuiver bewerkten cubieken bak gemaakt heeft, wiens zijde binnenwerks eenen decimeter houdt, en men vult dien bak met zuiver gedistilleerd water, tot de temperatuur van 39¼ graden gebragt, dan zal men een gewigt, het zij uit lood, ijzer, koper of eene andere zelfſtandigheid aan het gewigt van dit water kunnen gelijk maken, (*) en men zal alzoo een model van het gewigt, dat men kilogramme noemt, kunnen daarſtellen; ja, nog meer! wanneer men tafels van de ſpecifieke gewigten der onderſcheidene natuurkundige zelfſtandigheden heeft, hoedanige bij BRISSON, PRONY en anderen voorkomen, dan zal men kunnen berekenen, hoe de afmetingen van een ligchaam van eene gegevene figuur moeten genomen worden, op dat dit ligchaam, uit zulk of zulk eene ſtof vervaardigd, een gewigt van eene gegevene en bepaalde grootte hebbe.

Het

(*) Zulks vereischt nogtans veel omzigtigheid, en het in acht nemen van vele natuurkundige omſtandigheden, welke wij, daar ons oogmerk alleen is, om een denkbeeld te geven, hoe men zelf zijne gewigten maken kan, met ſtilzwijgen voorbijgaan.

Het *specifieke* of *soortonderscheidelijk gewigt*, (*pondus specificum*) ten onregte *soortonderscheidelijke zwaarte* (*gravitas specifica*) genoemd, is de evenredigheid der gewigten van twee lighamen, welke dezelfde uitgebreidheid of hetzelfde *volumen* hebben: wanneer dus twee cubieken duimen van twee onderscheidene stoffen, de eene 3 oncen en de andere 5 oncen weegt, dan is het specifieke gewigt van de tweede ten opzigte van de eerste $\frac{5}{3}$ of $1\frac{2}{3}$. De Natuurkundigen vergelijken nu de specifieke gewigten, van alle zelfstandigheden, met het zuiver gedistilleerd water, en stellen, bij voorbeeld, (omdat men in dezen niet met het volstrekte gewigt te doen heeft,) het gewigt van eenen cubieken duim, cubieken decimeter waters (wij nemen hier den laatsten,) gelijk aan de éénheid, en drukken de gewigten van den cubieken decimeter, van zekere zelfstandigheid in getal van die éénheden uit, welke getallen de Natuurkundigen door proeven bepalen. Wanneer men dan zegt: *het specifieke gewigt van het geel koper is* 8,39652, wil zulks zeggen: *een cubieke duim, decimeter, enz. van geel koper, weegt* 8,39652 *maal zwaarder dan een cubieke duim, decimeter, enz. zuiver gedistilleerd water*, en *wanneer men den inhoud van zulk een ligchaam door het getal, hetwelk deszelfs specifieke gewigt uitdrukt, vermenigvuldigt; dan verkrijgt men altijd het gewigt van dit ligchaam, uitgedrukt in het gewigt van het zuiver gedistilleerd water, bevat in de cubieke éénheid, in welke de inhoud van dit ligchaam is uitgedrukt.* Bij voorbeeld eene massa geel koper hebbe de inhoud van 3,73 cubieke decimeters; dan weegt die massa aan zuiver water, (omdat een cubieke decimeter een kilogramme weegt,) 3,73 kilogrammes, vermenigvuldigt men nu dit gewigt met 8,39652; dan verkrijgt men, voor het gewigt van die massa geel koper, 31,319 kilogrammes, enz.

Door deze voorloopige verklaring, wordt de oplossing van het Vraagstuk gemakkelijk: stel de middellijn van den gevraagden cilinder $= ax$ decimeters, deszelfs hoogte $= bx$ decimeters; (nemende namelijk voor $2 = a$. en voor $3 = b$,) stel de proportie van den omtrek eens cirkels tot zijne middellijn $= \pi$; dan is de omtrek van de basis des cilinders $= \pi ax$ en de inhoud van de basis $\frac{1}{4}\pi a^2 x^2$. Vermenigvuldigt men dien inhoud met de hoogte bx, dan verkrijgt men, voor den inhoud van den cilinder $\frac{1}{4}\pi a^2 bx^3$; die inhoud moet met het specifieke gewigt van het geel koper, dat is met $g = 8,39652$, vermenigvuldigd worden, en dan heeft men, omdat de inhoud des cilinders in cubieke decimeters bepaald is, het gewigt in kilogrammes; daar nu, volgens de vraag, het gewigt van dien cilinder *ééne* kilogramme zijn moet, en bijgevolg gegeven is, zoo zullen wij, dit gewigt algemeen $= n$ kilogrammes stellende, hebben de vergelijking:

$$\frac{1}{4}\pi g a^2 bx^3 = n$$

divideert men deze vergelijking door $\frac{1}{4}\pi g a^2 b$, dan is:

$$x^3 = \frac{4n}{\pi g a^2 b} = \frac{8n}{2\pi g a^2 b}$$

waaruit dan eindelijk volgt:

$$x = 2\sqrt[3]{\frac{n}{2\pi g a^2 b}}, ax = 2a\sqrt[3]{\frac{n}{2\pi g a^2 b}}, \text{en } bx = 2b\sqrt[3]{\frac{n}{2\pi g a^2 b}}.$$

Wanneer nu n in kilogrammes, dat is in cubieke decimeters waters gegeven is, zoo is natuurlijk de éénheid, in welke, bij de berekening in getallen, x, ax en bx zal gevonden worden, een decimeter en deelen van denzelven; doch indien men verkoos n in grammes of in milligrammes uit te drukken; dan zou men de afmetingen des cilinders in decimeters of millimeters vinden.

In

In ons voorbeeld, is $g = 8{,}39652$, $a = 2$, $b = 3$, $\pi = 3{,}14159265$ en $n = 1$; derhalve $2a^2b = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$ en $x = \frac{2}{\sqrt[3]{24\pi g}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3\pi g}}$, welke waarde nu door de Logarithmen het gemakkelijkst aldus berekend wordt.

$$
\begin{aligned}
Log.\ 3 &= 0{,}4771212 \\
Log.\ \pi &= 0{,}4971499 \\
Log.\ g &= 0{,}9240993 \\
\hline
3)\ & \ \ 1{,}8983704 \\
\hline
Log.\ \sqrt[3]{3\pi g} &= 0{,}6327901
\end{aligned}
$$

$$of\ Log.\ \frac{1}{\sqrt[3]{3\pi g}} = 9{,}3672099 = Log.\ x$$

$x = 0{,}2329216$ *decimeters.*
of $x = 23{,}29216$ *millimeters.*
$2x = 46{,}58432$ *mill.*
$3x = 69{,}87648$ *mill.*

N°. 60. Door

A. van der Swan, C. J. van Setten, C. J. van Brussel, en P. van Eeghen, Chz.

Stel de eerste term x, en het gemeen verschil y, dan is

$$
\begin{aligned}
2\,x \qquad\quad &= 2\,x \\
3\,(x + \ \ y) &= 3\,x + 3y \\
4\,(x + 2y) &= 4\,x + 8y \\
5\,(x + 3y) &= 5\,x + 15y \\
6\,(x + 4y) &= 6\,x + 24y \\
\hline
\text{dus } 20x + 50y &= 360 \\
\text{of } 2x + 5y &= 36
\end{aligned}
$$

 voorts

voorts $\frac{4x + 8y}{2x} = 2 + 4\frac{y}{x} = 10$

of $4\frac{y}{x} = 8$ en $y = 2x$

dus $2x + 5y = 12x = 36$

dus $x = 3$ en $y = 6$

en de reeks 3, 9, 15, 21, 27

N°. 61. Door

U. HUGUENIN, *J. R. Schmidt*, *C. J. van Brussel*, *en P. van Eeghen*, *Chz.*

1°. Laten de vier middelpunten der zijden, E, F, G en H, des onregelmatigen vierhoeks ABCD (*Fig.* 42.) door regte lijnen vereënigd en de hoekpuntslijnen AC en BD getrokken zijn. Daar dan AE = BE en BF = FC is, (veronderstelling) zoo is, in den driehoek ABC, AE : BE = CF : BF, en EF is evenwijdig met AC; (*Beginselen der Meetkunst*, door J. DE GELDER, §. 239.) mitsdien zijn de driehoeken EFB en ACB gelijkvormig en EF : AC = EB : AB; maar EB = ½ AB (veronderstelling) daarom EF = ½ AC.

Daar men, op gelijke wijze, kan aantoonen: dat GH evenwijdig met AC en = ½ AC is, zoo volgt: dat EF en HG evenwijdig en elk gelijk aan de helft der hoekpuntslijn AC zijn.

Even zoo kan men bewijzen: dat FG en EH evenwijdig met de hoekpuntslijn BD zijn en de helft van hare lengte hebben: waaruit volgt: dat EFGH een parallelogram is.

Voorts is (*Beginselen der Meetkunst*, *enz.* §. 268.) △ EBF : △ ABC = BE^2 : AB^2 (of 4 BE^2) = 1 : 4; alzoo △ EBF = ¼ △ ABC, en, op gelijke wijze, △ GDH = ¼ △ ADC; dierhalve △ EBF + △ GDH = ¼ vierhoek ABCD. Op ge-

gelijke wijze, vindt men: △ FCG + △ EAH = $\frac{1}{4}$ vierhoek ABCD; waaruit volgt: dat △ EBF + △ GDH + △ FCG + △ EAH = $\frac{1}{2}$ vierhoek ABCD is; welke beide leden dezer vergelijking van den geheelen vierhoek afgetrokken zijnde, geven zal: parallelogram EFGH = $\frac{1}{2}$ vierhoek ABCD.

2°. Men ſtelle, dat I en K de middelpunten der hoekpuntslijnen AC en BD zijn, uit welke men de lijnen IE, IF, IG, IK en KE, KF, KG en KH getrokken hebbe: alsdan is, in den driehoek ABC, (wegens AI = IC en BK = KD) AE : EB = AI : IC; daarom is EI evenwijdig met BC; en, in den driehoek BCD, is DC : GC = DB : BK, dus ook GK evenwijdig met BC; waaruit volgt: dat, (zoo als in n°. 1.) EI en KG evenwijdig en = $\frac{1}{2}$ BC zijn.

In △ ACD, is CG : GD = CI : AI; gevolglijk zijn IG en AD evenwijdig, en, in △ ABD, is BE : AE = BK : KD, daarom is ook EK evenwijdig met AD: waaruit volgt, even zoo als in n°. 1, dat IG en EK evenwijdig en = $\frac{1}{2}$ AD zijn. Mitsdien is EIGK een parallelogram, hetwelk IK tot hoekpuntslijn heeft.

Doordien men, op gelijke wijze, aantoont, dat IF en KH evenwijdig met AB en = $\frac{1}{2}$ AB zijn, gelijk mede, dat IH, zoo als ook FK, evenwijdig met CD en = $\frac{1}{2}$ CD is, zoo is ook IFKH een parallelogram, hetwelk den afſtand, IK, van de middelpunten der hoekpuntslijnen AC en BD, tot hoekpuntslijn heeft: dierhalven hebben de parallelogrammen EIGK en IFKH de gemeenſchappelijke hoekpuntslijn IK.

3°. Daar de hoekpuntslijnen eens parallelograms elkander midden door deelen, (*Beginſ. der Meetkunst*, §. 170.) zoo zullen, in het parallelogr. EIGK, de hoekpuntslijnen EG en IK zich in *één* punt ſnijden, zoodanig, dat IL = LK is; maar hetzelfde heeft ook plaats met de hoekpuntslijnen FH

FH en IK in het parallelogram IFKH: dierhalve ſnijden de hoekpuntslijnen EG en FH, der parallelogrammen EIGH en IFKH (welke tevens hoekpuntslijnen des eerſten parallelograms EFGH zijn) de gemeenſchappelijke hoekpuntslijn IK in derzelver middelpunt L.

Om eindelijk nog aan te toonen, dat het punt L het middelpunt der middelbare afſtanden van de hoekpunten des vierhoeks ABCD is, moet bewezen worden: dat, als men, uit de hoekpunten A, B, C, D des vierhoeks en uit het punt L, de loodlijnen Aa, Bb, Cc, Dd en Ll op eene willekeurige getrokkene regte lijn MN vallen laat, de loodlijn Ll $=\frac{1}{4}$ (Aa + Bb + Cc + Dd) wezen zal.

Men trekke Ee en Gg loodregt op MN, zoo is Ee $=\frac{1}{2}$ (Aa + Bb): want zoo men Ab' evenwijdig trekt met MN, ſnijdt deze lijn Ee in e'; en doordien Ee en Bb evenwijdig zijn, zijn de driehoeken EAe' en BAb' gelijkvormig; maar AE $=\frac{1}{2}$ AB, alzoo ook Ee' $=\frac{1}{2}$ Bb'. Addeert men hier bij $e'e$ $=\frac{1}{2}$ (Aa + $b'b$), wijl Aa $=$ $e'e$ $=$ $b'b$ is, zoo heeft men Ee' + $e'e$ $=\frac{1}{2}$ (Aa + $b'b$ + Bb'), dat is: Ee $=\frac{1}{2}$ (Aa + Bb).

Op gelijke wijze betoogt men: dat Gg $=\frac{1}{2}$ (Cc + Dd) is; maar, volgens het voorgaande, EL $=$ LG zijnde, zoo is, op gelijke gronden, Ll $=\frac{1}{2}$ (Ee + Gg); of, hier in de waardijen van Ee en Gg ſtellende, heeft men Ll $=\frac{1}{4}$ (Aa + Bb + Cc + Dd); het welke men moest bewijzen.

I. Aanmerking. Het middelpunt der middelbare afſtanden, heeft ook de eigenſchap, dat, indien men door hetzelve eene willekeurige lijn M'N' trekt, en daarop de loodlijnen Aa'', Bb'', Cc'' en Dd'' vallen laat, dan de ſom der loodlijnen, aan de ééne zijde, gelijk de ſom der loodlijnen aan de andere zijde der lijn M'N' wezen zal; namelijk Aa'' + Dd'' $=$ Bb'' + Cc''.

Dit

Dit volgt onmiddelbaar uit $Ll = \frac{1}{4}$ (A*a* + B*b* + C*c* + D*d*,): want ſtelt men M′N′ evenwijdig met MN, (hetwelk geſchieden kan, doordien de rigting van MN naar believen aangenomen is,) en ſubtraheert men deze uitdrukking van $Ll = \frac{1}{4}$ (*aa′* + *bb′* + *cc′* + *dd′*), zoo heeft men o $= \frac{1}{4}$ (A*a′* — B*b′* — C*c′* + D*d′*), en hier uit volgt: A*a′* + D*d′* = B*b′* + C*c′*.

II. Aanmerking. Als men onze figuur met eenige opmerkzaamheid beſchouwt, zal men in dezelve nog verſcheide andere parallelogrammen ontdekken; als, bij voorbeeld, het middelſte parallelogram PIQK, waarvan IK al mede een diagonaal is, en de parallelogrammen BEIF, AEKH, FKGC, GIHD, *enz.* welke op de helften van de zijden des vierhoeks ſtaan. Voorts is het ook gemakkelijk te bewijzen: dat de ſom der vier parallelogrammen BEIF + AEKH + FKGC + GIHD = vierhoek ABCD is: want, daar men ligtelijk kan aantoonen: dat △ QKG = △ PIE en △ IQF △ KPH is, zoo addere men bij BEIF + EPHA + FQGC + HKGD + IPKQ = BEIF + EPHA + FQGC + HKGD + IPKQ, de vergelijking △ IEP + △ PHK + △ KQG + △ IQF = △ PHK + △ KQG + △ KQG + △ PHK, waardoor men dan verkrijgt: vierhoek ABCD = BEIF + EKHA + FKGC + GIHD.

Bovendien kan men ligtelijk bewijzen: dat de onregelmatige vierhoeken AEIH en IFCG aan elkanderen gelijk en gelijkvormig met den vierhoek ABCD zijn; en daar voorts de zijden van deze kleine vierhoeken de helft van de lengte des grooten vierhoeks hebben, zoo is de inhoud van elk derzelven $= \frac{1}{4}$ inhoud des grooten vierhoeks; en alzoo is AEIH + IFCG $= \frac{1}{2}$ ABCD, hetwelk afgetrokken zijnde van ABCD = ABCD eindelijk geven zal: BEIF + HIGD $= \frac{1}{2}$ ABCD; maar, daar het insgelijks zoo gemakkelijk te bewijzen is, dat de

de vierhoeken BEKF en KHDG aan elkanderen gelijk en gelijkvormig met den vierhoek ABCD zijn, en $\frac{1}{4}$ van zijn inhoud hebben, zoo is ook BEKF + KHDG = $\frac{1}{2}$ ABCD; en hier uit volgt: dat ook de som der beide parallelogrammen EAHK + FKGC = $\frac{1}{2}$ ABCD wezen zal; namelijk gelijk aan de helft van den vierhoek.

N°. 62. Door

U. HUGUENIN, *P. van Eeghen, Chz.*, en *C. J. van Brussel.*

Daar (*Fig.* 43.) de hoek ABC = BCD = 90° is, en AB, BC en CD gegeven zijn, zoo is AD dadelijk bekend: want AB verlengd, en DG loodregt daarop getrokken hebbende, is DG = BC, AG = AB + CD en AD = $\sqrt{(BC^2 + AG^2)}$ eene bekende grootheid. Men stelle dezelve = a en neme voorts aan, dat AE en DF de gezogte evenwijdige lijnen zijn, dan moet de uit A op DF getrokkene loodlijn AF eene gegevene lengte = b hebben. Stelt men nu de onbekende hoek ADF = φ en de *Sin.* 90°. = 1, zoo is AF = a *Sin.* $\varphi = b$; dierhalven is *Sin.* $\varphi = \frac{b}{a}$ bekend; en daar φ en 180° — φ dezelfde sinus hebben, zoo is het tweede antwoord der vraag *Sin.* $(180° - \varphi) = \frac{b}{a}$.

Dit ongemeen eenvoudig Voorstel, hetwelk eigentlijk niets anders is, dan, *uit twee in stand gegevene punten A en D, twee evenwijdige lijnen AE en DF te trekken, welke eenen gegevenen afstand hebben*, heb ik van de Heer HAHN ontleend, (zie zijne *volständige Anleitung zur niedern und höhern Mathematick, Zweiter Band*, §. 795.) met oogmerk, om aan te toonen, hoe noodzakelijk het

het zij, alle de omſtandigheden eens Voorſtels behoorlijk te overwegen, eer men tot de oplosſing van hetzelve overgaat, als men niet op wijdloopige eindvergelijkingen vervallen wil, zoo als het geval is bij die, welke de Heer Hahn van dit Voorſtel gegeven heeft.

Hij neemt namelijk bij zijne ontbinding AH $= x$ als onbekende aan; zoo men nu AB $= a$, BC $= b$, CD $= c$ en de op AE getrokkene loodregte HI $= d$ ſtelt, verkrijgt men, door middel van de gelijkvormigheid der driehoeken AHI en HDG, de ingewikkelde eindvergelijking:

$$x = \frac{-(a+c)d^2}{b^2 - d^2} \pm \sqrt{\left(\frac{(b^2+(a+c)^2)d^2}{b^2 - d^2} + \frac{(a+c)^2 d^4}{(b^2 - d^2)^2}\right)};$$

welke even zoo min voor de berekening, als voor de conſtructie, gunſtig uitgevallen is: ook zegt de ſchrijver zelf, in eene noot, dat de conſtructie zijner eindvergelijking niet te vergelijken zoude zijn, met de eenvoudige meetkundige ontbinding, welke hij van dit Voorſtel er bij gevoegd heeft. Dat eene diergelijke omſtandigheid bij vele algebraiſche oplosſingen plaats heeft, is bekend; dan, dit ſluit geenzins in zich, dat men, door de Algebra, niet even zulke cierlijke en eenvoudige ontbindingen zoude kunnen vinden, als door de Meetkunst; wanneer men ſlechts vooraf den weg konde bepalen, welke men, bij de ontbinding eens Voorſtels, tot dit einde behoorde in te ſlaan.

De hier gegevene oplosſing, moge ter bekrachtiging van dit gevoelen verſtrekken: terwijl de gevondene eindvergelijking, $Sin. \phi = \frac{b}{a}$, de door den Heer Hahn gegevene meetkundige ontbinding zelve in zich beſluit: want, daar deze vergelijking uit de proportie $a : b = 1 : Sin. \phi$ ontſtaan is, welke tot eenen regthoekigen driehoek behoort, van welke AD $= a$ de hijpothenuſa is, heeft men ſlechts op AD, als middellijn, eenen

cir-

cirkel te beſchrijven; van A in den omtrek den gegevenen afſtand AF $= b$ uit te zetten en de lijn FD te trekken, zoo is de hoek AFD regt: trekt men voorts AE evenwijdig met FD, zoo zullen deze beide lijnen het Voorſtel beantwoorden.

Om het tweede antwoord te verkrijgen, make men de hoek AD$f = 180^\circ - \varphi$; verlenge fD tot den omtrek in F′ en trekke AE′ evenwijdig met DF′; zoo zullen deze de evenwijdige lijnen voor het tweede antwoord zijn: want zoo men AD naar d verlengt, is hoek ADF′ $= d$D$f = 180^\circ -$ AD$f = \varphi =$ ADF, en doordien AFD regt is, zijn de driehoeken AF′D en AFD gelijk en gelijkvormig, en dus is AF′ $=$ AF $= b$ de begeerde afſtand der evenwijdige lijnen DF en AE′.

Aanmerking. Bij de voorgaande ontbinding is aangenomen, dat AD vooraf moet berekend worden: dit is echter niet volſtrekt noodzakelijk; want, ſtelt men AG $= a$, BC $=$ DG $= b$ en AF $= d$, zoo is *Tang.* DAG $= \frac{b}{a}$ bekend, en alzoo ook hoek DAG, die ik $= \alpha$ ſtel: diensvolgens is AD $= \frac{DG}{Sin.\ \alpha} = \frac{b}{Sin.\ \alpha}$, en als men, zoo als boven, de onbekende hoek ADF $= \varphi$ aanneemt, is AD $= \frac{AF}{Sin.\ \varphi} = \frac{d}{Sin.\ \varphi} = \frac{b}{Sin.\ \varphi}$; waaruit men $Sin.\ \varphi = \frac{d\ Sin.\ \alpha}{b}$ vindt: eene vergelijking, die gemakkelijk te berekenen is; doch waarvan de conſtructie niet zoo in 't oog valt, als bij de voorgaande ontbinding; ten zij men in dezelve AD voor $\frac{b}{Sin.\ \alpha}$ ſubſtitueere; waardoor men $Sin.\ \varphi = \frac{d}{AD} = \frac{AF}{AD}$ verkrijgt, zoo als hier boven gevonden is. De eerſte dezer vergelijkingen

dient alzoo, om φ zonder AD (welke men, door een quadraat-worteltrekking, vindt,) te berekenen, en de tweede geeft de hier boven opgegevene meetkundige conſtructie.

Men kan ook dadelijk DF, door eene eenvoudige quadraat-worteltrekking, vinden; omdat $DF = \sqrt{(AD^2 - AF^2)} = \sqrt{(BC^2 + AG^2 - AF^2)}$ alleen uit bekende grootheden beſtaat: heeft men dus AD getrokken, zoo kan men, met de gegevene AF en de berekende DF, den regthoekigen driehoek AFD conſtrueren en daarna AE met DF parallel trekken.

Neemt men eene andere grootheid voor onbekende aan, zoo ſchijnt het onvermijdelijk, dat men op eene meer ingewikkelde vergelijking vervallen moet: wij zullen, tot een voorbeeld, den onbekenden hoek $DHG = \varphi$ ſtellen, en voorts de bekende grootheden, in de aanmerking gebruikt, behouden; dan is, in den regthoekigen driehoek DHG, $HG = DG \times Cot.\ \varphi = b\ Cot.\ \varphi$; alzoo $AH = a - b\ Cot.\ \varphi$, en in den regthoekigen driehoek HIA, $AH = \frac{HI}{Sin.\ \varphi} = \frac{AF}{Sin.\ \varphi} = \frac{d}{Sin.\ \varphi}$; dierhalve moet $a - b\ Cot.\ \varphi = \frac{d}{Sin.\ \varphi}$, of $Sin.\ \varphi - \frac{b}{a}\ Cos.\ \varphi = \frac{d}{a}$ zijn. Wanneer men nu $Sin.\ \varphi$ of $Cos.\ \varphi$ zoeken wil, klimt deze vergelijking tot eene volkomene tweede-magts-vergelijking op; dan, wanneer men in dezelve (zie noot op *Bladz.* 83 hier boven,) voor het gebroken $\frac{b}{a}$ aanneemt $Tang.\ \alpha = \frac{Sin.\ \alpha}{Cos.\ \alpha}$; dan verkrijgt men: $Sin.\ \varphi \times Cos.\ \alpha - Sin.\ \alpha \times Cos.\ \varphi = \frac{d\ Cos.\ \alpha}{a} = \frac{d\ Sin.\ \alpha}{b}$: (wijl $a = \frac{b}{Tang.\ \alpha} = \frac{b\ Cos.\ \alpha}{Sin.\ \alpha}$ is,) namelijk

Sin.

$Sin. (\varphi - \alpha) = \frac{d\ Sin.\ \alpha}{b}$ voor den eenen, en $Sin. (180^o - (\varphi - \alpha)) = \frac{d\ Sin.\ \alpha}{b}$ voor den anderen wortel. Daar nu hoek ADH = DHG — DAH = $\varphi - \alpha$ is, zoo is $Sin.$ ADH = $\frac{d\ Sin.\ \alpha}{b} = \frac{AF}{AD}$ de eene; $Sin.$ ADf = $\frac{d\ Sin.\ \alpha}{b}$ de andere wortel; welke vergelijkingen met de eerst gevondene overëénkomen.

Offchoon men langs dezen weg tot het zelfde besluit gekomen is, zoo is zulks echter op eene omflachtiger wijze geschied, en de beginners kunnen hier uit afleiden: dat, hoe zeer men ook door eene der onbekende functien eenes voorstels, tot de ontbinding van hetzelve komen kan, het echter geenzins onverschillig is, welke der onbekenden men het eerste zoeke: daar meerendeels de eene onbekende, op eene veel eenvoudiger wijze, dan de andere, van de bekende grootheden afhangt: eene waarheid, die men niet te veel den beginneren kan aanraden, van in het oog te houden; ook heb ik alleenlijk, om deze reden, dit eenvoudig voorstel opgegeven.

No. 63. Door

U. Huguenin.

Men ftelle, *Fig.* 44. de bekende, of waartenemen hoeken, ADB = α, BDE = β, BED = γ en BEC = δ, en daar de ligging der drie punten A, B en C bekend is, zoo is ook AB = a, BC = b en de hoek ABC = B bekend. Was nu, buiten den reeds bekenden hoek DBE, nog een van de overige hoeken der figuur bekend, zoo zou men de figuur, zonder hulplijnen te trekken, kunnen construeren.

Wij

Wij zullen, tot dit einde, den hoek DAB zoeken en denzelven $= \varphi$ stellen. Onze figuur een vijfhoek zijnde, zoo is de som zijner hoeken DAB + ABC + BCE + CED + EDA $=$ $(2 \times 5 - 4)\, 90^\circ = 6 \times 90^\circ$ of 6 regte hoeken; namelijk $\varphi + B +$ BCE $+ \gamma + \delta + \beta + \alpha = 6 \times 90^\circ$, en dus is BCE $= 6 \times 90^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta + B + \varphi)$; of, indien men het bekende gedeelte van dezen hoek $6 \times 90^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta + B) = \varepsilon$ stelt, zoo is BCE $= \varepsilon - \varphi$.

In den driehoek DAB, heeft men: $Sin.\ \alpha : Sin.\ \varphi = a :$ BD; daarom BD $= \frac{a\ Sin.\ \varphi}{Sin.\ \alpha}$; in den driehoek BEC, heeft men: $Sin.\ \delta : Sin.\ (\varepsilon - \varphi) = b :$ BE; alzoo BE $= \frac{b\ Sin.\ (\varepsilon - \varphi)}{Sin.\ \delta}$, en eindelijk heeft men, in den driehoek DBE: $Sin.\ \gamma : Sin.\ \beta = \frac{a\ Sin.\ \varphi}{Sin.\ \alpha} : \frac{b\ Sin.\ (\varepsilon - \varphi)}{Sin.\ \delta}$; waaruit de vergelijking $a\ Sin.\ \beta\ Sin.\ \delta\ Sin.\ \varphi = b\ Sin.\ \alpha\ Sin.\ \gamma\ Sin.\ (\varepsilon - \varphi)$ ontstaat.

Daar voorts (de $Sin.\ 90^\circ = 1$ stellende, en alles door $Sin.\ \varepsilon\ Sin.\ \varphi$ delende,) deze vergelijking verandert in: $\frac{a\ Sin.\ \beta\ Sin.\ \delta}{Sin.\ \varepsilon} = b\ Sin.\ \alpha$ $Sin.\ \gamma \frac{Cos.\ \varphi}{Sin.\ \varphi} - b\ Sin.\ \alpha\ Sin.\ \gamma \cdot \frac{Cos.\ \varepsilon}{Sin.\ \varepsilon} =$ $b\ Sin.\ \alpha\ Sin.\ \gamma\ Cot.\ \varphi - b\ Sin.\ \alpha\ Sin.\ \gamma\ Cot.\ \varepsilon$, zoo vindt men eindelijk:

$$Cot.\ \varphi = \frac{a\ Sin.\ \beta\ Sin.\ \delta}{b\ Sin.\ \alpha\ Sin.\ \gamma\ Sin.\ \varepsilon} + Cot.\ \varepsilon.$$

Het eerste gedeelte dezer gevondene waarde laat zich gemakkelijk door de logarithmen berekenen; doch, men dient daar bij in 't oog te houden, dat de sinussen, welke in dezelve voorkomen, tot het stelsel van $Sin.\ 90^\circ = 1$ behooren.

Overigens valt op te merken, dat deze waarde negatif wordt, als $\varepsilon = 6 \times 90^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta + B) > 90^\circ$ en $\frac{a \; Sin \; \beta \; Sin. \; \delta}{b \; Sin. \; \alpha \; Sin. \; \gamma \; Sin. \; \varepsilon} < Cot. \; \varepsilon$ is. Wanneer men aldus de hoek φ behoorlijk bepaald heeft, is de hoek $BCE = \varepsilon - \varphi$ bekend en de lijnen BD en BE laten zich door hare reſpective waardijen $\frac{a \, Sin. \, \varphi}{Sin. \, \alpha}$ en $\frac{b \, Sin. \, (\varepsilon - \varphi)}{Sin. \, \delta}$ berekenen.

Om ons voorſtel geometrisch te conſtrueren, beſchrijve men, zie *Fig.* 45. op AB, als baſis, eenen gelijkbeenigen driehoek, wiens tophoek $APB = 2\,\alpha$ is, of, hetwelk op het zelfde uitkomt, waarvan elke hoek aan de baſis $= 90^\circ - \alpha$ is. Uit P als middelpunt beſchrijve men eenen cirkel, welks omtrek door de punten A en B gaat. Even zoo beſchrijve men op BC eenen gelijkbeenigen driehoek, wiens tophoek $BQC = 2\,\delta$ of waarvan elke hoek aan de baſis $= 90^\circ - \delta$ is en, uit het punt Q als middelpunt, beſchrijve men eenen cirkel, welks omtrek door de punten B en C gaat. Vervolgens make men, in den eerſten cirkel, den hoek $BPE' = 2\,\beta$; en, in den tweeden cirkel, den hoek $BQD' = 2\gamma$; (waarbij het ſomtijds kan gebeuren, dat één dezer hoeken verheven of grooter dan 180° wordt). Eindelijk trekke men de regte lijn D'E', zoo zal deze den eerſten cirkel in D, en den tweeden in E ſnijden; welke punten de gezochte ſtandpunten zullen zijn.

Want, als men de lijnen AD, BD, BE en CE trekt, zal volgens eene bekende eigenſchap des cirkels $ADB = \frac{1}{2}\,APB = \alpha$ en BDE' of $BDE = \frac{1}{2}\,BPE' = \beta$ zijn, en in den tweeden cirkel is $BEC = \frac{1}{2}\,BQC = \delta$ en BED of $BED' = \frac{1}{2}\,BQD' = \gamma$; diensvolgens zijn D en E de gezogte ſtandpunten.

Uit

Uit dit voorstel laten zich eenige gevolgen afleiden, welke verdienen opgemerkt te worden.

1°. Naar mate (*Fig.* 44.) het standpunt E de verlenging van de lijn BC nadert, neemt de hoek BEC $= \delta$ af, en wordt $= 0$, als E in de verlenging van BC valt. Hier door verandert onze figuur in den vierhoek ABED, (*Fig.* 46.) waarin alzoo de som der hoeken DAB $+$ B $+ \gamma + \beta + \alpha = 360°$ is, zoo dat men hier door onmiddelijk vindt, DAB of $\phi = 360° - (\alpha + \beta + \gamma + B)$.

Onze formule $Cot.\ \phi = \frac{a\ Sin.\ \beta\ Sin.\ \delta}{b\ Sin.\ \alpha\ Sin.\ \gamma\ Sin.\ \epsilon}$ $+ Cot.\ \epsilon$ wordt dan, in dit geval, overtollig; echter behoort zij des niettegenstaande, aan de reeds gevonde waardij van ϕ te beantwoorden, wanneer men δ en $Sin.\ \delta = 0$ stelt; en dit heeft werkelijk plaats: want, doordien, met $\delta = 0$ te stellen de waarde $\frac{a\,Sin.\ \beta\ Sin.\ \delta}{b\,Sin.\ \alpha\ Sin.\ \gamma\ Sin.\ \epsilon} = 0$ wordt, zoo heeft men $Cot.\ \phi = Cot.\ \epsilon$; doch, bij aldien men hier bij in aanmerking neemt, dat, voor dit geval, de hoek BCE $= \epsilon - \phi = 180°$ of $\phi = \epsilon - 180°$ is, en ϵ en $\epsilon - 180°$ de zelfde *Cotangens* hebben, is het zichtbaar, dat hier $Cot.\ \epsilon$ in $Cot.\ (\epsilon - 180°)$ moet veranderen, of dat men 180° van de primitive waarde van $\epsilon = 6 \times 90 - (\alpha + \beta + \gamma + B)$ moet aftrekken, zoodanig, dat $\epsilon - \phi$ of $6 \times 90° - (\alpha + \beta + \gamma + B) - \phi = 180°$, en alzoo $\phi = 360° - (\alpha + \beta + \gamma + B)$ worden zal: gelijk onmiddelijk uit de figuur is afgeleid geworden.

De lijnen *a* en *b* hebben diensvolgens geen invloed meer op de bepaling van den hoek DAB$=\phi$, en het is zichtbaar, dat de lijn *b*, voor dit geval, eene overtollige gegevene wordt, alzoo zij tot het berekenen der overige lijnen niet meer behoeft gebruikt te worden.

De meetkundige constructie ondergaat, voor

 dit

dit geval, (*Fig.* 47.) ten opzichte van den cirkel, op BC beschreven, (welke hier wegvalt,) mede eenige verandering: want den cirkel op AB zoodanig beschreven hebbende, dat de middelpuntshoek APB $= 2\alpha$ is, make men hoek BPE′ $= 2\beta$; voorts beschrijve men op BE′ eenen gelijkbeenigen driehoek, wiens tophoek BQE′ $= 2\gamma$ is, en uit Q als middelpunt, trekke men, met de straal BQ = QE′, eenen cirkel, welke de verlengde BC ergens in een punt E snijdt; eindelijk trekke men door E en E′ eene regte lijn, welke den omtrek des eersten cirkels in D ontmoeten zal, en dan zullen D en E de gezogte standpunten zijn. Want, volgens deze constructie, is ADB $= \frac{1}{2}$ APB $= \alpha$, BDE′ of BDE $= \frac{1}{2}$ BPE $= \beta$ en BEE′ $= \frac{1}{2}$ BQE′ $= \gamma$.

2o. Wanneer (*Fig.* 48.) het standpunt E aan de overzijde van de verlenging van BC valt, heeft de hoek BEC eene tegengestelde ligging, en alzoo moet dezelve, in vergelijking van den hoek BED, als negatif worden aangemerkt, waarom dan ook $-\delta$ en $-Sin.\ \delta$, voor δ en $Sin.\ \delta$ in de formule behooren gesteld te worden; zoodanig, dat men, voor dit geval, zal hebben:

$$Cot.\ \varphi = -\frac{a\ Sin.\ \beta\ Sin.\ \delta}{b\ Sin.\ \alpha\ Sin.\ \gamma\ Sin\ \varepsilon} + Cot.\ \varepsilon$$

en $\varepsilon = 6 \times 90^\circ - (\alpha + \beta + \gamma - \delta + B)$;

waarbij men echter behoort op te merken, dat door BCE $= \varepsilon - \varphi$ de verheven of inspringende hoek, welke grooter dan 180° is, verstaan moet worden; doordien deze hoek reeds = 180° is, als het punt E in de verlenging van BC valt.

Begeert men den inwendigen hoek BCE in de berekening te brengen, zoo subtrahere men BCE $= \varepsilon - \varphi$ van 360°, waar door de inwendige hoek BCE $= 360^\circ + \varphi - \varepsilon = \varphi + \alpha + \beta + \gamma - \delta + B - 180^\circ$ overblijft; stelt men voorts $\lambda = \alpha + \beta + \gamma - \delta + B - 180^\circ$, zoo is

$\varepsilon =$

$\varepsilon = 6 \times 90^\circ - (180^\circ + \lambda) = 360^\circ - \lambda$; Sin. $\lambda = -$ Sin. ε en Cot. $\lambda = -$ Cot. ε; waardoor onze formule verandert in:

$$Cot.\ \varphi = \frac{a\ Sin.\ \beta\ Sin.\ \delta}{b\ Sin.\ \alpha\ Sin.\ \gamma\ Sin.\ \lambda} - Cot.\ \lambda.$$

De beide alhier gevondene uitdrukkingen laten zich ook onmiddelijk uit de figuur afleiden, hetwelk wij echter, kortheidshalve, hier zullen voorbij gaan.

3°. Wanneer de lijn DE de lijn BC snijdt, dan ondergaat de laatste oplossing geene verandering in de teekens; gaat echter de lijn DE door AB, (*Fig.* 49,) zoo verkrijgen de hoeken BDE $= \beta$ en DEB $= \gamma$, zoo als de hoek BED $= \lambda$ eene tegengestelde ligging, waarom zij dan teyens met hunne sinussen, als negatif moeten worden aangenomen, waardoor dan

$$Cot.\ \varphi = \frac{-\ a\ Sin.\ \beta\ Sin.\ \delta}{b\ Sin.\ \alpha\ Sin.\ \gamma\ Sin.\ \varepsilon} + Cot.\ \varepsilon \text{ en}$$

$$\varepsilon = 6 \times 90^\circ - (\alpha - \beta - \gamma - \delta + B);$$

worden zal; in welke uitdrukking, de verheven hoek BCE, zoo als in het voorgaande geval, onthouden is. Wil men echter den inwendigen hoek BCE, welke kleinder dan 180° is, in de berekening brengen, zoo zal, als men $\lambda = \alpha - \beta - \gamma - \delta + B - 180^\circ$ stelt, gelijk in 't laatste geval,

$$Cot.\ \varphi = \frac{a\ Sin.\ \beta\ Sin.\ \delta}{b\ Sin.\ \alpha\ Sin.\ \gamma\ Sin.\ \lambda} - Cot.\ \lambda \text{ zijn.}$$

Ook deze uitdrukkingen laten zich onmiddelijk uit de figuur afleiden.

De geometrische constructie, voor deze beide gevallen, komt met die voor het eerste geval overeên; echter met deze uitzondering, dat (*Fig.* 50.) de cirkel op BC eene tegengestelde ligging verkrijgt: namelijk dat het centrum Q aan de andere zijde van BC valt; overigens laat zich

de voorgaande conſtructie letterlijk op deze figuur toepasſen.

4°. Wanneer men, in de eerſte gevondene vergelijking van ons voorſtel, $\gamma = \beta$ en alzoo $Sin. \beta = Sin. \gamma$ ſtelt, is ook DB = BE en men heeft $Cot. \phi = \frac{a\ Sin.\ \delta}{b\ Sin.\ \alpha\ Sin.\ \epsilon} + Cot.\ \epsilon$; en $\epsilon = 540° - (\alpha + 2\beta + \delta + B)$.

Neemt men voorts hier bij aan, dat (*Fig.* 51) zich de punten D en E beſtendig naderen, zoo neemt de hoek DBE af, en de hoek $\beta = \gamma$ wordt grooter, tot de eerſte = o en $\gamma = \beta = 90°$ wordt, in welk geval, de punten D en E in elkanderen vallen, doordien BD = BE is; zoo dat men maar een enkeld ſtandpunt hebben zal. Ons voorſtel verandert alzoo hierdoor in het bekende Problema: *Het ſtandpunt te bepalen door de waarneming van de beide hoeken tot drie bekende en in ligging gegevene punten.* (*)

De laatſte gevondene vergelijking van $Cot. \phi$, ondergaat hierdoor in haaren vorm geen verandering, doch hierdoor wordt $\epsilon = 540° - (\alpha + 180° + \delta + B) = 360° - (\alpha + \delta + B)$; en deze waarde zoo als ook de formule van $Cot. \phi$, laat zich onmiddelijk uit de figuur afleiden.

De geometriſche conſtructie (*Fig.* 52.) voor dit geval blijft dezelfde, ten opzichte der op AB en BC te trekkene cirkels; doch daar hier bij de hoeken BPE′ = 2 β en BQD′ = 2 γ ieder = 180° worden, zoo heeft men ſlegts uit B, door de beide middelpunten der cirkels P en Q de diameters BE′ en BD′ te trekken, om de ligging der lijn D′E′ te bekomen; daar echter bij dit geval

(*) Zie de analytiſche oplosſing van dit *Problema*, dat SNELLIUS, in *Erath. Batav.* het eerſte voorgeſteld heeft, bij J. DE GELDER, *Beg. der Meetk.* § 657. Men vindt ook in de *Meetk.* van VAN SWINDEN, eene oplosſing van hetzelve.

val maar een ſtandpunt plaats vindt, zoo moet deze lijn noodzakelijk door het ſnijpunt der beide cirkels gaan; wijl zij anderzins in de omtrekken der beide cirkels twee verſchillende ſtandpunten bepalen zoude. (*)

Ook is het gemakkelijk in te zien: dat deze lijn werkelijk door het gemeene ſnijpunt D der cirkels gaat: want, zoo men BD, D′D en ED′ trekt, ontſtaan hier uit de hoeken BDD′ en BDE′, die ieder, in eenen halven cirkel gelegen zijnde, $= 90^{\circ}$ zijn; waaruit dus volgt, dat BDD′ + BDE′ $= 180^{\circ}$ is, en D′DE′ een regte lijn wezen zal.

Doordien eindelijk het ſnijpunt D der beide cirkels, het begeerde ſtandpunt is, alzoo hierdoor werkelijk ADB $= \frac{1}{2}$ APB $= \alpha$ en BDC $= \frac{1}{2}$ BQC $= \delta$ wordt, zoo is, voor dit geval, de lijn E′D′ overtollig; gelijk zij dan ook in de bekende conſtructie voor dit geval wordt weggelaten; hier echter heeft dezelve gediend, om aan te toonen, dat ook de geometriſche conſtructie voor dit geval, in alle opzichte, een gevolg van ons algemeener voorſtel is.

Aanmerking. Het hier ontbonde voorſtel is ſlegts een gevolg, dat uit een veel algemeener voorſtel kan worden afgeleid, het welke wij, in onze *Mathematiſche Beyträge etc. Königsberg*, 1803, hebben voorgedragen.

Anders, door *J. R. Schmidt, en P. van Eeghen, Chz.*

Wijl de punten A, B en C, *Fig.* 44. in ſtelling gegeven zijn, zoo zijn ook AB, BC en hoek ABC bekend. Wij ſtellen dus AB $= a$, BC $= b$, hoek

(*) Zie ook eene conſtructie van dit Voorſtel, in J de Gelders *Beginſelen der Meetkunst*. § 511.

hoek ABC $= \varepsilon$ en voorts de waargenomene hoeken als volgt: hoek ADB $= \alpha$, hoek BDE $= \beta$, hoek BED $= \gamma$, hoek BEC $= \delta$.

Wanneer de hoeken DAB en ECB bekend waren, zou alles bepaald zijn; daar nu de som der hoeken van den vijfhoek ABCED gelijk aan zes regte hoeken is, zoo is

$$\angle BAD + \angle BCE = 6R - (\angle ADE + \angle DEC + \angle ABC)$$

dat is, in deze vergelijking de boven aangenomene waarden stellende,

$$\angle BAD + \angle BCE = 6R - (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon)$$

De halve som der hoeken is derhalve $3R - \frac{1}{2} \times (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon)$; stellende deze nu kortheidshalve $= p$ en het halve verschil dezer onbekende hoeken $= x$; dan is hoek BCE $= p + x$ en hoek DAB $= p - x$.

Nu hebben wij in den driehoek DAB, $Sin.\ \alpha$: $Sin.\ (p - x) = a$: BD; derhalve BD $= \frac{a\, Sin.\ (p-x)}{Sin.\ \alpha}$ en, in den driehoek BCE, heeft men $Sin.\ \delta : Sin.\ (p + x) = b$: BE, dus BE $= \frac{b\, Sin.\ (p+x)}{Sin.\ \delta}$; maar in den driehoek BDE is $Sin.\ \beta : Sin.\ \gamma =$ BE : BD: brengt men in deze laatste evenredigheid de gevondene waarden van BE en BD; dan komt er:

$$Sin.\ \beta : Sin.\ \gamma = \frac{b\, Sin.\ (p+x)}{Sin.\ \delta} : \frac{a\, Sin.\ (p-x)}{Sin.\ \alpha}$$

dat is $\frac{a\, Sin.\ \beta}{Sin.\ \alpha} \times Sin.\ (p-x) = \frac{b\, Sin.\ \gamma}{Sin.\ \delta} \times Sin.\ (p+x)$

zoo wij nu $Sin.\ (p - x)$ en $Sin.\ (p + x)$ ontwikkelen en alles door $Cos.\ x \times Cos.\ p$ deelen, dan verkrijgen wij:

$$\frac{a\, Sin.\ \beta}{Sin.\ \alpha} \times (Tang.\ p - Tang.\ x) = \frac{b\, Sin.\ \gamma}{Sin.\ \delta} \times$$
$$\ldots\ldots\ldots (Tang.\ p + Tang.\ x)$$

en

en deze oplossende,

$$Tang.\,x = Tang.\,p \times \frac{a\,Sin.\beta \times Sin.\delta - b\,Sin.\gamma \times Sin.\alpha}{a\,Sin.\beta \times Sin.\delta + b\,Sin.\gamma \times Sin.\alpha}$$

waardoor x en al het overige bepaald is.

Om deze laatste formule voor de berekening in Logarithmen geschikt te maken, deelen wij teller en noemer door $a\ Sin.\ \beta \times Sin.\ \delta$; dan verkrijgen wij, na $\frac{b\ Sin.\ \gamma \times Sin.\ \alpha}{a\ Sin.\ \beta \times Sin.\ \delta} = Tang.\ \phi$ (het geen altijd geschieden kan,) gesteld te hebben:

$$Tang.\ x = Tang.\ p \times \frac{1 - Tang.\ \phi}{1 + Tang.\ \phi}$$

dat is, (zie DE GELDER's *Beginf. der Meetk.* § 550. *Bladz.* 203.)

$$Tang.\ x = Tang.\ p \times Tang.\ (45^\circ - \phi)$$

en wij hebben dus, om x in Logarithmen te berekenen:

$$p = 3R - \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon)$$

$$Log.\,Tang.\,\phi = Log.\,b + Log.\,Sin.\,\alpha + Log.\,Sin.\,\gamma - \ldots\ldots [Log.\,a + Log\ Sin.\ \beta + Log.\,Sin.\ \delta]$$

$$Log.\,Tang.\,x = Log.\,Tang.\,p + Log.\,Tang.\,(45^\circ - \phi)$$

CONSTRUCTIE. Het opgegeven voorstel wordt gemakkelijk op de volgende wijze geconstrueerd. Laat, *Fig.* 53, op eene onbepaalde lijn D′E′ de gegevene hoeken β en γ worden geconstrueerd en verder de hoeken α en δ gelijk aan hunne gegevene grootte genomen worden; bij aldien dan A′D′ en C′E′ verlengd worden, tot dat zij elkander in F′ snijden en B′F′ getrokken wordt, zijn hierdoor de hoeken p en q, als mede r en s, bepaald. Zoo wij dan op AB en BC (zie *Fig.* 44,) cirkelsegmenten beschrijven, die de nu bekende hoeken p en q bevatten; dan zal het snijpunt F het punt zijn, waarin de lijnen AD en CE, verlengd zijnde, elkander snijden, en de stand dezer lijnen alzoo bepaald zijnde, vinden wij de punten D en E door den hoek FBD $= s$ en den hoek FBE $= r$ te maken.

NOG ANDERS, door *Jacob de Gelder.*

MEETKUNDIGE OPLOSSING *en* CONSTRUCTIE. Stel, dat alles gevonden zij; omdat dan de punten, A, B en C (*Fig.* 54.) in ſtelling gegeven zijn, zijn de afſtanden AB en BC in grootte gegeven: aangezien nu ook de hoeken ADB en BEC gegeven zijn, zijn ook in grootte en ſtelling gegeven de cirkels, welke, de eerſte door de punten A, B en D, en de tweede door de punten B, C en E gaan: het punt D ligt alzoo in den omtrek van den boog ADB en het punt E in den omtrek van den boog BHE. Het komt er dan op aan, om in de omtrekken dezer bogen, ADHB en BHE, twee punten D en E te vinden, zoodanig, dat de hoeken BDE en BED eene gegevene grootte hebben. Bij aldien men nu aanneemt, dat deze punten bekend zijn; dan zal, indien de lijn DE geene raaklijn aan den boog ADHB is, deze lijn (of derzelver verlengde) dien boog ADHB in eenig punt F ſnijden; maar, aangezien de hoek ADE gegeven is, is ook zijn ſupplement BDF gegeven en de boog BKAF, een gedeelte van den in ſtelling en grootte gegevenen cirkel uitmakende, is benevens de lijn BF, die de koorde van dien boog is, in grootte gegeven: dit zoo zijnde, zal, aangezien de hoek BEF of BED gegeven is, ook in grootte en ſtelling gegeven zijn de cirkel, welke door de punten B, F en E gaat: het punt E ligt alzoo in de doorſnijding der cirkels BHEC en BEF en het punt D in de doorſnijding van de lijn EF met den cirkel ABHDF. — Men beſchrijve dan op AB een cirkel ſegment, houdende den waargenomen hoek ADB; op BC een cirkel-ſegment houdende den waargenomen hoek BEC; men neme, op den omtrek des eerſten cirkels, den boog BAF gelijk aan het dubbeld van het ſupplement van den waargenomen hoek BDE; en beſchrijve op de

lijn

lijn BF een ſegment, houdende den waargenomen hoek FEB. Het punt E, alwaar de omtrek van dit ſegment het ſegment BEC ſnijdt, is dan het eene der begeerde punten: het ander punt D ligt in de ſnijding van de lijn EF met den boog ADB. — De verſcheidenheden welke, naar de gelegenheid der gegevene en gevraagde punten, in de figuur ontſtaan, wijzen zich van zelven.

Stelkundige Oplossing. Aangezien (*Fig.* 44.) de ſtelling der punten, A, B en C gegeven is, kan men ook den geheelen driehoek als bekend aanmerken en het daarvoor houden: dat de zijden AB en BC met den ingeſloten hoek ABC bekend zijn, of ten minſte, uit het geen men van den driehoek ABC weet, berekend kunnen worden. Men ſtelle dan AB $= a$, BC $= b$, hoek ABC $=$ B, de waargenomene hoeken ADB $= \alpha$, BDE $= \beta$, BED $= \gamma$ en BEC $= \delta$, en men merke op: dat bij aldien men de hoeken DAB en ECB (die wij in het vervolg eenvoudig A en C noemen zullen,) bepalen konde, men dan ook, door de gewone regels der Driehoeksmeting, de onbekende afſtanden AD, BD, DE, EC en DE, zou kunnen berekenen.

Om nu deze onbekende hoeken A en C te vinden, heeft men, in den driehoek DEB, de evenredigheden: *Sin.* DBE : *Sin.* BDE $=$ DE : BE, en *Sin.* DBE : *Sin.* DEB $=$ DE : BD; en hieruit vindt men, van onze aangenomene notatie gebruik makende:

$$BE = DE \times \frac{Sin.\ \beta}{Sin.\ (\beta+\gamma)};\ BD = DE \times \frac{Sin.\ \gamma}{Sin.\ (\beta+\gamma)}$$

Voorts geven de driehoeken ABD en BEC de evenredigheden: de eerſte, AB : BD $=$ *Sin.* ADB : *Sin.* A, en de tweede, BC : BE $=$ *Sin.* BEC : *Sin.* C; hieruit vindt men, in ſtelkundige termen;

Sin.

$Sin.A = \frac{DE}{a} \cdot \frac{Sin.\alpha Sin.\gamma}{Sin.(\beta+\gamma)}$ en $Sin.C = \frac{DE}{b} \cdot \frac{Sin.\beta Sin.\delta}{Sin.(\varepsilon+\gamma)}$

Het blijkt hieruit: dat, wanneer de lijn DE bekend ware, de hoeken A en C insgelijks bekend zouden zijn; doch, wanneer men de som der sinussen van de onbekende hoeken A en C tegen derzelver verschil vergelijkt, gaat de onbekende zijde DE weg; want, volgens *Beg.* VII *Stell.* VIII *B.*, is

$$\frac{Sin.\,A + Sin.\,C}{Sin.\,A - Sin.\,C} = \frac{Tang.\,\frac{1}{2}(A+C)}{Tang.\,\frac{1}{2}(A-C)} = \ldots$$

$$\ldots \frac{b\,Sin.\,\alpha \times Sin.\,\gamma + a\,Sin.\,\beta \times Sin.\,\delta}{b\,Sin.\,\alpha \times Sin.\,\gamma - a\,Sin.\,\beta \times Sin.\,\delta}$$

en hieruit volgt dan voor de waarde van *Tang.* $\frac{1}{2}(A - C)$,

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}(A+C) \times \frac{b\,Sin.\,\alpha \times Sin.\,\gamma - a\,Sin.\,\beta \times Sin.\,\delta}{b\,Sin.\,\alpha \times Sin.\,\gamma + a\,Sin.\,\beta \times Sin.\,\delta}$$

Maar nu is $\frac{1}{2}(A+C) = 270^\circ - \frac{1}{2}(B + \alpha + \beta + \gamma + \delta)$; stel dit gelijk M; dan wordt de waarde van *Tang.* $\frac{1}{2}(A - C)$,

$$Tang.\,M \times \frac{b\,Sin.\,\alpha \times Sin.\,\gamma - a\,Sin.\,\beta \times Sin.\,\delta}{b\,Sin.\,\alpha \times Sin.\,\gamma + a\,Sin.\,\beta \times Sin.\,\delta}$$

welke vergelijking indien men $\frac{b\,Sin.\,\alpha \times Sin.\,\gamma}{a\,Sin.\,\beta \times Sin.\,\delta}$ $= Tang.\,\phi$, en voorts bij verkorting $\frac{1}{2}(A - C)$ $=$ N stelt, (zie *Beg. der Meetk.* §. 550. *Bladz.* 203.) de volgende gedaante verkrijgt:

$$Tang.\,N = Tang.\,M \times Tang.\,(\phi - 45^\circ)$$

Het teeken van *Tang.* N hangt, in deze vergelijking, af van de teekens welke *Tang.* M en *Tang.* $(\phi - 45^\circ)$ verkrijgen Nu is M met *Tang.* M te gelijk positief of negatief, naar dat M kleiner of grooter dan 90° is; en *Tang.* $(\phi - 45^\circ)$ is positief of negatief, naar dat ϕ grooter of kleiner is dan 45°; dat is, (aangezien *Tang.* $45^\circ = 1$ is,) naar dat, in het gebroken,

$$\frac{b\,Sin.\,\alpha \times Sin.\,\gamma}{a\,Sin.\,\beta \times Sin.\,\delta}$$

de

de teller $b \times Sin.\ \alpha \times Sin.\ \gamma$ grooter of kleiner dan de noemer $a\ Sin.\ \beta \times Sin.\ \delta$ is; zijnde voor het overige, gelijk bekend is, het teeken van *Tang.* N poſitief of negatief, naar dat de teekens van *Tang.* M en *Tang.* $(\varphi - 45°)$ gelijk of ongelijk zijn.

Zoodra nu N berekend is, is aangezien $M = \frac{1}{2}(A + C)$ is,

$$A = M + N, \text{ en } C = M - N$$

(in welke vergelijkingen op het teeken van N moet gelet worden,) en de onbekende afſtanden worden nu gemakkelijk in ſtelkundige termen uitgedrukt. Men heeft derhalve, om alles te bepalen, het volgende ſtelſel van vergelijkingen:

$$(1) \ldots M = 270° - \tfrac{1}{2} \times (B + \alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

$$(2) \ldots Tang.\ \varphi = \frac{b\ Sin.\ \alpha \times Sin.\ \gamma}{a\ Sin.\ \beta \times Sin.\ \delta}$$

$$(3) \ldots Tang.\ N = Tang.\ M \times Tang.\ (\varphi - 45°)$$

zijnde *Tang.* M poſitief of negatief, naar mate N kleiner of grooter is dan 90°; en *Tang.* $(\varphi - 45°)$ poſitief of negatief, naar mate $b\ Sin.\ \alpha \times Sin.\ \gamma$ grooter of kleiner dan $a\ Sin.\ \beta \times Sin.\ \delta$ is.

$$(4) \ldots A = M + N \textit{ en } C = M - N$$

$$(5)\ AD = \frac{a\ Sin.\ (A + \alpha)}{Sin.\ \alpha};\ (6)\ BD = \frac{a\ Sin.\ A}{Sin.\ \alpha}$$

$$(7)\ CE = \frac{b\ Sin.\ (C + \delta)}{Sin.\ \delta};\ (8)\ BE = \frac{b\ Sin.\ C}{Sin.\ \delta}$$

en eindelijk, de dubbelde vergelijking, welke tevens tot eene verificatie van de geheele berekening in getallen verſtrekken moet,

$$(9)\ DE = BD \times \frac{Sin.\ (\beta + \gamma)}{Sin.\ \gamma} = BE \times \frac{Sin.\ (\beta + \gamma)}{Sin.\ \beta}$$

zijn-

zijnde het volgend voorbeeld, naar deze formulen berekend. (*)

VOORBEELD. *Gegeven zijnde* $a = 4567,^m$ $b = 3998,^m5$; $B = 113°27'30''$, $\alpha = 39°27'20''$ $\delta = 33°55'10''$; $\beta = 65°8'30''$ en $\gamma = 74°49'50''$; *zoo vraagt men, naar de bovengevondene formulen, de onbekende hoeken A en C, benevens de afstanden D en E tot elkander en tot de punten A, B en C te bepalen?*

BEREKENING.

$a = 4567^m$
$b = 3998,5$
$\beta = 113°27'30''$
$\alpha = 39°27'20''$
$\delta = 33°55'10''$
$\beta = 65°\ 8'30''$
$\gamma = 74°49'50''$
} optellen.

326°48'20''
2) ―――――
163°24'10''
270°00'00''
$M = 106°35'50''$

Log. $a = 3,6596310$
Log. $b = 3,6018971$
$M = 106°35'50''$
$N = -5°37'53'',2$
$A = 100°57'56'',8$
$C = 112°13'43'',2$
$A + \alpha = 140°25'16'',8$
$C + \delta = 146°\ 8'53'',2$
$C + \gamma = 139°58'20'',0$

1°. Om

(*) Daar dit voorstel, in het *Landmeten* en de *Geodesie*, van zoo veel belang is, hebben wij het niet onvoegzaam geoordeeld, onze formulen, door een voorbeeld in getallen, opteheIderen: de min bedrevenen doen wel, wanneer zij, naar dit voorbeeld, de twee volgende uitwerken.
I VOORB. Gegeven: $a = 5607,^m3$; $b = 4701,^m7$; $B = 131°50'10''$; $\alpha = 71°40'10''$, $\beta = 69°45'00''$. $\gamma = 75°10'00''$, en $\delta = 59°55'40''$. II VOORB. $a = 7900$ meters; $b = 7350$; $B = 148°43'$; $\alpha = 67°44'$ $\beta = 42°00'$ $\gamma = 83°$ en $\delta = 75°10$. In ons uitgewerkte voorbeeld, hebben wij de Tafels van CALLET gebruikt.

1°. *Om N te vinden.*

$Log.\ a = 3,6596310$
$L.\ Sin.\ \delta = 9,7466550$
$L.\ Sin.\ \beta = 9,9577748$
$3,3640608$
$Log.\ b = 3,6018971$
$L.\ Sin.\ \alpha = 9,8031015$
$L.\ Sin.\ \gamma = 9,9845976$
$3,3895962$
$L.\ Tang.\ \varphi = 0,0255354$
$\varphi = 46^\circ 41' 00'',42$
$\varphi - 45^\circ = + 1^\circ 41' 00'',42$
$L.T.(\varphi - 45^\circ) = 8,4682026 +$
$L.\ Tang.\ M = 0,5256961 -$
$L.\ Tang.\ N = 8,9938987 -$
$N = - 5^\circ 37' 53'',20$

2°. *Om AD te vinden.*

$Log.\ a = 3,6596310$
$L.Sin.(A+\alpha) = 9,8042329$
$C.\ L.\ Sin.\ \alpha = 0,1968985$
$Log.\ AD = 3,6607624$
$AD = 4579,^{m}912$

3°. *Om BD te vinden.*

$Log.\ b = 3,6596310$
$L.\ Sin.\ A = 9,9919969$
$C.\ L.\ Sin.\ \alpha = 0,1968985$
$Log.\ BD = 3,8845264$
$BD = 7055,^{m}478$

3°. *Om CE te vinden.*

$Log.\ b = 3,6018971$
$L.Sin.(C+\delta) = 9,7458926$
$C.\ Log.\ Sin.\ \delta = 0,2533450$
$Log.\ CE = 3,6011347$
$CE = 3991,^{m}486$

4°. *Om BE te vinden.*

$Log.\ b = 3,6018971$
$L.\ Sin.\ C = 9,9664615$
$C.\ L.\ Sin.\ \delta = 0,2533450$
$Log.\ BE = 3,8217036$
$BE = 6632,^{m}903$

5°. *Om DE te vinden.*

$Log.\ BD = 3,8485264$
$L.Sin.(\delta+\gamma) = 9,8083184$
$C.\ L.\ Sin.\ \gamma = 0,0154024$
$Log.\ DE = 3,6722471$
$DE = 4700,^{m}615$

6°. *Verificatie.*

$Log.\ BE = 3,8217036$
$L.Sin.(\beta+\gamma) = 9,8083183$
$C.\ L.\ Sin.\ \delta = 0,0422252$
$Log.\ DE = 3,6722471$
$DE = 4700,^{m}615$

waaruit blijkt, dat alles naauwkeurig bepaald is.

I AANMERKING. Dit werkstuk staat in een naauw verband met het werkstuk van SNELLIUS, waarvan wij, in het IX *Boek onzer Beg.* XII *Vraagst. Bladz.* 257—262, eene oplossing gegeven hebben, welke ons daar ter plaatse op de formulen van DELAMBRE gebragt heeft. En in de daad, wanneer wij aannemen, dat (zie *Fig.* 44,) de punten D en E tot elkander naderen; dan wordt, op het oogenblik, dat de-

ze in elkander vallen, $\beta + \gamma = 180°$; de vergelijking (1), te weten $M = 270° - \frac{1}{2}(B + \alpha + \beta + \gamma + \delta)$, wordt dan $M = 270° - \frac{1}{2}(B + \alpha + \beta) - 90° = 180° - \frac{1}{2}(B + \alpha + \delta)$, dezelfde als *form* (2) *Bladz.* 259 *der Beg.* (wel verstaande, op de verandering van letters na.) Voorts, daar $\beta + \gamma = 180°$ is, is *Sin.* β = *Sin.* γ, en de vergelijking (2) verandert in *Tang.* $\phi = (b$ *Sin.* $\alpha)$: a *Sin.* β, zijnde deze dezelfde als *form* (1) *Bladz.* 259 *der Beginf.* En daar eindelijk *Sin.* $(\beta + \gamma)$ = *Sin.* 180° = 0 is, wordt, in verg. (9), DE = 0, zoo als het ook behoort. Het blijkt dan hieruit: dat, door de onderstelling van $\beta + \gamma = 180°$, of door de vereeniging der punten D en E, het geheele stelsel der boven opgegevene formulen in het stelsel van de formulen voor het werkstuk van Snellius verandert; zijnde dit laatste bij gevolg slechts een bijzonder geval van het meer algemeene van den Heer Huguenin; gelijk dan ook onze hier boven opgegevene meetkunstige constructie, voor het geval, waarin de punten D en E in elkander vallen, verandert in de constructie, welke wij in onze Beginselen (§ 511, XLV Werkstuk) van het werkstuk van Snellius hebben opgegeven.

II Aanmerking. Het bovengevondene stelsel van formulen, dienende ter berekening der onbekenden, is naar de 44e figuur, welke eenen vijfhoek ABCED met uitspringende hoeken oplevert, ingerigt; nu is het klaarblijkelijk, dat de onderlinge stelling der gegevene punten A, B en C, ten opzigte van de punten D en E, welke moeten bepaald worden, op velerlei wijzen veranderen kan, en dat derhalve hieruit ook eene wijziging, in het gebruik en de toepassing van het boven opgegeven stelsel van formulen, echter alleen de teekens der gegevene hoeken rakende, ontstaan zal, waarvan wij kortelijk de voornaamste gevallen zullen aanwijzen.

1°.

1°. Nemen wij, dat de punten A, C, D en E op dezelfde plaats blijven; maar dat het punt B van plaats verandere, en, naar beneden gaande, den hoek B stomper maakt; dan zal, indien eindelijk, de punten A, B en C in eene regte lijn vallen, hoek ABC = 180° worden, en de vergl. (1) van *Bladz.* 141, zal nu in M = 180° — ½ (α + β + γ + δ) veranderen; terwijl nogtans al de overige vergelijkingen onveranderd zullen blijven.

2°. Bij aldien het punt B nog meer naar beneden verplaatst wordt, dan zal de driehoek ABC met zijn toppunt naar beneden vallen, en de vijfhoek ADECβ zal eenen inspringenden hoek B verkrijgen, voor welken nu niet meer den hoek ABC, zoo als hij tot den driehoek ABC, op zich zelven genomen, behoort; maar wel het supplement van dien hoek tot 360°; en, door zulks in acht te nemen, zal het geheele stelsel van formulen, zonder eenige verandering, op dit geval toepasselijk blijven. In het Werkdadige zal men nu gewoonlijk weten, hoe de punten A, B en C, ten opzichte van de lijn DE, gelegen zijn; doch, bij aldien deze ligging onbekend mogte zijn; zoo zou men dadelijk, na de berekening der vier eerste formulen, ontdekken, hoe het hier mede gelegen ware; want, indien A + B + C + α + β + γ + δ niet = 540° bleek te zijn, zou zulks ten kenteeken verstrekken, dat men het punt B aan eene verkeerde zijde van de lijn AC gedacht had.

3°. In de oorspronkelijke 44e figuur, zijn de hoeken α, β, γ en δ als positieve hoeken aangenomen; doch, sommige dezer hoeken kunnen, in bijzondere gevallen, ook negatief worden. Wanneer, bij voorbeeld, het punt E, in *Fig.* 44 nader aan de lijn BC komt, zal de hoek δ bestendig kleiner worden; en hij wordt gelijk nul, wanneer het punt E, gelijk in *Fig.* 46, in het

verlengde van BC valt; maar, wanneer het punt E aan geene zijde van de lijn BC valt, gelijk in *Fig.* 48, dan wordt die hoek negatief; (vergelijk *Beg. der Meetk.* §. 532) en dit negatief worden heeft dan invloed, vooreerst op de vier eerste formulen; want, *formule* (1) wordt nu $M = 270^\circ - \frac{1}{2}(B + \alpha + \beta + \gamma - \delta)$ en daar nu *a Sin.* $\beta \times$ *Sin.* δ negatief wordt, wordt ook (zie *form.* (2)) *Tang.* φ en bijgevolg ook φ negatief; men zou nu voorts met de formule *Tang.* N = *Tang.* M × *Tang.* ($\varphi - 45^\circ$) kunnen verlegen zijn, en in twijfel staan, welken hoek voor N moet aangenomen worden; doch, wanneer men in aanmerking neemt, dat, in *Fig.* 44, de hoek BCE steeds nader aan 180° komt, naar mate het punt E tot het verlengde van de lijn BC nadert en dat de hoek BCE > 180° wordt, zoo dra het punt E aan geene zijde van BC valt, zoo ziet men, dat N natuurlijk negatief moet zijn; dat is, dat men voor eene negatieve tangens van N (zie *Tafel Beginf. Bladz.* 194) de waarde uit de tafel, met die tangens overëénstemmende, negatief nemen moet; doch zoo *Tang.* N positief is, dan zal men, aangezien de tangens van eenen negatieven boog, in het tweede quadraat vallende, positief is, het supplement van den boog, tot *Tang.* N behoorende, negatief moeten nemen; dit alles zal men met meer vrugt inzien, wanneer men, *gegeven zijnde* $a = 950$; $b = 651,3$; $B = 108^\circ 00$; $\alpha = 45^\circ 50'$; $\beta = 50^\circ 10'$; $\gamma = 70^\circ 50'$ en $\delta = -50^\circ 00'$, de waarde van M en N berekent. Men zal vinden: $M = 157^\circ 35'$; $\varphi = -38^\circ 17' 47'',35$; $\varphi - 45^\circ = -83^\circ 17' 47'',35$; nu is *Tang.* M en *Tang.* ($\varphi - 45^\circ$) beide negatief; *Tang.* N is dus positief; men vindt *Log. Tang.* N = 0,5452673; maar men weet, dat N negatief moet zijn (*);

der-

(*) En al wist men dit niet, zou zulks, na de waarden

derhalve moet men, aangezien met deze gevonden *Log. Tang.* in de tafel de hoek $74°5'46''84$ overëénkomt, het supplement van dien hoek, negatief gesteld, voor de waarde van N aannemen; N is alzoo $= - 105°54'13'',16$; en hier door wordt $A = 51°40'46'',84$; $C = 263°29'13'',16$. Ten anderen, heeft de negatieve waarde van δ ook invloed op de formulen (5), (6), (7), (8) en (9). Men vindt $A + \alpha = 97°30'46'',84$; $C + \delta = 213°29'13'',16$; $\beta + \gamma = 121°$; de *Sin.* C welke, in de tafel, met *Sin.* $83°29'13'',16$, en de *Sin.* $(C + \delta)$, welke met *Sin.* $33°29'13'',16$ worden opgezogt, zijn, even als *Sin.* δ, negatief en men vindt $AD = 1313,012$; $BD = 1039,051$; $CE = 469,102$; $BE = 844,724$ en $DE = 1082,6045$; hetwelk ook met eene geteekende figuur, waaruit wij de gegevens genomen hebben, overëénstemt.

4°. Nemen wij nog, dat het punt E (*Fig.* 49.) wel, gelijk in *Fig.* 48, aan geene zijde van BC ligt; maar dat de punten B en C, met betrekking tot de lijn DE, aan de andere zijde van dezelve liggen; wanneer men dan deze figuur met de oorspronkelijke (*Fig.* 44) vergelijkt, ziet men: dat de hoek $BDA = \alpha$, als aan dezelfde zijde van AD liggende, positief is; doch de hoek $BDE = \beta$ is negatief; omdat hij, ten aanzien van *Fig.* 44, aan de andere zijde van BD ligt: de hoek $DEB = \gamma$ is, daar hij, in vergelijking van de oorspronkelijke figuur, aan de andere zijde van BE ligt, negatief, en,

den van A en C bepaald te hebben, uit de vergelijking $A + B + C + \alpha + \beta + \gamma + \delta = 540°$ moeten blijken. In ons voorbeeld behoort tot de positive tangens N de positieve boog $74°5'46'',84$; maar tot dezelve kan ook de negatieve boog $- 105°54'13'',16$ behooren; welke van deze twee waarden nu aan de bijgebragte vergelijking voldoen, deze is de waarde, welke alleen op de bijzondere gesteldheid der figuur passen kan.

en, om dezelfde reden, is hoek BEC negatief; en dáár derhalve b *Sin.* α *Sin.* γ negatief en a *Sin.* β *Sin.* δ positief is, zal *Tang.* φ en $n\varphi$ negatief zijn, en al het overige zal hier maar moeten ingerigt worden. Indien gegeven waren: $a = 782$, $b = 557$; $B = 115^{\circ}30'$; $\alpha = + 70^{\circ}40'$; $\beta = - 10^{\circ}20'$ $\gamma = - 25^{\circ}30'$, $\delta = - 26^{\circ}10'$; dan zou men vinden, $M = 207^{\circ}55'$; $\varphi = - 74^{\circ}42'37'',34$; $\varphi - 45^{\circ} = - 119^{\circ}42'37'',34$; en eindelijk, $N = + 137^{\circ}7'23'',94$; $A = 70^{\circ}47'36'',06$; $C = 345^{\circ}4'23'',94$: hiermede verder de berekening opmakende, vindt men, nagenoeg: AD = 516; BD = 782; CE = 831; BE = 326 en DE = 1064.

5°. Wanneer, *Fig.* 49, de lijn CE, door de verplaatsing van het punt E, nog nader aan BC komt, zal BEC = δ steeds kleiner worden, en, als de lijn CE op BC valt, wordt $\delta = 0$; doch, verder voortdraijende, zal hoek BCE grooter dan 360° worden, of eigenlijk, als in *Fig.* 44, moeten genomen worden; en hoek BEC = δ niettegenstaande BED = γ negatief blijft, zal positief worden.

In alle deze gevallen is hetzelfde stelsel van formulen dienstbaar, om de onbekende hoeken en onbekende zijden te vinden; gelijk ook de fraije formulen van den Heer Huguenin, in alle gevallen, dezelfde algemeenheid hebben.

III Aanmerking. Behalve de oplossingswijzen van de Heeren Huguenin en Schmidt, waarvan de laatste zeer na met de onze overeenstemt, kan dit voorstel ook nog anders worden opgelost.

1°. Wanneer men, *Fig.* 44, de onbekende hoeken ABD en CBE gelijk x en y stelt, dan zal men uit de driehoeken ABD en BCE vinden:

$$BD = \frac{a\ Sin.\ (\alpha + x)}{Sin.\ \alpha} \text{ en } BE = \frac{b\ Sin.\ (\delta + y)}{Sin.\ \delta}$$

en daar, in den driehoek DEB, BD : BE = *Sin.* γ : *Sin.* β is, zal men, na substitutie en herleiding, vinden:

$$\frac{Sin.\,(\alpha + x)}{Sin.\,(\delta + y)} = \frac{b\,Sin.\,\alpha\,Sin.\,\gamma}{a.\,Sin.\,\beta\,Sin.\,\delta}$$

Nu is $x + y = B + \beta + \gamma - 180°$; derhalve $y = B + \beta + \gamma - 180° - x$ en $\delta + y = B + \beta + \gamma + \delta - 180° - x$; stelt men nu $B + \beta + \gamma + \delta - 180° = \mu$ zal de laatste vergelijking veranderen in

$$\frac{Sin.\,(\alpha + x)}{Sin.\,(\mu - x)} = \frac{b\,Sin.\,\alpha\,Sin.\,\gamma}{a\,Sin.\,\beta\,Sin.\,\delta} = Tang.\,\phi$$

hebbende hier *Tang.* ϕ dezelfde waarde, als in de voorgaande oplossing; ontwikkelende nu de waarden van *Sin.* $(\alpha + x)$ en *Sin.* $(\mu - x)$ dan zal men vinden:

$$Tang.\,x = \frac{Tang.\,\phi\,Sin.\,\mu - Sin.\,\alpha}{Tang.\,\phi\,Cos.\,\mu + Cos.\,\alpha}$$

en bijaldien men $B + \alpha + \beta + \gamma - 180° = \nu$ stelt, dan zal men voor *Tang.* y vinden:

$$Tang.\,y = \frac{Tang.\,\phi\,Sin.\,\nu - Sin.\,\delta}{Tang.\,\phi\,Cos.\,\mu + Cos.\,\delta}$$

dan, deze formulen zijn in de berekening in verre na zoo gemakkelijk niet dan die, welke uit de voorgaande oplossingen volgen.

2°. De Heer SCHMIDT heeft, in zijne constructie, ons werkstuk tot dat van SNELLIUS gebragt; stelkundig kan dit insgelijks geschieden. In den vierhoek BDFE, *Fig.* 44, zijn de hoeken BDE = β; BED = γ; EDF = $180° - \alpha - \beta$ en DEF = $180° - \gamma - \delta$ bekend, en nu komt het er op aan, om de hoeken p en q te vinden. Dit is het werkstuk van den Heer BANGMA, zie n°. 55. van dit Deel, *Bladz.* 85. en wanneer men nu de hoeken p en q gevonden heeft, zal men, offschoon langs eenen langeren omweg, de begeerde afstanden vinden.

3°. Wanneer men voor DE een zekeren wille-

keurigen afstand aanneemt, zal men genoeg gegevens hebben, om de zijden der driehoeken DEB, ABD en BCE, door de gewone regels der Driehoeksmeting, te berekenen; doch, daar de berekening der twee laatste driehoeken tot het twijfelachtig geval behooren, zal men die driehoeken moeten nemen, welke 180° — C — γ + ABD + CBE = B maken. Stel nu, dat men, in deze berekening, DE = m genomen hebbe, en dat men AB = a' hebbe gevonden; dan zal men, om de wezenlijke waarde van DE te vinden, moeten stellen, $a' : a = m :$ DE; dat is, DE $= m \times \frac{a}{a'}$. Met het gebroken $\frac{a}{a'}$ moeten derhalve de berekende afstanden DA, DB, EB, EC en DE vermenigvuldigd worden, om daaruit de ware afstanden te vinden.

N°. 64. Door

U. Huguenin.

Zij ABCD *Fig.* 55. het in figuur gegeven onregelmatig vierhoekig veld, hetwelk, door de regte lijn EF, in het bouwland EFCD en in het weiland ABFE gedeeld is. Zij voorts KM de lijn, welke het bouw- en weiland, zoo als ook het vierhoekig veld, in de vereischte verhoudingen verdeelt; dan zal AKLE $= \frac{1}{m}$ABFE, FLMC $= \frac{1}{n}$ EFCD en AKMD $= \frac{1}{p}$ ABCD moeten zijn.

Laat de zijde BA verlengd worden, tot zij de verlengde zijde CD in H ontmoet; voorts verlenge men EF aan beide zijden tot aan de verlengde zijde DC in I, en tot aan de verlengde zijde BA in G.

Daar nu de vierhoek ABCD in figuur en bijge-

gevolg alle zijne deelen, zoo als ook de lijn EF, in groote en rigting gegeven zijn, zoo kan men de lijnen AG, AH, BG, BH, GE, GF, HC, HD, IC, ID, IF, IE en de hoeken BGF en GIH als bekend aanmerken.

Men stelle dan den hoek BGF $= \alpha$, den hoek GIH $= \beta$ en de $Sin.\ 90^o = 1$, zoo is de inhoud des driehoeks KGL $= \frac{1}{2}GK\ .\ GL\ .\ Sin.\ \alpha$; des driehoeks AGE $= \frac{1}{2}AG\ .\ EG\ .\ Sin.\ \alpha$; en des driehoeks BGF $= \frac{1}{2}BG\ .\ GF\ .\ Sin.\ \alpha$; diensvolgens is de inhoud van het weiland ABFE $= \frac{1}{2}(BG\ .\ GF - AG\ .\ EG)\ Sin.\ \alpha$; maar, volgens de voorwaarde van het voorstel, moet

AKLE $= \frac{1}{m}$ ABFE zijn; addeert men hier bij den driehoek AGE $= \frac{1}{2}$ AG . EG . $Sin.\ \alpha$, zoo heeft men driehoek GKL, dat is:

$$\tfrac{1}{2}GK\ .\ GL\ .\ Sin.\ \alpha = \frac{(BG\ .\ GF - AG\ .\ EG)\ Sin.\ \alpha}{2\ m} + \ldots\ldots\ldots\ \tfrac{1}{2}AG\ .\ EG\ Sin.\ \alpha;\ \text{of}$$

$$GK\ .\ GL = \frac{BG\ .\ GF - AG\ .\ EG}{m} + AG\ .\ EG \ldots (1)$$

Op gelijke wijze vindt men:

$$\tfrac{1}{2}IL\ .\ LM\ .\ Sin.\ \beta = \frac{(IE\ .\ ID - IF\ .\ IC)\ Sin.\ \beta}{2\ n} + \ldots\ldots\ldots\ \tfrac{1}{2}IF\ .\ IC\ Sin.\ \beta;\ \text{of}$$

$$IL\ .\ LM = \frac{IE\ .\ ID - IF\ .\ IC}{n} + IF\ .\ IC \ldots (2)$$

Op gelijke wijze, zal men verkrijgen:

$$HK\ .\ HM = \frac{HB\ .\ HC - HA\ .\ HD}{p} + HA\ .\ HD \ldots (3)$$

In elke dezer drie vergelijkingen, is het tweede lid geheel te zamen gesteld uit bekende grootheden; men kan dus derzelver waardijen, uit deze gegevene dadelijk berekenen en alzoo GK . GL $=$ A, IL . IM $=$ B en HK . HM $=$ C als bekend aannemen. Voorts stelle men de bekende afstanden GH $= a$, GI $= b$, IH $= c$, en de onbekende GK $= x$,

 GL

GL $= y$ en IM $= z$, zoo is: HK $= a + x$, IL $= b - y$ en HM $= c - z$. Substitueert men deze waardijen in de drie gevondene vergelijkingen (1), (2) en (3); zoo heeft men: $xy = A$, $(b - y)\,z = B$ en $(a + x)(c - z) = C$; waaruit men vindt:

$$y^2 + \frac{(abc - aB - bC - Ac)}{C - ac}\,y = \frac{AB - bcA}{C - ac};$$

en eindelijk, door deze tweede-magts vergelijking optelossen:

$$y = \frac{aB + bC + Ac - abc}{2\,(C - ac)} \pm \sqrt{\left(\frac{(abc - aB - bC - Ac)^2}{4\,(C - ac)^2} + \frac{AB - bcA}{C - ac}\right)}.$$

I. Aanmerking. Deze, ten aanzien van de wijze, om de oplossing van te vatten en de voorwaarden van het werkstuk in vergelijking te brengen, buiten tegenspraak fraaije oplossing is van den beroemden en welbekenden Lambert, welke dezelve aan den Heer Silberschlag heeft medegedeeld; (zie Lambert's *Gelehrter Briefwechsel, Zweiter Band.* §. 412, XX *Brief*.) dan, behalve dat zij, in dit opzicht, leerzaam is, hebben wij dezelve nog om eene andere reden medegedeeld; omdat zij namelijk een voortreffelijk voorbeeld oplevert van een niet algemeen bekend verschijnsel, dat somtijds in de stelkundige oplossing der Meetkunstige Werkstukken, kan plaats hebben, waardoor, gelijk hier het geval is, de onbekenden, door eene bijzondere en aan den oplosser onbekende eigenschap der figuur, van elkander afhangen, waardoor dan, na dat men even zoo vele vergelijkingen uit de figuur heeft afgeleid, als er onbekenden waren aangenomen, één van deze twee dingen gebeuren kan. 1°. Of dat, door die onbekende eigenschap, (welke natuurlijk eene nieuwe vergelijking geeft,) dit uit de figuur afgeleid stelsel van vergelijkingen tot

een minder aantal gevraagt wordt (*); 2°. of dat, door die nieuwe vergelijking, wanneer zij onafhankelijk is van die, welke uit de figuur zijn afgeleid, ter bepaling der onbekenden, eene vergelijking te veel bestaat, in welk geval ééne der gegevene voorwaarden overtollig wordt en bijgevolg met de overige strijdig worden kan. Dit laatste is nu, in de oplossing van den Heer LAMBERT, het geval, en hierdoor wordt zijne oplossing, hoe konstig en vernuftig ingerigt, bedriegelijk en in de toepassing onbruikbaar.

De reden nu, waarom de Heer LAMBERT zulks niet bemerkt heeft, is gelegen in twee omstandigheden: 1°. dat hij de voorwaarden der vraag niet ernstig genoeg heeft overwogen; 2°. dat de onbekende grootheden x, y en z door eene, in den leeftijd van LAMBERT niet algemeen bekende, eigenschap des driehoeks, van elkander afhangen.

1°. Wanneer de Heer LAMBERT aldus geredeneerd had: het weiland ABFE is, even zoo als het bouwland DCFE, wegens de gegevene figuur des vierhoeks ABCD en de gegevene stelling der lijn EF, in grootte gegeven; stelt men derhalve de inhouden dezer vierhoeken gelijk aan de bekende letters β en γ; dan is AKLE $= \frac{1}{m} \times \beta$ en ELDM $= \frac{n-1}{n} \times \gamma$; daar nu AKMD $= \frac{1}{p} \times$ ABCD zijn moet, is

$$\frac{1}{m} \times \beta + \frac{n-1}{n} \times \gamma = \frac{1}{p} \times (\beta + \gamma)$$

en

(*) Dit is, onder anderen, het geval van het welbekende Problema van ABRAM DE GRAAF, waarvan de Heer DE GELDER, in zijne *Meetk. Anal.* §. 218, *Werkst.* XLIV *Bladz.* 120 *en verv.* het eerst eene oplossing publiek gemaakt heeft.

en hieruit haalt men, de waarde van p afzonderende,

$$p = \frac{mn \times (\beta + \gamma)}{n\beta + m(n - 1)\gamma}.$$

gevolgelijk blijkt hieruit: dat de letter p, door de gegevene grootte der Wei- en Bouw-landen, benevens door de reden-getallen m en n bepaald zijn, en dat bijgevolg de voorwaarde: ,, *en dat* ,, *eindelijk het stuk AKND het pde gedeelte van* ,, *het geheele veld zij*," met de voorgaande voorwaarden strijdig wordt, zoodra p de zoo even uitgebragte waarde niet heeft: — wanneer zeggen wij, de Heer LAMBERT aldus geredeneerd had, zou hij eene overtollige voorwaarde in zijn werkstuk ontdekt hebben.

2°. Maar overtollige voorwaarden loopen niet altijd zoo duidelijk in het oog: zij kunnen, zoo als men ziet, eenen man, zoo schrander en geoefend, als LAMBERT was, ontsnappen: veeltijds ontdekt men dezelve; doch niet altijd. Men heeft gezien, dat LAMBERT tot de drie vergelijkingen $xy = A$; $(b - y) z = B$ en $(a + x) \times (c - z) = C$ gekomen is; hij moest dus natuurlijk denken: dat de oplossing van dit stelsel van vergelijkingen de zaak voldingen zou. Dan de grootheden x, y en z hangen, door eene fraaije eigenschap der figuur, welke aan LAMBERT schijnt onbekend geweest te zijn, of welke hem, onder het uitwerken zijner oplossing, niet voor den geest gekomen is, van elkander af. Wanneer men zich de lijn KM als eene transversale van den driehoek GHI denkt; dan is, volgens DE GELDER's *Begins. der Meetk.* I *Stell.* XIV *Boek*,

$$GK \times HM \times IL = GL \times HK \times IM$$

dat is, naar de, in de oplossing, aangenomene notatie,

$$x(c - z)(b - y) = yz(a + x)$$

en zie daar eene nieuwe vergelijking, welke met de

de drie voorgaanden, $xy = A$; $(b - y)\,z = B$ en $(a + x)\,(c - z) = C$, eene vergelijking meer geeft; dan noodig is, om de onbekenden x, y en z te bepalen.

De vergelijkingen (1), (2) en (3) hangen van m, n en p af, en bijgevolg moet, daar p afhankelijk van m en n is, ééne dezer vergelijkingen, met de twee voorgaanden, strijdig worden, en men kan bijgevolg verwachten, dat, wanneer de grootheden m, n en p naar welgevallen aangenomen worden, de grootheid onder het wortel-teeken onbestaanbaar worden zal, gelijk ook in de daad plaats heeft, indien men, in eene geteekende figuur, de waarde van a, b, c, A, B en C met genoegzame naauwkeurigheid bepaalt en m, n en p naar welgevallen aanneemt.

Wanneer men nu de derde of laatste voorwaarde van het vraagstuk, als onbestaanbaar met de twee eersten verwerpt, dan heeft men het stelsel der vergelijkingen $xy = A$; $(b - y)\,z = B$ en $x\,(c - z)\,(b - y) = yz\,(a + x)$ op te lossen. Uit de twee eersten volgt, $x = A : y$ en $z = B : (b - y)$; substitueert men nu deze waarden van x en z in de derde vergelijking; dan heeft men, na behoorlijke herleiding:

$$y^2 - \frac{2bcA}{Ac - aB} \times y + A \times \frac{b^2c - Bb}{Ac - aB} = 0$$

waaruit derhalve de waarde van y kan gevonden worden; namelijk

$$y = + \frac{bcA}{Ac - aB} \pm \sqrt{\left[A \times \frac{b^2c - Bb}{Ac - aB} + \left(\frac{bcA}{Ac - aB}\right)^2\right]}$$

en deze is de ware oplossing, welke niet meer, met de bedriegelijke van LAMBERT, dat gemeen heeft, dat zij alleen bruikbaar is, voor het geval, dat ABCD een onregelmatigen vierhoek is, en niet, wanneer AB evenwijdig aan CD is; wijl als dan, in de oplossing van LAMBERT, HK en HM $= \infty$ en de vergelijking (3) in $\infty \times \infty = \infty \times \infty$ verandert, eene omstandigheid wel-

welke aan LAMBERT reeds iets onwettigs in zijn redenering had moeten doen vermoeden.

II. AANMERKING. Dit zonderling geval kan ons intusschen leeren: *dat het altijd bedenkelijk is, het getal der onbekenden, in de oplossing van een Meetkunstig Werkstuk, buiten noodzakelijkheid te vermenigvuldigen*, omdat, hoe veel men ook van de eigenschappen eener figuur weten mag, er altijd nog verborgen en onbekende eigenschappen bestaan kunnen, welke ons (gelijk het geval van LAMBERT was,) misleiden kunnen. Had LAMBERT de oplossing anders aangevat, en minder onbekenden gebruikt, dan zou hij, in den loop der oplossing, de overtollige voorwaarde des vraagstuks ontdekt hebben en niet, door eene schijnbare oplossing, zijn misleid geworden. Wij zullen dit kortelijk aantoonen, door de oplossing van onzen vriend, DE GELDER; die onze opmerkzaamheid op dit gewigtig punt gevestigd heeft, mede te deelen.

„Men kan," zegt de Heer DE GELDER, „de oplossing van dit vraagstuk op onderscheidene wijzen aanvatten; doch alle oplossingswijzen brengen niet even gemakkelijk tot eene handelbare eindvergelijking."

„Men merke in *Fig.* 55 op, dat, vermits de lijn EF, met betrekking tot den vierhoek ABCD, in stelling gegeven is, ook de deelen, waarin zij de zijden AD en BC verdeelt, als mede de hoeken, onder welke zij deze zijden snijdt, in grootte gegeven zijn; gelijk dan ook, door constructie of berekening, bekend worden de inhouden van het weiland ABFE en van het bouwland DCFE, welke inhouden wij dus, als bekend zijnde, door de letters M en N zullen uitdrukken. Om nu het vraagstuk op te lossen, moeten er twee dingen bepaald worden: 1°. waar het punt L, op de grenslijn EF, moet genomen worden; 2°. onder-

der

der werken hoek door dit punt L, de lijn KM, moet getrokken worden, op dat het gegeven vierhoekig stuk lands, in de vereischte evenredigheid verdeeld zij."

„Men verlenge de lijnen AD en KM, tot dat zij elkander in Z ontmoeten, en stelle de bekende hoeken ZEL $= \alpha$; ZAK $= \beta$; ADC $= \gamma$; de bekende lijnen AE $= b$ en DE $= c$; de lijn EL $= x$, en den hoek ELZ $= \varphi$; dan zal men de inhouden der vierhoeken AKLE en ELMD, op de volgende wijze, in functien van x, φ, α, β en γ kunnen bepalen."

„In den driehoek ELZ, is $Z = 180^\circ - (\alpha + \varphi)$ en dan zal, uit de bekende evenredigheden, $Sin.\ Z : Sin.\ L = EL : ZE$, en $Sin.\ Z : Sin.\ E = EL : LZ$, volgen:

$$ZE = \frac{x\ Sin.\ \varphi}{Sin.\ (\alpha + \varphi)},\ \text{en}\ ZL = \frac{x\ Sin.\ \alpha}{Sin.\ (\alpha + \varphi)}$$

en, volgens de *Beginf. der Meetk.* X *Stell.* IX *Boek.*

$$Inh.\ driehoek\ ELZ = \tfrac{1}{2}x^2 \times \frac{Sin.\ \alpha\ Sin.\ \varphi}{Sin.\ (\alpha + \varphi)}$$

„In den driehoek AKZ, is hoek AKZ $= 180^\circ - Z - ZAK = 180^\circ - 180^\circ + \alpha + \varphi - \beta = \alpha - \beta + \varphi$, en de zijde AZ $=$ ZE $-$ AE $= \frac{x\ Sin.\ \varphi}{Sin.\ (\alpha + \varphi)} - b$. Men kan dus ook, door de evenredigheid, $Sin.\ AKZ : Sin.\ ZAK = AZ : ZK$, de waarde van ZK vinden:

$$ZK = \frac{Sin.\ \beta}{Sin.\ (\alpha - \beta + \varphi)} \times \left[\frac{x\ Sin.\ \varphi}{Sin.\ (\alpha + \varphi)} - b\right]$$

deze waarde van ZK met die van AZ en $\frac{1}{2}$ *Sin.* Z, of $\frac{1}{2}$ $Sin.\ (\alpha + \varphi)$ vermenigvuldigd hebbende, verkrijgt men, voor den inhoud van den driehoek AKZ,

$$Inh.\ AKZ = \frac{Sin.\ \beta\ Sin.\ (\alpha + \varphi)}{2\ Sin.\ (\alpha - \beta + \varphi)} \times \left[\frac{x\ Sin.\ \varphi}{Sin.\ (\alpha + \varphi)} - b\right]^2$$

en

en wanneer men nu dezen driehoek van den driehoek ELZ aftrekt, zal men den vierhoek AKLE overhouden, en, volgens de eerste voorwaarde der vraag, zal, indien men 2 M : m = μ stelt,

$$x^2 \times \frac{Sin.\ \alpha\ Sin.\ \varphi}{Sin.\ (\alpha + \varphi)} - \frac{Sin.\ \beta\ Sin.\ (\alpha + \varphi)}{Sin.\ (\alpha - \beta + \varphi)} \times$$

$$\ldots\ldots \left[\frac{x\ Sin.\ \varphi}{Sin.\ (\alpha + \varphi)} - b\right]^2 = \mu \ldots (1)$$

zijn. Op dezelfde wijze zal men, door middel der driehoeken DMZ en ELZ, volgens de tweede voorwaarde der vraag, 2 (n — 1) N : n = ν stellende, vinden:

$$\frac{Sin.\ \gamma\ Sin.\ (\alpha + \varphi)}{Sin.\ (\alpha - \gamma + \varphi)} \times \left[\frac{x\ Sin.\ \varphi}{Sin.\ (\alpha + \varphi)} + c\right]^2 -$$

$$\ldots\ldots x^2 \times \frac{Sin.\ \alpha\ Sin.\ \varphi}{Sin.\ (\alpha + \varphi)} = \nu \ldots (2)$$

„ Wij hebben dus twee vergelijkingen, om de onbekenden x en φ te bepalen, en het blijkt hieruit: dat de laatste voorwaarde der vraag niet slechts overtollig is; maar ook tevens, als van de twee eerste afhankelijk zijnde, met dezen strijdig kan zijn.

„ De ontwikkeling der twee uitgebragte vergelijkingen brengt op twee anderen, in elk van welke de onbekenden x en *Cot.* φ in de tweede magt voorkomen, zoo dat de eindvergelijking tot de vierde magt zal opklimmen, en niet, dan met moeite en eene kunstige zet, tot eene vierde magts vergelijking van de tweede magts vorm kan gebragt worden." — Wij verlaten dus deze oplossing, (*) om de volgende van den Heer DE GELDER, welke in de uitvoering veel eenvoudiger en gemakkelijker is, mede te deelen.

„ Om

(*) Welker begin wij hier mededeelen, om de jonge beoefenaars te oefenen, in het vinden van de verschillende gezigtpunten, uit welke een vraagstuk, in de oplossing, kan beschouwd worden, HUGUENIN.

„ Om tot eene gemakkelijker oplossing te komen," vervolgt hij: „ stelle men, *Fig.* 55; GI $= 2h$; GL $= h - x$; LI $= h + x$; GA $= f$, GE $= g$; FI $= k$, CI $= l$: inhoud drieh. GEA $=$ P, inhoud drieh. IFC $=$ Q, welke inhouden, als bekende grootheden, kunnen aangemerkt worden: voorts stelle men hoek BGI $= x$, en hoek GIH $= y$; voorts, als boven, ABFE $=$ M en DCFE $=$ N en eindelijk den onbekenden hoek ELK $= \phi$; dan heeft men, in den driehoek GLK, *Sin.* K : *Sin.* L $=$ GL : GK; en nog, in den driehoek ILM, *Sin.* M : *Sin.* L $=$ IL : IM, dat is, in onze aangenomene notatie,

$$Sin.\ (x + \phi) : Sin.\ \phi = h - x : GK$$
$$Sin.\ (\lambda + \phi) : Sin.\ \phi = h + x : IM$$

de waarden van GK en IM worden dan:

$$GK = \frac{(h - x)\ Sin.\ \phi}{Sin.\ (x + \phi)},\ en\ IM = \frac{(h + x)\ Sin.\ \phi}{Sin.\ (\lambda + \phi)}$$

„ Nu is, volgens het III *Gevolg*, XI *Stell.* IV *Boek* mijner *Beginselen*,

$$GA \times GE : GK \times GL = dr.\ GAE : dr.\ GKL$$

dat is, in onze aangenomene waarden,

$$fg : \frac{(h - x)^2\ Sin.\ \phi}{Sin.\ (x + \phi)} = P : drieh.\ GKL.$$

en wij hebben derhalve, voor den inhoud van den driehoek GKL, de waarde,

$$Inh.\ drieh.\ GKL = \frac{P \times (h - x)^2 \times Sin.\ \phi}{fg \times Sin.\ (x + \phi)}$$

hiervan aftrekkende driehoek GAE $=$ P, blijft er vierhoek AKLE over, en wij hebben derhalve, daar AKLE $= \frac{1}{m}$ ABFE moet zijn, de vergelijking:

$$\frac{P \times (h - x)^2 \times Sin.\ \phi}{fg \times Sin.\ (x + \phi)} - P = \frac{M}{m}$$

L of,

of, alles door P deelende en $\frac{M}{mP} = \mu$ stellende,

$$\frac{(h - x)^2 \times Sin.\ \phi}{fg \times Sin.\ (x + \phi)} - 1 = \mu$$

Wanneer men de uitdrukking $Sin.\ (x + \phi)$ ontwikkelt en de teller en noemer van de breuk, uitmakende den voorsten term van het eerste lid dezer vergelijking, door $Sin.\ \phi$ deelt; dan vindt men, na behoorelijke herleiding,

$$Cot.\ \phi = \frac{(h-x)^2 - (\mu+1) fg\ Cos.\ x}{(\mu + 1) fg\ Sin.\ x} \ldots\ldots (1)$$

„ Wanneer men de driehoeken IFC en ILM, op dezelfde wijze behandelt, (het geen niet noodig is alhier uittewerken,) vindt men, N : nQ $= \nu$ stellende,

$$Cot.\ \phi = \frac{(h+x)^2 - (\nu+1)\ kl\ Cos.\ \lambda}{(\nu + 1)\ kl\ Sin.\ \lambda} \ldots\ldots (2)$$

en zie daar twee vergelijkingen, met welker behulp x zal kunnen bepaald worden.

„ Men stelle kortheidshalve,

$$(\mu+1) fg\ Cos.\ x = p \quad (\mu+1) fg\ Sin.\ x = q$$
$$(\nu+1)\ kl\ Cos.\ \lambda = r \quad (\nu+1)\ kl\ Sin.\ \lambda = s$$

dan geeft de vergelijking van de twee bovenstaande waarden van $Cot.\ \phi$

$$\frac{(h - x)^2 - p}{q} = \frac{(h + x)^2 - r}{s}$$

en deze oplossende (het geen niet moeijelijk is,) vindt men de eindvergelijking:

$$x^2 + \frac{2h(q+s)}{q-s}\, x = - h^2 + \frac{qr - ps}{q - s}$$

en eindelijk

$$x = \frac{-h(q+s) \pm \sqrt{[4h^2 qs + (qr - ps)(q - s)]}}{q - s}$$

„ Deze waarde van x bekend zijnde, zal men den hoek ϕ, door ééne der vergelijkingen (1) of (2), bepalen en alles zal bekend zijn."

„ De tijd laat mij niet toe," vervolgt de Heer

DE

DE GELDER, „ om de fraaije aanmerkingen, waartoe deze oplossing aanleiding geeft, (*) U mede te deelen; ik zal van dezelve gebruik maken voor de Verhandeling, welke ik, in mijne *Meetkundige Analysis*, *Bladz.* 223. beloofd heb, en welke hoofdzakelijk ook zal moeten strekken, om den jongen Beoefenaren eene nieuwe bijdrage te leveren, om hun genie te ontwikkelen. De meeste Liefhebbers vergenoegen zich, wanneer zij eene formule voor de waarden der onbekenden verkregen hebben, zonder zich verder in te laten met de zoo noodige en leerzame discusie der omstandigheden, welke het problema oplevert, het geen nogtans de ware weg is, om eenmaal, in den waren zin van het woord, Wiskunstenaar te worden."

Tot dus verre het uittreksel zijner medegedeelde oplossing. Zonder nu zijne beloofde aanmerkingen te willen vooruitloopen, merken wij aan: dat zij, welke zouden wenschen, dit Werkstuk op getallen toe te passen, met de teekens der grootheden omzigtig moeten te werk gaan.

N°. 65. Door

MOSES LEMANS, *C. J. van Setten*, *F. J. Méan*, *A. van der Swan*, *P. van Eeghen*, *Chs.*, *en Jan Pauw*.

Rigt, op het uiteinde A (*Fig.* 56.) des verschils AB, de loodlijn AD, en verleng AB onbepaald tot in C; deel den hoek DAC midden door door AE; beschrijf uit B, als middelpunt, met de hypothenuse, als radius, eenen cirkelboog, snijdende AE

(*) De oplossing, welke de Heer HUGUENIN op de bedriegelijke van LAMBERT laat volgen, is voor geene minder fijne aanmerkingen vatbaar, DE GELDER.

AE in F, en trek de loodlijn FG; dan is BFG de begeerde driehoek.

Bewijs. In den driehoek AFG is ∠ FAG = 45° (*Constructie*), en dus ∠ AFG = 45°; dus driehoek AFG gelijkbeenig; weshalve AG = FG.

Anders, door *C. J. van Brussel.*

Het opgegeven voorstel, om namelijk, op eene gegevene lijn als hypothenuse, eenen regthoekigen driehoek te beschrijven, waarvan het verschil der regthoekszijden gegeven is, staat met dat, waarin de som der regthoekszijden gegeven is, in zulk een naauw verband, dat de oplossing van het eene die van het andere insluit, zie hier de constructie, welke op de beide voorstellen toepasselijk is:

Laat AC (*Fig.* 57.) de gegevene hypothenuse zijn en op dezelve een cirkel beschreven worden; laat de halve cirkel CDA door D in twee gelijke deelen gedeeld zijn, en uit D, met CD = AD als radius; een andere cirkel CH'AH'' beschreven worden; zoo dan uit A eene koorde AH getrokken wordt, welke gelijk aan de gegevene som of het gegeven verschil der regthoekszijden is, zal deze koorde, of derzelver verlengde, den eersten cirkel ergens snijden in B; trekkende dan BC; dan zal: 1°. de driehoek ACB de begeerde zijn; 2°. de som der regthoekszijden zal gelijk aan de gegevene lijn AH zijn, wanneer AH grooter dan AC is; 3°. het verschil der regthoekszijden zal gelijk de gegevene lijn zijn, wanneer deze kleiner dan AC is.

Bewijs *van het eerste.* Laat CH getrokken worden, dan is, in den regthoekigen driehoek CHB, ∠ CHB + HCB = L; maar ∠ CHB = $\frac{1}{2}$ CDA = $\frac{1}{2}$ L; dus ∠ CHB = ∠ HCB = $\frac{1}{2}$ L, en bijgevolg BC = BH, waaruit dan volgt, dat CB + AB = HB + AB = AH,

de

de fom der regthoekszijden is, dus gelijk aan AH, wanneer △ ABC in den bovenften halven cirkel valt. Eveneens is, in den regthoekigen driehoek CH′B′, ∠ CH′B′ + ∠ H′CB′ = L; maar ∠ CH′B′ = 2 L — ∠ CH′A = ∠ CHA = ½ L; dus ∠ CH′B′ = ∠ H′CB′ = ½ L en bijgevolg CB′ = H′B′, en dus AB′ — CB′ = AB′ — B′H′ = AH′; het verfchil der regthoekszijden is dus gelijk aan de gegevene lijn, wanneer de △ AB′C in den benedenften halven cirkel valt.

Bewijs *van* 2° *en* 3°. Laat AE regthoekig op AC zijn, dan is zij eene raaklijn van den kleinften cirkel; waaruit volgt, dat alle koorden AH, welke binnen den regten hoek CAE vallen, den bovenften halven cirkel CDA, en dat alle koorden AH′ of AH″, welke buiten dezen hoek liggen, verlengd zijnde, den benedenften halven cirkel fnijden; ten tweede is deze lijn AE = AC; want $AC^2 = 2\ AD^2$ zijnde, is AC de zijde van het quadraat in den grooten cirkel befchreven, en daar AE regthoekig op AC is, is AE mede een der zijden van dit quadraat; alle de lijnen, die dus binnen den hoek CAE vallen, zijn grooter dan AC, en alle, die buiten dien hoek vallen, zijn kleiner dan AC; hier uit volgt dan: dat, wanneer de koorde AH grooter dan AC is, zij den bovenften halven cirkel zal fnijden, en dat bijgevolg, volgens het bewijs van het eerfte, in dit geval, de fom der regthoekszijden gelijk AH zal zijn; maar dat het omgekeerde plaats zal hebben, wanneer AH kleiner dan AC is. Het is klaar, dat er, in ieder geval, twee oplosfingen komen; want wij kunnen uit A altoos twee koorden AH en AH° of AH′ en AH″ trekken, welke even lang zijn, en verkrijgen daar door twee driehoeken ABC en AB°C of AB′C en AB″C. Deze twee oplosfingen verfchillen echter alleen in den ftand der driehoeken; want AH = AH° zijnde, is ∠ H°AF = ∠ HAF

en bijgevolg zijn de bogen DB° en DB, waarop deze hoeken ſtaan gelijk; waaruit dan gemakkelijk volgt, dat CB° = AB en AB° = CB is, en dit bewijs is mede ligtelijk toe te pasſen op de driehoeken CBA en CB′A.

Deze twee oplosſingen herleiden zich ſlechts tot ééne, wanneer de gegevene lijn AH = de middellijn AF = AC $\sqrt{2}$ is; want dan verkrijgen wij alleen den driehoek ABC; wanneer dus AH grooter dan AF gegeven ware, zou het voorſtel onmogelijk zijn; AH = AF = AC $\sqrt{2}$ is dus de limiet in grootte voor de ſom der regthoekszijden. Zoo AH op zijn kleinst mogelijk en dus gelijk nul genomen wordt, wordt de lijn AH′B′ tangens van den grooten cirkel en het punt B valt in D′; het verſchil der regthoekszijden is hier nul en de twee limieten voor AH geven dus dezelfde oplosſing. Wanneer AH eindelijk gelijk AC is, valt H in C en de driehoek herleidt zich in dit geval tot de enkele lijn AC. (*)

Nog Anders, door *U. Huguenin*.

In den regthoekigen driehoek ABC (*Fig.* 58.) is de hypothenuſe BC = a, het verſchil der regthoekszijden AC — AB = DC = b bekend. Men ſtelle den onbekenden hoek ACB = ϕ, zoo is, de *Sinus Totus* = 1 zijnde, AB = a *Sin.* ϕ, AC = a *Cos.* ϕ, en a *Cos.* ϕ — a *Sin.* $\phi = b$, of *Cos.* ϕ — *Sin.* $\phi = \frac{b}{a}$. Daar voorts *Cos.* 45° =

Cos.

(*) En hier mede kan men derhalve ook een ander vraagſtuk, door den Heer Mozes Lemans, ter oplosſing ingezonden, *om* namelijk *eenen regthoekigen driehoek te beſchrijven, waarvan de hypothenuſe en de ſom der regthoekszijden gegeven is*, voor opgelost houden. *Prov. Wetenſch. Commisſie.*

$\frac{Cos.\ 45^\circ}{Sin.\ 45^\circ} = 1$ is, zoo is ook $Cos.\ \varphi - \frac{Cos.\ 45^\circ}{Sin.\ 45^\circ} \times Sin.\ \varphi = \frac{b}{a}$, of $Sin.\ 45^\circ \times Cos.\ \varphi - Cos.\ 45^\circ \times Sin.\ \varphi = \frac{b\ Sin.\ 45^\circ}{a}$; dat is $Sin.\ (45^\circ - \varphi) = \frac{b}{a\sqrt{2}}$; waarin φ alleen onbekend is, en gemakkelijk kan worden berekend.

De tweede wortel $Sin.\ (180^\circ - (45^\circ - \varphi))$, of $Sin.\ (135^\circ + \varphi) = \frac{b}{a\sqrt{2}}$, geeft den tegengestelden driehoek Cab : want zoo men den hoek ACb = $135^\circ + \varphi$ maakt, is hoek bCa = $45^\circ - \varphi$: waaruit alzoo twee gelijke, doch tegengestelde driehoeken BAC en baC ontstaan.

Onze vergelijking $Sin.\ (45^\circ - \varphi) = \frac{b}{a\sqrt{2}}$ laat zich ook gemakkelijk construeren. Men rigte, *Fig.* 59, op BC = a de loodlijn BE = BC en trekke CE. Op deze lijn, als diameter, beschrijve men den halven cirkel EBC en stelle voorts, van E naar B, in den omtrek de lijn EF = b uit; vervolgens trekke men CF, en men late uit B op CF de loodlijn BA vallen; dan zal BAC de begeerde driehoek zijn.

Want, zoo men op CE eene willekeurige lengte CG = de eénheid of *Sin. Totus* aanneemt, en uit G op FC de loodlijn GH trekt, heeft men CE : EF = CG : GH; dat is: wijl CE = $\sqrt{2 BC^2} = a\sqrt{2}$ is; $a\sqrt{2} : b = 1 : GH$, of GH $= \frac{b}{a\sqrt{2}} = Sin.\ (45^\circ - \varphi)$; maar BCE = BEC = 45° zijnde, zoo is BCA = $45^\circ - (45^\circ - \varphi) = \varphi$; gevolglijk is AC = BC $\times$ $Cos.\ \varphi = a\ Cos.\ \varphi$ en BA = $a\ Sin.\ \varphi$; waaruit dus volgt, dat AC — BA = $a\ Cos.\ \varphi - a\ Sin.\ \varphi = b$ wezen zal, zoo als vereischt wordt.

 N°. 66,

No. 66. Door

MOZES LEMANS, *A. van der Swan*, *J. C. van Setten*, *Jan Pauw*, *P. van Eeghen*, *Chz.*, en *C. J. van Brussel*.

Stel den ouderdom $= p + q$, de vijfhoekige getallen $\frac{3p^2 - p}{2} = x + 338$ en $\frac{3q^2 - q}{2} = x - 338$; dan is het verschil der cuben $= 6{,}338\,x^2 + 2\,.\,(338)^3$ en de som der getallen $= 2x$, dus

$$12.338\,x^3 + 4\,.\,(338)^3\,x = 6301829048096$$

$$\text{of } 3\,x^3 + 114244\,x - 466111648 = 0$$

$$\tfrac{1}{3} \qquad 3 \qquad 9$$

$$y^3 + 342732\,y - 4195004832 = 0$$

Hieruit is $y = 1542$, dus $x = \frac{1}{3}\,y = 514$, $x + 338 = 852 = a$, en $x - 338 = 176 = b$; voorts $p = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{24a + 1} = 24$ en $q = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{24a + 1} = 11$; dus $p + q = 35$.

No. 67. Door

JAN PAUW, *C. J. van Setten*, *P. van Eeghen*, *Chz.*, *C. J. van Brussel*, *A. van der Swan*, *C. Lantz Jr.*, en *N. Bondt*.

Een gouden dukaat is 210 halve stuiv., een halve dukaton 63, een goud-gulden 56, een gulden 40 en een zesthalf 11 halve stuivers; dus

210,

```
   210, 63, 56, 40, 11
2 ——————————————————————
   105, 63, 28, 20, 11
2 ——————————————————————
   105, 63, 14, 10, 11
2 ——————————————————————
   105, 63,  7,  5, 11
3 ——————————————————————
    35, 21,  7,  5, 11
5 ——————————————————————
     7, 21,  7,  1, 11
7 ——————————————————————
     1,  3,  1,  1, 11
```

derhalve kan hij het huis betalen met 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 7 . 11 = 27720 halve ſtuivers, + 1 zesthalf, zijnde 2521 zesthalf, of 693 guld. $5\frac{1}{4}$ ſtuiv.

N°. 68. Door

JAN PAUW, *P. van Eeghen, Chz., J. C. van Setten, en A. van der Swan.*

```
     Mang.     waard          Mang.     waard
      12   —    10             20   —    18
1/6 … 2    —     2        1/5 … 4   —     4
     ——————————————           ——————————————
      10   —     8             16   —    14
      16   —    14
     ——————————————
      26   —    22 — 39 : komt 33 waardij
 3/4 — 39 — 1/4 is . . . . . . . . 13 in geld
      de waarde van B zijn goed 46 (genoten
```

N°. 69. Door

C. J. van Bruſſel, en C. Lantz Jr.

Stel dat hij van A, x ℔, van B, y ℔, van C, z ℔ en dus van D, $2x$ ℔ koopt; dan koſt

 het

het ℔ van A, $z - y$ guld. en dus x ℔, $xz - xy$ guld., het ℔ van B, x guld. en dus y ℔ xy guld.; het ℔ van C, y guld. en dus z ℔ zy guld., het ℔ van D, z guld. en dus $2x$ ℔ $2xz$ guld., en dus heeft men:

$$3x + y + z = 60 \text{ en } 3xz + zy = 800$$

$$3xz + zy + z^2 = 60z$$

$$\text{dus } z^2 = 60z - 800$$

waaruit $z = 40$ of 20; neemt men nu $z = 20$, dan is $y = 40 - 3x$, waarin $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ en 13 gesteld kan worden, en dus $y = 37, 34, 31, 28, 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4$ en 1, dat is 13 antwoorden. Neemt men $z = 40$, zoo wordt $y = 20 - 3x$, waarin $x = 1, 2, 3, 4, 5$ en 6 zijn kan, dus $y = 17, 14, 11, 8, 5$ en 2; dat is 6 antwoorden; dus in het geheel 19 antwoorden.

N°. 70. Door

P. WOLFF, *C. J. van Brussel*, *A. van der Swan*, *J. C. van Setten*, *C. Lantz Jr*, *Jan Pauw*, *N. Bondt*, *en P. van Eeghen Chz.*

Stel DE (*Fig.* 60), verbeeldende de kleinste toren $= x$, dan is $AC = 280$, $DC = 220$, $AB = x + 45$, en door het Theorema van PYTHAGORAS

$$BC = \sqrt{(AB^2 + AC^2)} = \sqrt{(80425 + 90x + x^2)}$$

$$\text{en } CE = \sqrt{(CD^2 + DE^2)} = \sqrt{(x^2 + 48400)}$$

$$\text{dus } \sqrt{(80425 + 90x + x^2)} = 75 + \sqrt{(x^2 + 48400)}$$

Deze vergelijking in het vierkant brengende, komt

$$80425 + 90x + x^2 = 54025 + x^2 + 150\sqrt{(x^2 + 48400)}$$

of, de gelijksoortige termen vereénigende:

$$26400 + 90x = 150\sqrt{(x^2 + 48400)}$$

$$30)\overline{}$$

$$880 + 3x = 5\sqrt{(x^2 + 48400)}$$

De-

Deze wederom in het vierkant brengende, heeft men:

$$774400 + 5280x + 9x^2 = 25x^2 + 1210000$$

of eindelijk

$$5280x = 16x^2 + 435600$$

$$16)\overline{\quad}$$

$$330x = x^2 + 27225$$

$$x^2 - 330x + 27225 = (x - 165)^2 = 0$$

waaruit $x = 165$ de kleinste,
en $x + 45 = 210$ de hoogste toren.

N°. 71. Door

P. van Eeghen Chz., P. Wolff, *A. van der Swan*, *C. J. van Brussel*, *J. C. van Setten*, *C. Lantz Jr. en N. Bondt.*

Stel dat er waren $7\frac{1}{2} + x$ mannen en $7\frac{1}{2} - x$ vrouwen; dan is, volgens het voorstel,

$$9(7\tfrac{1}{2} + x)^2 + 9(7\tfrac{1}{2} - x)^2 = (7\tfrac{1}{2} + x)^3 + (7\tfrac{1}{2} - x)^3$$

$$\text{of } 9(112\tfrac{1}{2} + 2x^2) = 843\tfrac{3}{4} + 45x^2$$

$$112\tfrac{1}{2} + 2x^2 = 93\tfrac{3}{4} + 5x^2$$

$$18\tfrac{3}{4} = 3x^2$$

$$75 = 12x^2$$

$25 = 4x^2$ dus $x = 2\frac{1}{2}$; derhalve zijn er 10 mannen en 5 vrouwen geweest.

N°. 72. Door

P. van Eeghen, *Chz.*, P. Wolff, *J. C. van Setten*, *C. Lantz Jr.*, *A. van der Swan*, *C. J. van Brussel*, *en N. Bondt.*

Stel dat er waren $8 + x$ mannen en $8 - x$ vrouwen; dan is het legaat geweest $(8 + x)^3 + (8 - x)^3 = 1024 + 48x^2$; nu verdienen al de personen te zamen $(8 + x)^2 + (8 - x)^2 = 128 + 2x^2$ in de week; dus in drie weeken $384 + 6x^2$; hier bij het legaat $1024 + 48x^2$, komt

komt 1408 + $54x^2$ = 1624 en $54x^2$ = 216, dus x^2 = 4, en x = 2; dus 10 mannen en 6 vrouwen.

N°. 73. Door

O. S. BANGMA.

Laat ABCD (*Fig.* 61.) een parallelogram zijn, AC en BD de diagonalen, elkander midden door deelende in Z. Maak AE = BF = DK = CI. Trek EK en FI, loopende evenwijdig AD en BC, en snijdende AC en BD in X, Y, U, en W; dan is

AY : AZ = DX : DZ
maar AY = CW en AZ = CZ
dus CW : CZ = DX : DZ

dus XW en YU trekkende, zullen deze evenwijdig loopen aan AB en DC.

Laten AD en BC door XW en YU gesneden worden, in L, M, H en G, dan heeft men:

AM : AL : AD = AY : AW : AC
= AE : AF : AB

dus ME en LF trekkende, zullen deze evenwijdig loopen aan BD; dus ook IH en KG evenwijdig aan BD; om dezelfde rede LK, MI, EH en FG evenwijdig aan AC.

Laten ME, IH, LK en FG elkander ontmoeten in P, N, Q en O; laten ook LF, KG, MI en EH elkander ontmoeten, in T, R, V en S, dan zijn, uit de beschouwing der driehoeken LPH, MTG en AZB, de lijnen LP, MT en AZ gelijk en evenwijdig, en daar hunne uiteinden L, M en A in eene regte lijn gelegen zijn, liggen de uiteinden P, T en Z ook in eene regte lijn, die evenwijdig aan AD is; dus ook de punten Q, V en Z in eene regte lijn evenwijdig aan BC; derhalve PTZVQ eene regte lijn evenwijdig aan AD of BC. Om dezelfde rede is NRZSO eene reg-

regté lijn evenwijdig aan AB of DC. Als men nu boomen plant in alle punten, die met letters geteekend zijn, heeft men 24 bomen en 20 regels van 4 bomen ieder, te weten: AB, MG, LH, DC, AD, EK, FI, BC, AC, BD, NQ, LF, KG, PO, NP, MI, EH, QO, NO, en QP.

Als nu de punten T en W in eene regte lijn vielen met D en O, zouden ook W en S in eene regte lijn vallen met P en B, S en U met C en Q, U en V met O en A, V en Y met B en N, Y en R met Q en D, R en X met A en P, X en T met N en C, het welk 8 nieuwe regels zoude opleveren; makende, met de 20 reeds gevondene, 28 in het geheel.

Maar op dat TW door het punt D gaan zal moeten de paralellen MI en AC door de punten T en W in dezelfde rede gedeeld zijn, en op dat TW door het punt O gaan zal, moeten de paralellen QP en FI door de punten T en W in dezelfde rede gedeeld zijn.

Doch, wanneer een van deze voorwaarden plaats heeft, zal de andere ook plaats hebben; want, omdat PO evenwijdig NQ is, heeft men:

$$QT : TP = MT : TI$$

en omdat DC evenwijdig AB is, heeft men:

$$FW : WI = AW : WC$$

zoo nu $MT : TI = AW : WC$ is

zal ook $QT : TP = FW : WI$ zijn.

Stel dan $MT : TI = AW : WC$

of $MT : MI = AW : AC$

komt $AZ : AW = AW : AC$

of $\frac{1}{2} AC : AW = AW : AC$

Maar AB is door het punt F in dezelfde rede gedeeld, als AC door het punt W, dus

$$\tfrac{1}{2} AB : AF = AF : AB$$

Maak dan AF midden-evenredig tusschen AB en $\frac{1}{2}$ AB, of, wat op het zelfde uitkomt, maak AF gelijk de halve diagonaal van het vierkant op AB, en beschrijf de figuur, zoo als in de oplos-

sing

ſing gedaan is; dan zullen de 24 boomen 28 regels maken van 4 boomen ieder, naar den eisch van het voorſtel.

AANMERKING. De diagonalen, zijden en paralellen van de beide parallelogrammen ABCD en NQOP, worden alle door de boomen in dezelfde rede gedeeld; want NK : KP = QT : TP = MT : TI = AW : WC = AL : LD = AF : FB enz. Het is dus onverſchillig met welke van deze lijnen men de conſtructie beginnen wil, als men dezelve maar zoodanig deelt, dat het grootſte deel midden-evenredig zij tusſchen de geheele lijn en de halve lijn. Begin dan met de diagonalen NO en PQ, en ſtel dezelve, om de figuur regelmatig te maken, loodregt op elkander; dan wordt PNQO een ruit en ABCD een regthoek, in welk geval de tuin de gedaante verkrijgt van *Fig.* 62.

Maar men kan nog, op eene andere wijze, eene regelmatige figuur verkrijgen, door te maken, dat DNBO een regthoek wordt; dan wordt ook PAQC een regthoek; want NP = MI = YC, dus PC evenwijdig NY; voorts DC = LH = NS, dus CS evenwijdig DN; dus ∠ PCQ = ∠ DNB = regt. Verder DI = ZO = ZD = OI, dus DC = OP (om dat hunne evenmatige deelen DI en OI gelijk zijn); maar ZP = ZC, dus △ DZC = △ OZP, waaruit blijkt, dat de parallelogrammen ABCD en PNQO in dit geval gelijk en gelijkvormig zijn. In dit geval kan men beginnen met den regthoek DNBO te beſchrijven, NO en BD te trekken, NS = $\sqrt{NZ \times NO}$ te maken; voorts △ NEB = △ DIO = △ DZO maken, eindelijk AB = NQ = OP = DC = NS maken, waaruit alle overige punten, door het trekken van lijnen van zelve voortvloeijen.

N°. 74.

N°. 74. Door

J. R. Schmidt, *P. van Eeghen Chz.*, *en Mozes Lemans.*

In de Beginselen der Meetkunde van den Heer J. de Gelder, is, in § 976, aangetoond, dat, stellende de hoogte of dikte BG (*Fig.* 63.) van eenig bolvormig segment gelijk h, en de straal AB van het grondvlak r, de inhoud van dit segment zal zijn $= \frac{1}{2} \pi h (r^2 + \frac{1}{3} h^2)$; π de reden van den omtrek tot de middellijn zijnde.

Stellende nu de middellijn GK van den bol gelijk m; dan is $BK = m - h$, en $AB^2 = BK \times BG$ zijnde, $r^2 = mh - h^2$; brengende dan deze waarde van r^2 in onze formule over; dan verandert dezelve in $\frac{1}{6} \pi h^2 (3m - 2h)$; en deze formule dient nu, om den inhoud van een bolvormig segment te vinden, wanneer deszelfs hoogte, benevens de middellijn van den bol, gegeeven zijn.

Wordt nu verder $h = \frac{m}{n}$ gesteld, dan gaat deze laatste formule in $\frac{1}{6} \pi \frac{m^3}{n^3} (3n - 2)$ over; en hierdoor is nu de inhoud van een bolvormig segment uitgedrukt, door de middellijn van den bol, en de reden tusschen deze middellijn en de hoogte van het segment.

Laat nu, om deze laatste formule op ons voorstel toe te passen, GB, BC, CD, enz., allen even groot ondersteld worden; dan is $GB = h = \frac{m}{n}$; $GC = 2h = \frac{2m}{n}$; $GD = 3h = \frac{3m}{n}$; enz. zijn; zoo wij dan, in de laatste formule, namelijk, in $\frac{1}{6} \pi \frac{m^3}{n^3} (3n - 2)$, voor n bij opvolging stellen, n, $2n$, $3n$, *enz.*; dan zullen wij, voor de

de inhouden der op elkander volgende segmenten verkrijgen:

voor het 1e *segment* . . . $\frac{1}{6}\pi \cdot \frac{m^3}{n^3}(3n - 2)$

2e . . . . $\frac{1}{6}\pi \cdot \frac{m^3}{n^3}(12n - 16)$

3e . . . . $\frac{1}{6}\pi \cdot \frac{m^3}{n^3}(27n - 54)$

4e . . . . $\frac{1}{6}\pi \cdot \frac{m^3}{n^3}(48n - 128)$

en, in het algemeen:

voor het p^e *segment* . . . $\frac{1}{6}\pi \cdot \frac{m^3}{n^3}(3p^2 n - 2p^3)$.

Trekkende nu ieder dezer inhouden van den volgenden af; dan blijft er, voor de inhouden der achtervolgende bolvormige schijven, het eerste segment als de eerste schijf aanmerkende,

voor de 1e *schijf* . . . . $\frac{1}{6}\pi \cdot \frac{m^3}{n^3}(3n - 2)$

2e . . . . $\frac{1}{6}\pi \cdot \frac{m^3}{n^3}(9n - 14)$

3e . . . . $\frac{1}{6}\pi \cdot \frac{m^3}{n^3}(15n - 38)$

4e . . . . $\frac{1}{6}\pi \cdot \frac{m^3}{n^3}(21n - 74)$

enz. en, in het algemeen:

voor de p^e *schijf* . . . . $\frac{1}{6}\pi \cdot \frac{m^3}{n^3}[3(2p - 1)n$

. . . . $- 2(3p^2 - 3p + 1)]$

waaruit dan volgt: dat de inhouden dezer schijven tot elkander in reden zijn, als de getallen, (*a*) $3n - 2$; $9n - 14$; $15n - 38$; $21n - 74$; *enz.* . . . . tot $3(2p - 1)n - 2(3p^2 - 3p + 1)$ waarin n de reden is van de dikte der schijven tot de

de middellijn van den bol, en waardoor dus het voorſtel algemeen is opgelost.

Wil men echter deze betrekking tusſchen de inhouden der achtervolgende bolvormige ſchijven, in de middellijn van den bol, en de dikte der ſchijven hebben uitgedrukt, zoo ſtelle men ſlechts, in de reeks (α), wederom $n = \frac{m}{h}$; en de gevonden reeks zal veranderen in:

(β) $3m - 2h; 9m - 14h; 15m - 38h;$ *enz.* .... tot $3(2p - 1)m - 2(3p^2 - 3p + 1)h$.

Voorbeelden. 1°. Wanneer de bol ſlechts in twee ſchijven van gelijke dikte gedeeld is, moeten deze twee ſchijven, welke, daar zij ieder gelijk aan de helft van den bol zijn, noodzakelijk aan elkander gelijk worden; in dit geval nu is $n = 2$, en de twee eerſte termen van de reeks (α) worden als dan $3 \times 2 - 2$ en $9 \times 2 - 14$, of 4 en 4, welke betrekking de gelijkheid der ſchijven volkomen bevestigd.

2°. Laat de bol in drie ſchijven van gelijke dikte gedeeld zijn; dan is $n = 3$; de drie eerſte termen van de reeks (α) veranderen dan in 7, 13 en 7, 't geen dus de verhouding der deelen is.

3°. Laat $n = 4$ zijn; dan worden de vier eerſte termen der reeks 10, 22, 22 en 10, de ſchijven ſtaan dus in dit geval in reden, als de getallen 5, 11, 11 en 5.

4°. De waarde van n behoeft echter geen geheel getal te zijn. Laat, bij voorbeeld, $m = 10$, en $h = 3$ zijn, dan is $n = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$; de drie eerſte termen worden, in dit geval, 8, 16 en 12; de verhouding der drie ſchijven, welke alzoo, in dit geval, van den bol kunnen worden afgeſneden, is bij gevolg als de getallen 2, 4 en 3.

5°. Laat $n = 30$ zijn, en de betrekking der 7e tot de 19e ſchijf gevraagd worden; dan hebben

ben wij slechts, in de algemeene term van (u), namelijk $3(2p - 1)n - 2(3p^2 - 3p + 1)$; $n = 30$, en p achtervolgens 7 en 19 te stellen, waardoor wij verkrijgen 916 en 1272, en dus staan deze twee schijven tot elkander als de getallen 229 en 318.

Aanmerking. Wij zien, uit deze voorbeelden, en het is ook, uit den aard der zaak onbetwijfelbaar, dat, wanneer n een geheel getal, en dus h een evenmatig deel van de middellijn is, de inhouden der schijven in dezelfde orde moeten afdalen, waarin zij eerst waren opgeklommen; en, in de daad, wij kunnen ook regtstreeks aantoonen: dat, 1°. *Wanneer n een geheel positief getal is, onze reeks $3n - 2$; $9n - 14$, $15n - 38$ enz. tot $3(2p - 1)n - 2(3p^2 - 3p + 1)$, altijd zoo vele positive termen zal hebben, als er éénheden in n zijn; 2°. dat deze n positive termen in dezelfde orde zullen afdalen, waarin zij eerst waren opgeklommen.*

Bewijs *van het eerste.* Stel, in den algemeenen term, $p = n$, dan komt er voor den n^e term $3n - 2$; daar nu n niet kleiner dan één kan zijn, is deze waarde altijd positief.

Maar, stellende $p = n + 1$, komt er voor den $(n + 1)^e$ term der reeks, $-(3n + 2)$, welke waarde, daar n positief is, altijd negatief zal zijn.

Daar dan de n^e term nog positief, maar de $(n + 1)^e$ negatief is, blijkt hieruit: dat, wanneer n een geheel positief getal is, de reeks nooit meer noch minder dan n positieve termen zal hebben.

Bewijs *van het tweede.* Stel, in den algemeenen term, $p = n - q$; dan vinden wij, na herleiding, voor den $(n - q)^e$ term, $3(2q + 1)n - 2(3q^2 + 3q + 1)$, en stelt men, in den algemeenen term, $q + 1$ in plaats van p, komt er eveneens

$3(2q+1)n - 2(3q^2+3q+1)$, waaruit blijkt: dat, wanneer n een geheel getal is, van de n positieve termen der reeks, de $(n-q)^e$ term gelijk de $(1+q)^e$ term zal zijn, en dat alzoo de reeks in dezelfde orde zal afdalen, waarin zij eerst was opgeklommen.

N°. 75. Door

J. R. SCHMIDT, *en P. van Eeghen*, *Chz.*

Laat (*Fig.* 62.) de middellijn AG, wederom gelijk m zijn, ſtel AB $= h$, AB $= x$, AD $= y$, AE $= z$ *enz.*; wanneer dan de ſchijven P, Q, R, S *enz.* allen denzelfden inhoud hebben, zal *ſegment* P $= \frac{1}{2}$ *ſegment* (P + Q) $= \frac{1}{3}$ *ſegment* (P + Q + R) $= \frac{1}{4}$ *ſegment* (P + Q + R + S), *enz.*, zijn; nu hebben wij in het voorgaande voorſtel gevonden:

$$\text{ſegment P} = \tfrac{1}{6}\pi\,(3h^2m - 2h^3)$$
$$\text{ſegment (P+Q)} = \tfrac{1}{6}\pi\,(3x^2m - 2x^3)$$
$$\text{ſegment (P+Q+R)} = \tfrac{1}{6}\pi\,(3y^2m - 2y^3)$$
$$\text{ſegment (P+Q+R+S)} = \tfrac{1}{6}\pi\,(3z^2m - 2z^3),\text{enz.}$$

waardoor wij dan, door aftrekking, de volgende vergelijkingen hebben:

$$\tfrac{1}{6}\pi(3x^2m - 2x^3) = \tfrac{1}{6}\pi.2(3h^2m - 2h^3)$$
$$\tfrac{1}{6}\pi(3y^2m - 2y^3) = \tfrac{1}{6}\pi.3(3h^2m - 2h^3)$$
$$\tfrac{1}{6}\pi(3z^2m - 2z^3) = \tfrac{1}{6}\pi.4(3h^2m - 2h^3),\ \text{enz.}$$

dat is, alles door $\frac{1}{6}\pi$ gedeeld en verder herleid hebbende,

$$2x^3 - 3x^2m + 2(3h^2m - 2h^3) = 0$$
$$2x^3 - 3my^2 + 3(3h^2m - 2h^3) = 0$$
$$2x^3 - 3mz^2 + 4(3h^2m - 2h^3) = 0,\ \text{enz.}$$

en dus, in het algemeen, voor de dikte van het p^e ſegment.

$$2X^3 - 3mX + p(3h^2m - 2h^3) = 0.$$

Door middel van deze derde magts-vergelijkingen nu x, y, z *enz.* gevonden hebbende, is BC

BC $= x - h$; CD $= y - x$; DE $= z - y$ enz. waardoor het begeerde gevonden is.

VOORBEELD. Laat $m = 10$ en $h = 3$ gegeven zijn; dan is $3h^2m - 2h^3 = 216$, en onze vergelijkingen zijn, na dezelve door twee gedeeld te hebben:

$x^3 - 15x^2 + 216 = 0$; $y^3 - 15y^2 + 324 = 0$;
$$z^3 - 15z + 432 = 0,$$
waaruit $x = 4.54$ ten naasten bij; $y = 6$; $z = 7,66$ ten naasten bij, zoo dat de begeerde dikten der schijven, in dit geval, zijn; $h = 3$; $x - h = 1,54$; $y - x = 1,46$; $z - y = 1,66$; en er kunnen, in dit geval, niet meer dan deze vier schijven van gelijken inhoud, van den bol worden afgesneden.

AANMERKING. Wij vinden voor den inhoud van het eerste segment $\frac{1}{6}\pi(3h^2m - 2h^3)$; stellende nu $h = m$; dan verandert dit segment in den inhoud van den geheelen bol, en wij hebben dus voor den inhoud van den geheelen bol $\frac{1}{6}\pi m^3$; het eerste segment is dus in den geheelen bol $\frac{m^3}{3h^2m - 2h^3}$ malen begrepen, en er kunnen dus wanneer de middellijn van den bol m, en dikte van de eerste schijf (welke te gelijker tijd het eerste segment is,) h gegeven is, $\frac{m^3}{3h^2m - 2h^3}$ schijven van gelijken inhoud, worden afgesneden; en in de daad, stellende, in de vergelijking $2X^3 - 3mX + p(3h^2m - 2h^3) = 0$; $p = \frac{m^3}{3h^2m - 2h^3}$; wordt dezelve, $2X^3 - 3mX^2 + m^3 = 0$, waaruit $X = m$.

N°. 76. Door

J. R. Schmidt, *en P. van Eeghen Chz.*

Zoo wij (*Fig.* 62.) de dikte AB der eerste schijf $= h$; en de dikte BC der tweede schijf $= h'$ stellen; dan hebben wij, de middellijn van den bol $= m$ stellende, door de oplossing der twee voorgaande vraagstukken:

$$\textit{segment } P = \tfrac{1}{6}\pi\,(3h^2m - 2h^3)$$

$$\textit{segment } (P+Q) = \tfrac{1}{6}\pi\,(3(h+h')^2\,m - 2\,(h+h')^3)$$

daar nu de inhouden dezer schijven even groot onderfteld worden, is *segment* $(P + Q) = 2$ *segment* P; en bij gevolg:

$$\tfrac{1}{6}\pi\,(3\,(h+h')^2m - 2\,(h'+h)^3) = \tfrac{1}{3}\pi\,(3h^2m - 2h^3)$$

dat is, alles door $\frac{1}{6}\pi$ deelende,

$$3\,(h+h')^2m - 2\,(h+h')^3 = 2\,(3h^2m - 2h^3)$$

waaruit, m afzonderende, volgen zal:

$$m = \frac{2\,[(h+h')^3 - 2h^3]}{3\,[(h+h')^2 - 2h^2]}$$

welke formule de begeerde waarde van de middellijn is.

Aanmerking. De middellijn op deze wijze gevonden zijnde, kunnen door het voorgaande voorstel, wederom de dikte van alle andere schijven, welke eenen gelijken inhoud hebben, bepaald worden.

N°. 77. Door

J. R. Schmidt, *en P. van Eeghen Chz.*

Volgens de oplossing van het 74e Voorstel, staan de inhouden der p^e en q^e schijven van gelijke dikte, tot elkander als $3\,(2p - 1)\,n - 2\,(3p^2 - 3p + 1)$ tot $3\,(2q - 1)\,n - 2\,(3q^3 - 3q + 1)$: daar nu de inhoud van de p^e schijf $= a$ gegeven is, hebben wij, wanneer

wij den inhoud van de q^e schijf $= x$ stellen $a : x = 3(2p - 1)n - 2(3p^2 - 3p + 1) : 3(2q - 1)n - 2(3q^2 - 3q + 1)$ waaruit

$$x = a \times \frac{3(2q - 1)n - 2(3q^2 - 3q + 1)}{3(2p - 1)n - 2(3p^2 - 3p + 1)}$$

voor den inhoud van de q^e schijf.

Zoo wij nu den inhoud van den geheelen bol i stellen en de middellijn m, hebben wij in de *Aanmerking* op het 75e voorstel reeds gevonden, $i = \frac{1}{6}\pi m^3$.

Maar in het 74e voorstel, is, voor den inhoud van de p^e schijf, gevonden $\frac{1}{6}\pi \times \frac{m^3}{n^3}[3(2p-1)n - 2(3p^2 - 3p + 1)]$. Derhalve hebben wij, omdat deze inhoud $= a$ gegeven is,

$$a : i = \frac{1}{6}\pi \cdot \frac{m^3}{n^3}(3(2p-1)n - 2(3p^2 - 3p + 1)) : \frac{1}{6}\pi m^3$$

$$\text{waaruit } i = a \times \frac{n^3}{3(2p-1)n - 2(3p^2 - 3p + 1)};$$

waardoor dan ook de inhoud van den geheelen bol, in onze gegevens is uitgedrukt en alzoo het voorstel is opgelost.

Aanmerking. Wil men ook de middellijn in onze gegevens hebben uitgedrukt, dan hebben wij, in plaats van i deszelfs waarde $\frac{1}{6}\pi m^3$ schrijvende,

$$\frac{1}{6}\pi m^3 = a \times \frac{n^3}{3(2p - 1)n - 2(3p^2 - 3p + 1)}$$

waaruit volgt:

$$m^3 = n^3 \times \frac{6a}{\pi[3(2p - 1)n - 2(3p^2 - 3p + 1)]}$$

en eindelijk:

$$m = n \times \sqrt[3]{\frac{6a}{\pi[3(2p - 1)n - 2(3p^2 - 3p + 1)]}}$$

N°. 78. Door

P. van Eeghen Chz., JACOB DE GELDER, *H. W. Caspari*, *Mozes Lemans*, *A. van der Swan*, *en J. C. van Setten.*

Stel den wortel van het driehoekig getal $= x$, dan is die van het vierkant getal $= x - 2$; de jaren van den ouderdom des bedoelden perſoons worden dan op tweederlei wijze uitgedrukt: eerst door het driehoekig getal $\frac{1}{2}(x^2 + x)$, en daarna nog door het vierkante getal $(x - 2)^2$ of $x^2 - 4x + 4$: en nu is

$$\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x = x^2 - 4x + 4$$

vermenigv. met 2, om de breuken weg te maken,

$$x^2 + x = 2x^2 - 8x + 8$$

$$x^2 - 9x = -8$$

$$x^2 - 9x + (4\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{81}{4} - \tfrac{32}{4} = \tfrac{49}{4}$$

$$x - 4\tfrac{1}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{49}{4}} = \pm 3\tfrac{1}{2}$$

$$x = 4\tfrac{1}{2} \pm 3\tfrac{1}{2} = 8 \text{ of } 1$$

Neemt men den eerſten wortel 8; dan wordt de gevraagde ouderdom $\frac{1}{2}(x^2+x) = \frac{1}{2}(64+8) = \frac{1}{2} \times 72 = 36$ jaren; maar neemt men $x = 1$; dan wordt $\frac{1}{2}(x^2 + x) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$ jaren, welke beide antwoorden even goed aan de voorwaarden der vraag voldoen.

N°. 79. Door

L. van Heusden, JACOB DE GELDER, *J. C. van Setten*, *H. W. Caspari*, *A. van der Swan*, *Mozes Lemans*, *en P. van Eeghen Chz.*

Stel, dat ALEXANDER DE GROOTE x jaren geleefd en y geregeerd hebbe. Vijf jaren vroeger geſtorven zijnde, zou hij $x - 5$ jaren geleefd en $y - 5$ jaren geregeerd hebben; volgens de eerſte voorwaarde der vraag is dan;

$$y - 5 = \tfrac{1}{4}(x - 5)$$

$$\text{of } y = \tfrac{1}{4}(x - 5) + 5$$

Maar negen jaren ouder geworden zijnde, zou hij $x + 9$ jaren oud geworden en $y + 9$ geregeerd hebben, dat is, volgens de tweede voorwaarde,

$$y + 9 = \frac{1}{2}(x + 9)$$
$$\text{of } y = \frac{1}{2}(x + 9) - 9$$

Men heeft, dan om x te vinden,

$$\frac{1}{4}(x - 5) + 5 = \frac{1}{2}(x + 9) - 9$$

vermenigvuldig, om de breuken weg te maken, met vier; dan is:

$$x - 5 + 20 = 2x + 18 - 36$$
$$x - 2x = 18 - 36 + 5 - 20$$

of $-x = -33$ of $x = 33$ ouderdom en $y = \frac{1}{4}(x - 5) + 5 = 12$ het jaar zijner regering.

N°. 80. Door

JACOB DE GELDER, *L. van Heusden*, *J. C. van Setten*, *P. van Eeghen*, *Chz.*, *A. van der Swan*, *H. W. Caspari*, *en Mozes Lemans*.

Stel, dat NEWTON x en HUIGENS y jaren zijn oud geworden: aangezien er dan thans, in A°. 1812, na den dood van NEWTON, even zoo veel jaren verloopen zijn, als hij oud geworden is, zoo is NEWTON geboren in den jare $1812 - 2x$ en gestorven in den jare $1812 - x$.

Maar toen NEWTON geboren werd, was, volgens de opgave der vraag, HUIGENS $\frac{1}{5}(y - 1)$ jaren oud: bijgevolg werd HUIGENS geboren in den jare $1812 - 2x - \frac{1}{5}(y - 1)$, of (na vereeniging der gelijkflachtige deelen,) in den jare $1812\frac{1}{5} - 2x - \frac{1}{5}y$; hier bij y, of zijnen ouderdom, bijtellende, stierf hij in den jare $1812\frac{1}{5} - 2x + \frac{4}{5}y$.

Men schreef derhalve, tien-en-één-half jaar, voor den dood van HUIGENS, het jaar $1812\frac{1}{5} - 10\frac{1}{2} - 2x + \frac{4}{5}y$, of wel $1801\frac{7}{10} - 2x + \frac{4}{5}y$: maar toen was, volgens de vraag, NEWTON

op

op de helft zijner jaren en daar deze in den jare $1812 - 2x$ geboren werd en x jaren is oud geworden, vindt men voor dit jaartal ook de uitdrukking, $1812 - 1\frac{1}{2}x$. Men heeft dan de vergelijking:

$$1801\tfrac{7}{10} - 2x + \tfrac{4}{5}y = 1812 - 1\tfrac{1}{2}x$$

deze met 10 vermenigvuldigd zijnde, is

$$18017 - 20x + 8y = 18120 - 15x$$
$$-20x + 15x + 8y + 18017 - 18120 = 0$$
$$\text{of } 8y - 5x - 103 = 0 \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

De laatste bepalingen van het vraagstuk geven nog eene andere vergelijking. Twee jaren na den dood van NEWTON, schreef men $1812 - x + 2$ of $1814 - x$; en toen waren er, sederd de geboorte van HUIGENS, 100 jaren verloopen: maar HUIGENS werd (zie boven) in den jare $1812\frac{1}{5} - 2x - \frac{1}{5}y$ geboren, en 100 jaren later schreef men gevolgelijk $1912\frac{1}{5} - 2x - \frac{1}{5}y$: men heeft dan de tweede vergelijking:

$$1912\tfrac{1}{5} - 2x - \tfrac{1}{5}y = 1814 - x$$
$$9561 - 10x - y = 9070 - 5x$$
$$-10x + 5x - y + 9561 - 9070 = 0$$
$$-5x - y + 491 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (B)$$

Trek vergelijking (A) van vergelijking (B); dan is

$$-9y + 594 = 0$$
$$y = +\frac{594}{9} = 66 \text{ jaren de}$$

ouderdom van HUIGENS; en

$$x = \frac{491 - y}{5} = \frac{491 - 66}{5} = 85 \text{ jaren de}$$

ouderdom, welke NEWTON, bereikt heeft.
en nu vindt men verder:
$1812\frac{1}{5} - 2x - \frac{1}{5}y = 1629$, het jaar toen HUIGENS geboren werd;
$1812\frac{1}{5} - 2x + \frac{4}{5}y = 1695$ toen hij stierf.
$1812 - 2x = 1812 - 170 = 1642$, het jaar toen NEWTON geboren werd;
en $1812 - x = 1812 - 85 = 1727$, het jaar toen hij stierf.

N°. 81. Door

JACOB DE GELDER, *P. van Eeghen*, *Chz.*, *Mozes Lemans*, *en J. C. van Setten*.

In het metrieke stelsel van Maten en Gewigten, is de liter de inhoud van eenen cubieken decimeter; dat is, de cubus, beschreven op het tiende gedeelte van den meter. Stellen wij de middellijn van de basis van den cilinder, wiens inhoud in liters, veelvouden of deelen van denzelven gegeven is $= x$; de reden van de hoogte tot die middellijn $= b$; dan is de hoogte $= bx$; de reden van den omtrek tot de middellijn eens cirkel $= \pi = 3,14159265$; dan is de omtrek van de basis des cilinders $= \pi x$ en de inhoud van de basis $= \frac{1}{4}\pi x^2$, (zie *Beg.* § 438. *Bladz.* 157 en 158) deze inhoud van de basis met de hoogte bx vermenigvuldigd hebbende, verkrijgt men, (zie *Beg.* III *Stell.* XII *Boek*) voor den inhoud des cilinders, dien wij I stellen:

$$\tfrac{1}{4}\pi b x^3 = I$$

en hieruit volgt dan, door de afzondering van x, in het algemeen:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \textit{Middellijn der basis} & x = \sqrt[3]{\dfrac{4I}{\pi b}} \\ \textit{Hoogte des cilinders} & bx = b\sqrt[3]{\dfrac{4I}{\pi b}} \end{array} \right\}$$

Voor de Vogtmaten, moet, volgens de Wet, de hoogte het dubbeld van de middellijn van de basis zijn; bijgevolg is, in dit geval, $b = 2$ en men heeft voor de berekening van de afmetingen der Vogtmaten; de formulen:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \textit{Middellijn der basis} & x = \sqrt[3]{\dfrac{2I}{\pi}} \\ \textit{Hoogte des cilinders} & 2x = 2\sqrt[3]{\dfrac{2I}{\pi}} \end{array} \right\} . (1)$$

, Voor

Voor de Graanmaten, is de hoogte gelijk aan de middellijn van de basis; bijgevolg is $b = 1$ en men heeft voor de afmetingen van die soort van maten de formule:

$$\textit{Middellijn en hoogte} \;.\;.\; x = \sqrt[3]{\frac{4l}{\pi}} \;.\;.(2)$$

Volgens deze formulen (1) en (2), kunnen nu de afmetingen der Litermaten, zoo in het alleen wettig stelsel, als, in deszelfs nadere modificatie, bepaald worden. Wil men deze afmetingen in millimeters hebben, dan moet ook l in millimeters gegeven zijn.

De liter de cubieke decimeter zijnde, en een decimeter 100 millim. bevattende, is, voor den liter, $l = 100^3 = 1000000$; dus, in Logarithmen werkende, vindt men, voor de afmetingen van den liter, voor de Vogtmaten bestemd. ($2\,l = 2000000$ zijnde,)

$$\begin{aligned} Log.\ 2l &= 6{,}30103000 \\ \text{of } Log.\ \pi &= 0{,}49714987 \\ \hline Log.\ x^3 &= 5{,}80384013 \\ 3) &\overline{} \\ Log.\ x &= 1{,}93462671 \\ x &= 86{,}0254 \ \textit{millm. mid. basis} \\ \text{en } 2x &= 172{,}0508 \ \text{——} \ \textit{hoogte.} \end{aligned}$$

En voor den liter, ten gebruike der drooge waren, ($4\,l = 4000000$ zijnde,)

$$\begin{aligned} Log.\ 4l &= 6{,}60205999 \\ \text{of } Log.\ \pi &= 0{,}49714987 \\ \hline Log.\ x^3 &= 6{,}10491012 \\ 3) &\overline{} \\ Log.\ x &= 2{,}03497004 \\ x &= 108{,}3852 \ \textit{millm. de midd. en hoogte.} \end{aligned}$$

En, op deze wijze, zal men, van den hectoliter tot de milliliter, in de Vogt en Graanmaten, de afmetingen vinden. (zie verder onze *Allereerste Gronden der Cijferkunst*, 1812. I *Deel*, *Bladz.* 177 *en* 178.)

N°. 82.

N°. 82. Door

Jacob de Gelder, *P. van Eeghen Chz.*, *Mozes Lemans*, en *J. C. van Setten.*

Stel de hoogte van den afgeknotten kegel $= 3x$; dan is, volgens de vraag, de middellijn van den bodem $= 2x$ en (omdat de middellijn van den bodem tot dien van het bovenvlak moet ftaan als 3 tot 2,) zal, daar $3 : 2 = 2x : 1\frac{1}{3}x$ is, de middellijn van het bovenvlak $= 1\frac{1}{3}x$ zijn. Stellende dan $\pi = 3,14159265$; dan zal, volgens de *Beginfelen*, § 438, *Bladz.* 157 en 158,

∴ De inhoud van den bodem $= 2\pi x \times \frac{1}{2}x = \pi x^2$.

∴ De inhoud van het bovenvlak $= 1\frac{1}{3}\pi x \times \frac{1}{3}x = \frac{4}{9}\pi x^2$;

. En de inhoud van een vlak, dat midden evenredig is tusfchen het grond en het bovenvlak $= \sqrt{(\pi x^2 \times \frac{4}{9}\pi x^2)} = \frac{2}{3}\pi x^2$.

Volgens de *Beginfelen* (VII *Stell.* XII *Boek*) is, de inhoud van den afgeknotten kegel $= I$ ftellende:

$$[\pi x^2 + \frac{4}{9}\pi x^2 + \frac{2}{3}\pi x^2] \times x = \frac{19}{9}\pi x^3 = I.$$

waaruit (aangezien $I = 1000000$ cubieke millimeters is,) volgt:

$$x = \sqrt[3]{\frac{9I}{19\pi}} = \sqrt[3]{\frac{9000000}{19\pi}}$$

welke waarde van x, door Logarithmen, aldus gevonden wordt:

Log. 9000000	=	6,95424251
Compl. Log. 19	=	8,72124640
Compl. Log. π	=	9,50285013
Log. x^3	=	5,17833904
3)		
Log. x	=	1,72611301
derhalve x	=	53,22467 *millim.*
de hoogte $3x$	=	159,67408 ——
middell. bod. $2x$	=	106,44934 ——
midd. bovv. $1\frac{1}{3}x$	=	70,96623 ——

N°. 83.

N°. 83. Door

P. VAN EEGHEN, CHZ.

Om te beoordeelen, of de functie eener veranderlijke grootheid eene grootste of kleinste waarde verkrijgt, moet, $y = \phi \,.\, x$ zijnde, de vergelijking $\frac{d\,.\;.\,x}{dx} = \frac{dy}{dx} = 0$ worden opgelost; indien dan de waarde van x, welke uit die oplossing volgt, de uitdrukking $\frac{ddy}{dx^2}$ negatief maakt, dan maakt die waarde van x de gegevene functie tot een *maximum* of grootste; doch, wanneer zij dezelve uitdrukking positief maakt, maakt die waarde de gegevene functie tot een *minimum* of kleinste. Stellen wij dan $y = \frac{x}{1 + x^2}$; dan heeft men:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = 0$$

en hieruit volgt dan voor x twee waarden; namelijk $x = +1$ en $x = -1$. Nu is

$$\frac{ddy}{dx^2} = - \frac{2x\,(1 + x^2) + 4x\,(1 - x^2)}{(1 + x^2)^3}$$

substitueert men nu, in deze laatste uitdrukking, $x = 1$; dan wordt $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$ negatief, en $x = 1$ maakt daarom de gegevene functie $\frac{x}{1 + x^2}$ tot eene grootste; maar substitueert men, in dezelfde uitdrukking, $x = -1$; dan wordt $\frac{ddy}{dx^2} = +\frac{1}{2}$ en $x = 1$ maakt de gegevene functie tot eene kleinste.

N°. 84.

N°. 84. Door

P. VAN EEGHEN, CHZ.

Zij $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$; dan is $\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0$; of $x^2 - 4x + 3 = 0$. Deze vergelijking oplossende, vindt men : $x = 3$ en $x = 1$. Deze waarden substitueere men in

$$\frac{ddy}{dx^2} = 20x^3 - 60x^2 + 30x$$

dan wordt, voor $x = 3$, $\frac{ddy}{dx^2} = +90$; en voor $x = 1$, wordt $\frac{ddy}{dx^2} = -10$; derhalve maakt $x = 3$ de gegevene functie tot eene kleinste en $x = 1$ tot eene grootste.

N°. 85. Door

A. VAN DER SWAN, *L. van Heusden*, *J. C. van Setten*, *H. W. Caspart*, *Mozes Lemans*, en *P. van Eeghen Chz.*

Stel het tweede getal x; dan is het eerste $2x$; laat y het getal zijn, waarvan in de derde plaats gesproken wordt; dan moet men hebben $2x - y = x + y$ en ook $x + y = y^2$; door de eerste vergelijking heeft men terstond $x = 2y$, en deze waarde van x in de tweede vergelijking stellende, komt $3y = y^2$; dus $y = 3$, dus $x = 6$ en $2x = 12$.

N°. 86.

N°. 86. Door

A. VAN DER SWAN, *J. C. van Setten*, *P. van Eeghen*, *Chz.*, *H. W. Caspari*, *Mozes Lemans*, *en L. van Heusden.*

Stel het getal $= x$; dan moet $(x^2 - 29) \times (x^2 + 1) = 511000$ zijn; waaruit volgt, $x^4 - 28 x^2 = 511029$; ter wederzijden 196 bijtellende, komt $(x^2 - 14)^2 = 511225$, en den wortel trekkende, $x^2 - 14 = 715$; dus $x^2 = 729$, waarvan de vierkants wortel is $x = 27$.

N°. 87. Door

A. VAN DER SWAN, *Mozes Lemans*, *J. C. van Setten*, *H. W. Caspari*, *P. van Eeghen*, *Chz.*, *en L. van Heusden.*

Stel het getal der kooplieden x; dan is ieders inleg $125x$, en dus het geheele kapitaal $125x^2$, waarmede gewonnen wordt x ten 100; dus is de geheele winst $\frac{125x^3}{100}$; deze nu moet ſtaan tot het kapitaal, als 1 tot 25; derhalve $\frac{125x^3}{100} \times 25 = 125x^2$; waaruit volgt, $\frac{25x}{100} = 1$, of $25x = 100$; dus $x = 4$.

N°. 88 (*) Door

Jacob de Gelder, L. VAN HEUSDEN, *en P. van Eeghen*, *Chz.*

De oplosſing der vraagſtukken, tot de onbepaal-

(*) Dit is ook N°. 328 van HALKENS, *Arithmetisch Zin-*

paalde Analysis van DIOPHANTUS betrekking hebbende, is meestal met vele moeijelijkheden vergezeld, niet zoo zeer daarin bestaande, om getallen te vinden, welke aan de voorwaarden van eenig vraagstuk voldoen, als wel om de oplossing daar henen te rigten, dat de gevondene getallen aan geen meer voorwaarden voldoen, dan in het voorstel volstrekt opgegeven worden. Immers, wanneer men overtollige voorwaarden niet heeft weten te vermijden, mag men niet verwagten, dat de oplossing de eenvoudigste zal worden en dat de gevondene getallen de kleinste zullen zijn, welke op de eigenlijk gestelde voorwaarden der vraag zullen passen; ja ook, wanneer men de algemeenste en meest regtstreeksche wijze van oplossen gevolgd heeft, kan men, in zeer vele gevallen, zelfs niet eens verzekeren, dat men niet, langs eenen geschikteren en nog niet bekenden weg, kleiner getallen zou verkregen hebben: de trapswijze voortgang der oplossing, de wijze, waarop men dezelve ten uitvoer brengt, elke omstandigheid heeft hierin haren eigenen invloed, wiens daarzijn gemakkelijker gevoeld wordt, dan het mogelijk is, om deszelfs uitwerksel, in alle gevallen te voorzien en te bepalen.

De uitkomst der eerste oplossing van OZANAM (zie de aangehaalde plaats in de noot,) komt naauwelijks in aanmerking; hij neemt drie getallen a, b en c aan, de eigenschap hebbende, dat de verschillen van twee van dezelve, op alle mogelijke wijzen genomen, volkomen vierkante getallen

Zinnen-Confect, Bladz. 379, hetwelk hij zegt, hem, door JOACHIM MICHIEL BRAND te *Staden*, te zijn voorgesteld. PANSER heeft er, in zijne *Mathematische Rariteit-kamer*, onder N°. 95, Bladz. 310 eene oplossing van gegeven. Het komt ook voor, bij OZANAM, *Nouveaux Elémens d'Algèbre*, 1702. II *Partie*, *Pag.* 662. DE GELDER.

len zijn, en het vierde getal $= x$ gesteld hebbende, moeten de getallen $a - x$, $b - x$ en $c - x$ tot volkomen vierkante getallen gemaakt worden; doch, dit zoo zijnde, dan moet ook derzelver product,

$$abc - (ab + ac + bc)x + (a + b + c)x^2 - x^3$$

noodwendig een volkomen vierkant getal zijn.

Ozanam stelt den wortel uit dit vierkante getal gelijk aan de uitdrukking:

$$\sqrt{abc} - \frac{abx + acx + bcx}{2\sqrt{abc}} \ldots\ldots (\omega)$$

en vindt, na het vierkant dezer uitdrukking aan het gezegde product gelijk gesteld te hebben,

$$x = \frac{2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2}{4\,abc}$$

waaruit hij dan besluit: dat, in geheelen, de vier gevraagde getallen zullen zijn:

het 1e . . . . $4a^2bc$
het 2e . . . . $4ab^2c$
het 3e . . . . $4abc^2$
het 4e . . $2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2$

mits, dat (zoo als gezegd is,) *voor a, b en c geheele getallen genomen worden, welker verschillen niet slechts volkomen vierkanten zijn; maar welker product daarenboven*, (gelijk uit de uitdrukking (ω) blijkt,) *een volkomen vierkant zij.* Nu neemt hij, voor de getallen a, b en c, de vierkanten der getallen 1873432, 2399057 en 2288168, (getrokken uit zijne *Dictionnaire de Mathématiques*,) welker sommen en verschillen, twee aan twee genomen, volkomen vierkanten zijn, (*) en vindt, langs dien weg, vier getallen, wel-

(*) Want, wanneer men drie getallen x, y en z zoodanig aanneemt, dat $x + y$, $x - y$, $x + z$, $x - z$, $y + z$ en $y - z$ volkomen vierkante getallen zijn, dan zijn ook $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$, $(x + z)$ $(x -$

welke uit niet minder dan uit *zeven of drie en veertig* cijfers bestaan, vermeenende, dat er langs dien weg geen kleinere getallen zouden te vinden zijn.

OZANAM heeft, in zijne *Diction. Math.* pag. 90 et 91, in den jare 1691 uitgegeven, van dit vraagstuk eene andere oplossing gegeven, op welke hij zich in zijne *Nouv. Elém. d'Algèbre* verder beroept. Zie hier, waarop deze oplossing nederkomt.

Wanneer men zich drie getallen u, v en w voorstelt, de eigenschap hebbende, *dat de som en het verschil van twee van dezelve, op alle mogelijke wijzen genomen, volkomen vierkante getallen zijn;* dan is hun som $u + v + w$ een vierde getal, hetwelk, met de drie eerstgestelde, u, v en w aan den eisch der vraag zal voldoen; want $u + v = \alpha^2$, $u - v = \beta^2$, $u + w = \gamma^2$, $u - w = \delta^2$; $v + w = \epsilon^2$ en $v - w = \zeta^2$ stellende; dan zal $(u + v + w) - u = \epsilon^2$, $(u + v + w) - v = \gamma^2$, $(u + v + w) - w = \alpha^2$; $u - v = \beta^2$, $u - w = \delta^2$ en $v - w = \zeta^2$ moeten zijn.

Stellen wij dan, met den Heer OZANAM, voor de getallen, welker sommen en verschillen, twee aan twee genomen, volkomen vierkanten moeten zijn, $2abxy$, $a^2x^2 + b^2y^2$ en $b^2x^2 + a^2y^2$; dan zijn de som van het eerste en tweede $a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 = (ax + by)^2$ en die van het eerste en derde $b^2x^2 + 2abxy + a^2y^2 = (bx + ay)^2$ volkomen vierkanten; maar de som van het tweede en derde, namelijk:

$$(a^2 + b^2) \times (x^2 + y^2) \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

moet

$(x - z) = x^2 - z^2$ en $(y + z)(y - z) = y^2 - z^2$ volkomen vierkante getallen, en dan voldoen x^2, y^2 en z^2 aan de voorwaarde, dat derzelver verschillen, twee aan twee genomen, vierkante getallen zijn.

moet tot een volkomen vierkant gemaakt worden. Voorts zijn nog de verſchillen van het tweede min het eerſte $a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 = (ax - by)^2$ en van het derde min het eerſte $b^2x^2 - 2abxy + a^2y^2 = (bx - ay)^2$ volkomen vierkanten en het verſchil van het tweede min het derde wordt nu:

$$(a^2 - b^2) \times (x^2 - y^2) \ldots\ldots (2)$$

Om derhalve de vraag opteloſſen, moeten de formulen (1) en (2) tot volkomen vierkanten gemaakt worden. Om nu daar aan te voldoen, ſtelle men $x = z - \frac{ay}{b}$; dan worden de uitdrukkingen (1) en (2),

$$(a^2 + b^2) \times [z^2 - \frac{2ayz}{b} + \frac{a^2y^2}{b^2} + y^2]$$

$$(a^2 - b^2) \times [z^2 - \frac{2ayz}{b} + \frac{a^2y^2}{b^2} - y^2]$$

welke (in plaats van (1) en (2)) volkomene vierkanten moeten worden. Vermenigvuldigt men beide deze uitdrukkingen met het volkomen vierkant b^2; dan moeten, gelijk bekend is,

$$(a^2 + b^2) \times (b^2z^2 - 2abyz + a^2y^2 + b^2y^2)$$
$$(a^2 - b^2) \times (b^2z^2 - 2abyz + a^2y^2 - b^2y^2)$$

of wel, (deze producten ontwikkeld hebbende,)

$$a^2b^2z^2 + b^4z^2 - 2ab^3yz - 2a^3byz + a^4y^2 + 2a^2b^2y^2 + b^4y^2$$
$$a^2b^2z^2 - b^4z^2 + 2ab^3yz - 2a^3byz + a^4y^2 - 2a^2b^2y^2 + b^4y^2$$

tot volkomen vierkante getallen gemaakt worden.

Om dit oogmerk te bereiken, vermenigvuldige men de eerſte dezer twee laatſte uitdrukkingen met $(a^2 \backsim b^2)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ en de tweede met $(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$; dan verkrijgt men voor het eerſte product:

$$+ (a^6b^2 - a^2b^6 - a^4b^4 + b^8)\, z^2 \ldots\ldots\ldots$$
$$+ (2a^5b^3 + 2a^3b^5 - 2ab^7 - 2a^7b)\, zy \ldots\ldots$$
$$+ (a^8 - 2a^4b^4 + b^8)\, y^2 \ldots\ldots\ldots (3)$$

en, voor het tweede:

$$+ (a^6b^2 - a^2b^6 + a^4b^4 - b^8)\, z^2 \ldots\ldots\ldots$$

$$-(2a^6b^3 - 2a^3b^5 - 2ab^7 + 2a^7b)zy \ldots\ldots$$
$$+ (a^8 - 2a^4b^4 + b^8)y^2 \ldots\ldots\ldots (4)$$

Daar deze uitdrukkingen, (3) en (4), volkomene vierkanten q^2 en p^2 moeten zijn, is (de laatste als de grootste aannemende,) derzelver verschil $p^2 - q^2$ gelijk aan

$$2a^4b^4z^2 - 2b^8z^2 - 4a^5b^3yz + 4ab^7yz$$

bij aldien nu in dit verschil twee stelkundige factoren te vinden zijn, kan men dezelve aan $p + q$ en $p - q$ gelijk stellen en de halve som dezer factoren zal $= p$ zijn: nu heeft in de daad dit verschil de factoren $-2ab^3z$ en $\frac{b^5z}{a} - a^3bz + 2a^4y - 2b^4y$, en derzelver halve som is:

$$\frac{b^5z}{2a} - ab^3z - \tfrac{1}{2}a^3bz + a^4y - b^4y = p$$

men stelle dan het vierkant dezer vergelijking gelijk aan de uitdrukking (4); dan zal men, na herleiding, vinden:

$$(b^9 - 3a^8b + 6a^4b^5)z = (4ab^8 - 4a^9)y$$

door welke de betrekking der getallen y en z in functien van a en b, die men naar welgevallen kan aannemen, gegeven is. Men zal dus $y = n(b^9 - 3a^8b + 6a^4b^5)$ stellende, hebben $z = n(4ab - 4a^9)$, en neemt men, daar n willekeurig kan gesteld worden, $n = 1$; dan is:

$$z = 4ab^8 - 4a^9$$
$$y = b^9 - 3a^8b + 6a^4b^5$$
$$x = z - \frac{a}{b}y = 3ab^8 - 6a^5b^4 - a^9$$

Deze waarden van x en y, in de hier boven aangenomen uitdrukkingen, $2abxy$, $a^2x^2 + b^2y^2$, $b^2x^2 + a^2y^2$ en in derzelver som $(a^2 + b^2)x^2 + 2abxy + (a^2 + b^2)y^2$, overbrengende, vindt men, voor de gevraagde getallen, in geheele stelkundige uitdrukkingen:

1°. $6a^{18}b^2+24a^{14}b^6-92a^{10}b^{10}+24a^6b^{14}+6a^2b^{18}$
2°. $a^{20}+21a^{16}b^4-6a^{12}b^8-6a\ b^{12}+21a^4b^{16}+b^{20}$
3°. $10a^{18}b^2-24a^{14}b^6+60a^{10}b^{10}-24a^6b^{14}+10a^2b^{18}$
4°. $a^{20}+16a^{18}b^2+21a^{16}b^4-6a^{12}b^8-32a^{10}b^{10}\ldots$
$\ldots\ldots-6a^8b^{12}+21a^4b^{16}+16a^2b^{18}+b^{20}$

welke, twee aan twee van elkander afgetrokken zijnde, zes volkomen ſtelkundige uitdrukkingen geven; te weten de 4° min 1° het vierkant van $a^{10}+5a^8b^2-2a^6b^4-2a^4b^6+5a^2b^8+b^{10}$; de 4° min 2° het vierkant van $4a^9b-4ab^9$, de 4° min 3° het vierkant van $a^{10}+3a^8b^2+6a^6b^4-6a^4b^6-3a^2b^8-b^{10}$, *enz.* zoo als verder door beproeving blijken zal.

Men kan dan voor a en b alle getallen aannemen; indien maar a niet $=b$ genomen worde, omdat er anders tusſchen $a^2x^2+b^2y^2$ en $b^2x^2+a^2y^2$ geen onderſcheid zou zijn; neemt men $a=1$ en $b=2$; dan vindt men, voor de vier begeerde getallen, (even als bij OZANAM,) 1873432, 2288168, 2399057 en 6560657.

PANSER (zie de aangehaalde plaats in de noot op *Bladz.* 189,) heeft de oploſſing van dit voorſtel aldus aangevat. Hij ſtelt voor de gevraagde getallen, $25x^2+25$, $25x^2+16$, $16x^2+25$ en $40x$; dan is het eerſte min het tweede $=9$, het eerſte min het derde $=9x^2$; het eerſte min het vierde $=25x^2-40x+25$; het tweede min het derde $=9x^2-9$; het tweede min het vierde $=25x^2-40x+16=(5x-4)^2$, en het derde min het vierde $=16x^2-40x+25=(4x-5)^2$; zoodat bij aldien x zoodanig kan bepaald worden, dat

$$9x^2-9,\ of\ x^2-1$$
$$en\ 25x^2-40x+25$$

volkomen vierkante getallen worden, alle de voorwaarden der vraag zullen vervuld zijn.

Hij ſtelt dan, om deze uitdrukkingen tot volkomen vierkanten te maken, $x^2-1=(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$ en vindt, deze vergelijking op-

oplossende, $x = (1 + a^2) : 2a$. Deze waarde van x stelt hij in de formule, $25x^2 - 40x + 25$, en deze, die een volkomen vierkant moet zijn, wordt dan:

$$[25a^4 - 80a^3 + 150a^2 - 80a + 25] : 4a^2$$

zijnde eene breuk, welker teller, aangezien de noemer reeds zoodanig is, tot een volkomen vierkant moet gemaakt worden; het geen op onderscheidene wijzen geschieden kan. (*) PANSER stelt voor den wortel uit dit vierkant de uitdrukking $\frac{43}{5}a^2 - 8a + 5$ en vindt alzoo $a = \frac{20}{17}$ en daaruit $x = \frac{11713}{11560}$; waardoor hij dan eindelijk, voor de begeerden getallen, verkrijgt: 6770699225, 5567996825, 5595949904 en 5416091200, alle gedeeld door 133633600, welker gemeene noemer mag weggelaten en bij gevolg de tellers voor de geheele getallen genomen worden, welke dan, zoo als, bij de proef, blijken zal, aan de voorwaarden der vraag voldoen.

Bij de schrijvers, welke ons bekend zijn, komen geene andere dan de boven opgegevene oplossingen van dit voorstel voor.

Het was, in de eerste oplossing van OZANAM, onnoodig, voor a, b en c volkomen vierkante getallen te nemen, om daardoor abc tot een volkomen vierkant te maken; hij neemt dus eene voorwaarde, welke de vraag niet vordert, te veel aan en komt daarom tot zulke groote getallen.

De tweede oplossing van OZANAM onderstelt, zonder blijkbare reden, de overtollige voorwaarde, dat het vierde getal gelijk aan de som van de drie andere getallen moet zijn, en zonder dat het bewezen is, dat, op geene andere wijze, en buiten

(*) De wijze, om soortgelijke uitdrukkingen tot volkomen vierkanten te maken, vindt men in het IX *Hoofdst.* van EULERS *Algebra*.

ten dit hulpmiddel bij de hand te nemen, het vraagstuk kan opgelost worden.

PANSER laat het verschil van het eerste en tweede getal gelijk aan het bepaalde getal *negen* zijn. Men behoeft zijne oplossing slechts oppervlakkig in te zien, om zich dadelijk te overtuigen, dat hij, door het aannemen van soortgelijke uitdrukkingen, maar in andere getallen gesteld, oneindig vele oplossingen; doch alle aan eene vreemde voorwaarde onderworpen, zou hebben kunnen vinden.

Zulke aan het vraagstuk vreemde voorwaarden mogen niet aangenomen worden, ten zij men mogte bewezen hebben, dat zij een noodzakelijk gevolg van de gestelde voorwaarden waren. Dat nu alle de bijgebragte oplossingen, in dit opzigt, gebrekkig zijn, zal blijken, wanneer men, op eene regtstreeksche wijze, zonder vreemde voorwaarden aan te nemen, niet alleen eene meer natuurlijke en meer algemeene oplossing geven, maar ook bovendien door dezelve tot kleiner getallen komen kan.

Men stelle voor de begeerde getallen, u, $u + x^2$, $u + y^2$, $u + z^2$, (zijnde $x < y$ en $y < z$,) dan voldoen deze uitdrukkingen uit zich zelven reeds aan drie voorwaarden; daar, het eerste getal u van de drie overigen afgetrokken zijnde, de verschillen x^2, y^2 en z^2 zijn. Trekt men nu het tweede getal van het derde en vierde, en het derde van het vierde, dan blijkt het: dat x, y en z zoodanig moeten bepaald worden: dat de uitdrukkingen $y^2 - x^2$, $z^2 - x^2$ en $z^2 - y^2$ volkomen vierkante getallen worden. Het vraagstuk, uit dit oogpunt beschouwd, komt dan op het zeer bekende neder: *om namelijk drie volkomen vierkanten te vinden, welker verschillen, op alle mogelijke wijzen genomen, volkomen vierkante getallen zijn*, en het blijkt dan al ten eerste,

dat men het eerste getal u naar welgevallen zal kunnen aannemen.

Men stelle voor de drie vierkante getallen, welker verschillen volkomen vierkanten moeten zijn, $(a^2x^2 + b^2y^2)^2$, $(b^2x^2 + a^2y^2)^2$ en $4a^2b^2x^2y^2$; dan ziet men duidelijk, dat deze aangenomen uitdrukkingen reeds twee voorwaarden vervullen; want

$$(a^2x^2+b^2y^2)^2-4a^2b^2x^2y^2=(a^2x^2-b^2y^2)^2$$
$$(b^2x^2+b^2y^2)^2-4a^2b^2x^2y^2=(b^2x^2-a^2y^2)^2$$

zijn reeds volkomen vierkanten; en er blijft niets anders over, dan de uitdrukking,

$$(a^2x^2+b^2y^2)^2-(b^2x^2+a^2y^2)^2$$

dat is, na behoorelijke ontwikkeling,

$$(a^4-b^4)x^4+(b^4-a^4)y^4$$

of, waar voor men ook schrijven kan:

$$(a^4-b^4)\times(x^4-y^4)$$

tot een volkomen vierkant te maken.

Het is bekend, dat het verschil van twee vierde magten nooit een volkomen vierkant kan worden; onze formule kan dan, door het rationaal maken der factoren $a^4 - b^4$ $x^4 - y^4$, geen volkomen vierkant worden: maar daar zij ook aldus kan voorgesteld worden,

$$(a^2+b^2)\times(a^2-b^2)\times(x^2+y^2)\times(x^2-y^2)$$

zal men aan dit vereischte moeten voldoen, het zij door

$$(a^2+b^2)\times(x^2+y^2)\,en\,(a^2-b^2)\times(x^2-y^2)\,..\,(A)$$

het zij eindelijk door,

$$(a^2+b^2)\times(x^2-y^2)\,en\,(a^2-b^2)\times(x^2+y^2)\,...\,(B)$$

elk in het bijzonder, tot volkomen vierkanten te maken.

Uit de boven bijgebragte tweede oplossing van Ozanam blijkt: dat de uitdrukkingen (A) volkomen vierkanten worden, wanneer men

$$x=-a^9-6a^5b^4+3ab^8$$
$$y=-3a^8b+6a^4b^5+b^9$$

aanneemt, en hier door verkrijgt men dan, in stel-

ſtelkundige uitdrukkingen, voor de drie vierkanten, welker verſchillen volkomen vierkanten zijn, de tweede magten der waarden, welke aldaar voor $a^2x^2 + b^2y^2$, $b^2x^2 + a^2y^2$ en $2abxy$ gevonden zijn, te weten:

1°. $[a^{20} + 21\,a^{16}.b^4 - 6\,a^{12}b^8 - 6\,a^8b^{12}$
. . . . $+ 21\,a^4b^{16} + b^{20}]^2$ . . . . . (C)

2°. $[10\,a^2b^{18} - 24\,a^6b^{14} + 60\,a^{10}b^{10} - 24\,a^{14}b^6$
. . . . $+ 10\,a^{18}b^2]^2$

3°. $[6\,a^2b^{18} + 24\,a^6b^{14} - 92\,a^{10}b^{10} + 24\,a^{14}b^6$
. . . . $+ 6\,a^{18}b^2]^2$

en welke getallen men nu voor a en b ſtelle, zal men drie volkomen vierkanten verkrijgen, welker verſchillen, twee aan twee genomen, volkomen vierkanten zijn.

Wanneer men het kleinſte der drie getallen, hier boven, in de tweede oploſſing van OZANAM gevonden, van elk der drie anderen aftrekt, dan worden de verſchillen, 644^2, 725^2 en 2165^2, welke, twee aan twee, van elkander afgetrokken zijnde, de volkomen vierkanten, namelijk 2067^2, 2040^2 en 333^2, geven. En, wanneer men verder de aldaar gevondene ſtelkundige uitdrukkingen (de eerſte van elk der drie anderen) aftrekt, dan verkrijgt men:

1°. $[a^{10} + 5a^8b^2 - 2a^6b^4 - 2a^4b^6 + 5a^2b^8 + b^{10}]^2$. (D)
2°. $[a^{10} - 3\,a^8b^2 + 6\,a^6b^4 + 6\,a^4b^6 - 3\,a^2b^8 + b^{10})^2$
3°. $[2\,a^9b - 12\,a^5b^5 - 2\,ab^9]^2$

en deze zijn volkomen ſtelkundige vierkanten, welker gedurige verſchillen worden, als volgt: het eerſte min het tweede:

$$[4\,a^9b - 4\,ab^9]^2$$

het eerſte min het derde:

$$[a^{10} + 3\,a^8b^2 + 6\,a^6b^4 - 6\,a^4b^6 - 3\,a^2b^8 - b^{10}]^2$$

het de tweede min het derde:

$$[a^{10} - 5\,a^8b^2 - 2\,a^6b^4 + 2\,a^4b^6 + 5\,a^2b^8 - b^{10}]^2$$

zij zijn dus ook ſtelkundigerwijze volkomen vierkanten. Het is intusſchen opmerkenswaardig, dat de regtsſtreekſche oploſſing de uitdrukkin-

gen (C) veel zamengeftelder fchijnt te maken, dan de uitdrukkingen (D), welke uit de oplosfing van een ander vraagftuk van OZANAM worden afgeleid. Dan, wanneer men in aanmerking neemt, dat, in de uitdrukkingen (C), de letters a en b tot evene magten opklimmen, zoo zal men, in plaats van a^2 en b^2, fchrijvende a en b, (de uitdrukkingen in eene andere orde genomen,) verkrijgen:

1°. $[a^{10}+21a^8b^2-6a^6b^4-6a^4b^6+21a^2b^8+b^{10}]^2$ (E)
2°. $[10a^9b-24a^7b^3+6a^5b^5-24a^3b^7+10ab^9]^2$
3°. $[6a^9b+24a^7b^3-92a^5b^5+24a^3b^7+6ab^9]^2$

zijnde de verfchillen van de vierkanten dezer uitdrukkingen, te weten: 1° min 2°, 1° min 3° en 2° min 3°, refpectievelijk gelijk aan,

$$[a^{10}+3a^8b^2+66a^6b^4-66a^4b^6-3a^2b^8-b^{10}]^2$$
$$[a^{10}-29a^8b^2+34a^6b^4-34a^4b^6+29a^2b^8-b^{10}]^2$$
$$[8a^9b-48a^7b^3+48a^3b^7-8ab^9]^2$$

zoodat men de uitdrukkingen (E) voor de eenvoudigfte kan houden, welke uit de regtftreekfche wijze van OZANAM, om $(a^4-b^4)(x^4-y^4)$ rationaal te maken, volgen; en deze kunnen derhalve, met de uitdrukkingen (D), welke nogtans kleinere getallen geven, als twee ftelfels van ftelkundige vierkanten worden aangemerkt, welker verfchillen, op alle mogelijke wijzen genomen, volkomen ftelkundige vierkanten zijn.

Wanneer men, voor een oogenblik, één dezer twee ftelfels, (D) en (E), van ftelkundige uitdrukkingen, voor de eenvoudigfte mogt aanzien, die men verkrijgen kan, zal het echter weldra blijken, dat zij niet alle getallen opleveren, welke de vereischte voorwaarden vervullen; en dit verfchijnfel fchijnt toegefchreven te moeten worden aan de wijze van rationaal maken; want, indien men, op het voetfpoor van EULER, (zie zijne *Algebra* §. 234) eene tafel van de waarden van a^4-b^4 vervaardigt (maar men moet de-

zel-

zelve veel verder dan aldaar uitftrekken,) dan zal men vinden: dat

1°. Wanneer men $a^2 = 9$, $b^2 = 4$, $x^2 = 121$ en $y^2 = 4$ ftelt, de getallen welke aan den eisch van het voorftel voldoen, zijn zullen: u, $u + 1105^2$, $u + 520^2$ en $u + 264^2$.

2°. Dat, wanneer men $a^2 = 9$, $b^2 = 4$, $x^2 = 81$ en $y^2 = 49$ ftelt, het ftelfel u, $u + 925^2$, $u + 765^2$ en $u + 756^2$ ontftaan zal, en meer anderen.

Evenwel losfen niet alle waarden van a^2, b^2, x^2 en y^2, uit deze tafel genomen, welke $(a^4 - b^4)(x^4 - y^4)$ tot een volkomen vierkant maken, het vraagftuk op. De gevallen, waarin $a : b = x : y$ of $a : b = y : x$ is, zijn hier van uitgefloten; omdat als dan $ay = bx$ of $ax = by$ en het derde getal gelijk aan het eerfte of aan het tweede wordt, en deze waarden van a, b, x en y, zijn in deze tafel wel de menigvuldigfte.

Wij laten de discusfie van het rationaal maken der formulen (B), namelijk van $(a^2 + b^2)(x^2 - y^2)$ en $(a^2 - b^2)(x^2 + y^2)$, (om deze oplosfing niet te ver te doen uitloopen,) tot eene andere gelegenheid over, en merken alleen op: dat het rationaal maken van dezelve, zoo wel als van de uitdrukkingen (A), op eene algemeene wijze aangevat, en, om zeker te zijn, dat men de eenvoudigfte ftelkundige waarden voor x en y verkrijge, zoodanig behoort ingerigt te zijn, dat, bij voorbeeld, voor (A), x en y zoodanige functien van a en b moeten zijn, dat $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2) \times \varphi(a, b)$ en $x^2 - y^2 = (a^2 - b^2) \times \varphi'.(a, b)$ en $\varphi.(a, b) \times \varphi'.(a, b)$ het eenvoudigst ftelkundig vierkant moet zijn, dat men vinden kan.

Dan, al had men ook de eenvoudigfte functien voor a en b gevonden, (die ook zelve de gevallen hier boven uit de tafel voor de waarden van $a^4 - b^4$ afgeleid in zich begrepen, dan zou men de-

deze oplossing nogtans niet voor de algemeenste kunnen houden; daar het uit de oplossing, welke EULER, in zijne *Algebra* §. 235 gegeven heeft, (en welke men hier moet raadplegen,) blijkt: dat het stelsel u, $u + 697^2$, $u + 185^2$, en $u + 153^2$ het voorstel oplost, offchoon deze kleinere getallen in onze oplossing niet begrepen zijn, niettegenstaande deze, in den eersten opslag, eenvoudiger schijnt te zijn. (*)

Wij gaan voor het tegenwoordige alle andere oplossingswijzen, die wij onderzocht hebben, voorbij: allen, ja ook die van EULER zelve zijn aan den invloed van onderstellingen onderworpen, welke verhinderen, dat men de kleinste getallen vinde: en offchoon geene der door ons beproefde oplossingen, kleinere getallen dan die van EULER gegeven hebben, is men niet zeker: dat deze de kleinste zijn, voor dat men eene tafel van vierkanten, welker verschillen volkomen vierkanten zijn, gemaakt en beproefd hebbe, welk vierkant getal bij twee van dezelve opgeteld zijnde, volkomen vierkante getallen geven zal.

Uit onze wijze van oplossen blijkt het: dat het vraagstuk, om vier getallen te vinden, welker verschillen, twee aan twee genomen, zes volkomen vierkanten geven, nog aan meer voorwaarden kan onderworpen worden: zoo kan men er bij voorbeeld nog bijvoegen, *en dat derzelver som een volkomen vierkant*, *of een volkomen cubus*, *of een volkomene vierde magt zij*, *of ook andere voorwaarden*. Nemen wij, bij voorbeeld, het stelsel:

$$u,\ u + 153^2,\ u + 185^2,\ u + 697^2)$$

dan is de som $= 4u + 543443$. Laten wij deze som

(*) En geen wonder, want onze oplossing onderstelt, dat een der gezochte vierkanten door 4 deelbaar is: het geen niet volstrekt noodzakelijk is. DE GELDER.

ſom = w^2 ſtellen; dan moet $u = \frac{1}{4}(w^2 - 543443)$ genomen worden: ſtellen wij $w = 1767$, dan is $u = 629807\frac{1}{2}$, *enz.* Wil men de ſom der getallen een volkomen cubus maken, wordt $u = \frac{1}{4}(w^3 - 543443)$; nemende dan $w = 83$, of $w^3 = 571787$; dan is $u = 7086$ en de vier getallen worden dan, 7086, 30495, 41311 en 492195.

N°. 89. Door

M. J. ZUIDHOF, *en P. van Eeghen, Chz.*

Men ſtelle het begeerde getal $= x$. In het algemeen, wordt een veelhoekig getal, wiens wortel $= x$ en zijde $= n$ is, uitgedrukt door $\frac{1}{2}(n - 2)x^2 - \frac{1}{2}(n - 4)x$. (Zie DE GELDER, II *Curſ. Bladz.* 330 *noot* 84.) Voor een driehoekig getal is $n = 3$, voor een zeshoekig $n = 6$ en voor een dertighoekig $n = 30$. Het getal x, tot een driehoekig getal verheven, geeft dan $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$; hetzelve tot een dertighoekig verheffende, heeft men $14x^2 - 13x$; en het product van het laatſte met $2\frac{1}{3}$ maal het eerſte, opgeteld met 100534, wordt dan $\frac{7}{6}.(x^2 + x) \times (14x^2 - 13x) + 100534$; dat is, na de factoren vermenigvuldigd te hebben,

$$\frac{1}{6}.(98x^4 + 7x^3 - 91x^2 + 603204) \ldots\ldots (A)$$

en deze uitdrukking moet nu gelijk zijn aan even zoo veel termen van de vierkanten der natuurlijk opklimmende zeshoekige getallen, als er éénheden in x zijn. Een zeshoekig getal wordt door $2x^2 - x$, en het vierkant van een zeshoekig getal door $(2x^2 - x)^2 = 4x^4 - 4x^3 + x^2$ uitgedrukt. De vierkanten der natuurlijk opklimmende zeshoekige getallen zijn dan:

$$4 \times 1^4 - 4 \times 1^3 + 1^2$$
$$4 \times 2^4 - 4 \times 2^3 + 2^2$$
enz. *enz.*
$$4 \times x^4 - 4 \times x^3 + x^2$$

en

en de fom van de vierkanten dezer zeshoekige getallen, van 1 tot x, is dan gelijk aan,

$$+ 4(1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \text{enz.} + x^4)$$
$$- 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \text{enz.} + x^3)$$
$$+ 1(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \text{enz.} + x^2)$$

dat is (zie DE GELDER II *Curfus.* §. 836. *Bladz.* 461) (*) gelijk aan

$$4 \times [\tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{3}x] \ldots\ldots\ldots$$
$$- 4 \times [\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x^2] + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x$$

en indien men nu deze uitdrukking ontwikkelt, verkrijgt men voor dezelve:

$$\tfrac{4}{5}x^5 + x^4 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{30}x$$

deze moet nu aan de uitdrukking (A) gelijk zijn: men heeft derhalve:

$$\tfrac{1}{6}.(98x^4 + 7x^3 - 91x^2 + 603204) = \tfrac{4}{5}x^5 + x^4 \ldots$$
$$- \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{30}x$$

de-

(*) Men kan, zoo als de Heer VAN ERGHEN gedaan heeft, op eene andere wijze, tot eene uitdrukking voor de fom van de x eerfte vierkanten der zeshoekige getallen komen: deze vierkanten zijn:

reeks . . .	1, 36, 225, 784, 2025, *enz.*
eerfte verfch.	35, 189, 559, 1241, *enz.*
tweede verfch. . .	154, 370, 682, *enz.*
derde verfch.	216, 312, *enz.*
vierde verfch.	96, 96, *enz.*

dan is (zie DE GELDER's II *Curf.* §. 783. *Bladz.* 442. of STRABBE, *Inl. Mat. Wet. Bladz.* 258) de fom dezer reeks gelijk aan:

$$x + 35.\frac{x}{1}.\frac{x-1}{2} + 154.\frac{x}{1}.\frac{x-1}{2}.\frac{x-2}{3} + \ldots$$
$$\ldots\ldots 216.\frac{x}{1}.\frac{x-1}{2}.\frac{x-2}{3}.\frac{x-3}{4} + \ldots\ldots$$
$$\ldots 96.\frac{x}{1}.\frac{x-1}{2}.\frac{x-2}{3}.\frac{x-3}{4}.\frac{x-4}{5}$$

welke, ontwikkeld zijnde, dezelfde uitdrukking, als in den tekst, voor de fom van de vierkanten der zeshoekige getallen geven zal. *Wet. Comm.*

deze vergelijking met 30 verm. en naar de afmetingen van x geordend zijnde, heeft men:

$$24x^5 - 460x^4 - 45x^3 + 440x^2 + x - 3016020 = 0$$

Uit deze vergelijking vindt men, naar ééne der bekende leerwijzen, voor het vinden der deelers, $x = 20$. De overige deelers dezer vergelijking zijn begrepen in de vergelijking:

$$24x^4 + 20x^3 + 358x^2 + 7540x + 150806 = 0$$

in welke geene positive noch meetbare wortels meer te vinden zijn; $x = 20$ is dus het eenige getal, dat de vraag oplost.

N°. 90. Door

U. HUGUENIN.

Laten (*Fig.* 65.) AB $= a$ en BC $= b$ de bekende afstanden en ABC $=$ B de bekende hoek zijn; stel voorts de waargenomene hoeken ADB $= \alpha$ en BEC $= \beta$, den gemeten afstand DE $= c$ en den onbekenden hoek DAB $= \phi$; dan is hoek ABD $= 180° - (\alpha + \phi)$, hoek EBC $= B + \alpha + \phi - 180°$ en hoek BCE $= 180° - [B + \alpha + \beta + \phi - 180°] = 360° - (\alpha + \beta + B) - \phi$. Stellende dan $360° - (\alpha + \beta + B) = \epsilon$, zoo is BCE $= \epsilon - \phi$, en men heeft, in den driehoek DAB, de evenredigheid, $Sin.\ \alpha : Sin.\ \phi = a :$ BD en in den driehoek EBC, de evenr. $Sin.\ \beta : Sin.\ (\epsilon - \phi) = b :$ BE; waaruit BD $= a\ Sin.\ \phi : Sin.\ \alpha$ en BE $= b\ Sin.\ (\epsilon - \phi) : Sin.\ \beta$ volgen; maar doordien BD + DE $=$ BE is, heeft men:

$$\frac{b\ Sin.\ (\epsilon - \phi)}{Sin.\ \beta} - \frac{a\ Sin.\ \phi}{Sin.\ \alpha} = c$$

of, de breuken wegmakende, en $Sin.\ (\epsilon - \phi)$ ontwikkelende,

$$b\ Sin.\ \alpha\ Sin.\ \epsilon\ Cos.\ \phi - [b\ Sin.\ \alpha\ Cos.\ \epsilon + a\ Sin.\ \beta]$$
$$\ldots\ldots \times Sin.\ \phi = c\ Sin.\ \alpha\ Sin.\ \beta$$

of

of door b *Sin.* α *Sin.* ε deelende,

$$Cos.\,\phi - \left[Cot.\,\varepsilon + \frac{a\ Sin.\ \beta}{b\,Sin.\ \alpha\ Sin.\ \varepsilon}\right] Sin.\,\phi = \frac{c\,Sin.\,\beta}{b\,Sin.\ \varepsilon}$$

Men ftelle in deze vergelijking de bekende uitdrukking $Cot.\ \varepsilon + a\ Sin.\ \beta : b\ Sin.\ \alpha\ Sin.\ \varepsilon = Cot.\ \mu = Cos.\ \mu : Sin.\ \mu$ [zie de Noot op *Bladz.* 83 van dit Deel,] en vermenigvuldige dezelve met *Sin.* μ, dan heeft men:

$$Sin.\mu Cos.\phi - Cos.\mu Sin.\phi = Sin.(\mu - \phi) = \frac{c Sin.\,\beta Sin.\,\mu}{b\ Sin.\ \varepsilon}$$

en daar $\mu - \phi$ en $180^\circ - (\mu - \phi)$ dezelfde finus hebben, zoo is de tweede wortel dezer vergelijking door $Sin.\ [180^\circ - (\mu - \phi)] = \frac{c\ Sin.\ \beta\ Sin.\ \mu}{b\ Sin.\ \varepsilon}$ gegeven. Het zij ons vergund den aard van dit voorftel door een paar voorbeelden nader te ontvouwen.

I VOORBEELD. Zij gegeven $a = 785$, $b = 414$ en hoek ABC $= B = 117^\circ 41' 26''$, DC $= c = 306$ gemeten; voorts zij $\alpha = 50^\circ 30'$ en $\beta = 17^\circ 45'$ door waarneming gevonden; waardoor $\varepsilon = 360^\circ - (\alpha + \beta + B) = 174^\circ 3' 34''$, en $Cot.\ \mu = Cot.\ 174^\circ\ 3'\ 34'' + \ldots\ldots\ldots \frac{785\ Sin.\ 17^\circ 45'}{414\ Sin.\ 50^\circ 30'\ Sin.\ 174^\circ 3' 34''}$ wordt. Nu is $Sin.\ 174^\circ 3' 34'' = Sin.\ 5^\circ 56' 26''$ en $Cot.\ 174^\circ 3' 34'' = -\ Cot.\ 5^\circ 56' 26''$, en daar de finus totus of radius $= 1$ aangenomen is, heeft men, in Logarithmen werkende:

Log. 785 = 2,8948694	*Log.* 414 = 2,6170003
Log. Sin. 17°45' = 9,4841066 − 10	*Log Sin* 50°30' = 9,8874061 − 10
fom = 2,3739763	*Log Sin.* 5°6'26" = 9,0149260 − 10
af . . . * 1,5193324	*fom* = * 1,5193324

rest 0,8596439 = *Logarithmus van* 7,238422
Hierbij Cot. 174° 3'24" = *Cot.* − 5°56'26" = − 9,610266

komt Cot. μ = − 2,371844

Maar

Maar 2,371844 is de *Cot.* van $22^\circ 51'58''$; derhalve is $\mu = 180^\circ - 22^\circ 51'58'' = 157^\circ 8'2''$, en

$$Sin.(157^\circ 8'2'' - \varphi) = \frac{306 \, Sin. \, 17^\circ 45' \times Sin. \, 157^\circ 8'2''}{414 \, Sin. \, 174^\circ 3'34''}$$

nu is $Sin. \, 157^\circ 8'2'' = Sin. \, 22^\circ 51'58''$ en $Sin. \, 174^\circ 3'34'' = Sin. \, 5^\circ 56'26''$, en, in Logarithmen werkende,

$Log. \, 414 = 2{,}6170003$ $\quad$ $Log. \, 306 = 2{,}4857214$

$Log. Sin. \, 174^\circ 3'34'' = 9{,}0149260 - 10$ $\quad$ $Log \, Sin \, 17^\circ 45' = 9{,}4841066 - 10$

$* \, 1{,}6319263$ $\quad$ $Log \, 157^\circ 8'2'' = 9{,}5894993 - 10$

$1{,}5592873$

trek af . . . $* \, 1{,}6319263$

$Log. \, Sin. \, (180^\circ - \mu + \varphi) = 9{,}9273010 - 10$

hetwelk de *Log. Sin.* $57^\circ 47'8''$ is. Men heeft dan, voor den eerften wortel der vergelijking, $157^\circ 8'2'' - \varphi = 57^\circ 47'8''$; of $\varphi = 99^\circ 20'54''$; en voor den tweeden $180^\circ - 157^\circ 8'2'' + \varphi = 57^\circ 47'8''$; of $\varphi = 34^\circ 55'10''$.

Men verkrijgt alzoo twee antwoorden, welke de ftandpunten D en E tegen over de holte van den hoek ABC, dat is binnen ABC, bepalen en den waarnemer gevolgelijk in verlegenheid kunnen brengen van niet met zekerheid te weten van welke dezer antwoorden hij zich, om de ware plaats der ftandpunten, waaruit hij de hoeken waargenomen heeft, op de kaart te brengen, zal moeten bedienen? en deze zwarigheid neemt toe, naar mate de gevondene waarden van φ minder van elkander verfchillen. In zulk een geval is het noodig, door eenig kenmerk op het terrein, of wel, met behulp van de noordlijn, te bepalen, welke der twee gevondene antwoorden met de naturelijke ligging der ftandpunten overeênkome? Maar, wanneer $\mu - \varphi = 180^\circ - (\mu - \varphi)$ en alzoo $\mu - \varphi = 90^\circ$ is, het geen plaats heeft, indien $c \, Sin. \, \beta \, Sin. \, \mu = b \, Sin. \, \varepsilon$ is, dan vervalt deze zwarigheid geheel; daar het voorftel als dan flechts ééne oplosfing heeft. Ook zal deze zwarigheid wegvallen, wanneer de

standpunten D en E, ten opzigte van A, B en C, volgens de beide oplossingen eene tegengestelde ligging hebben; gelijk in het volgend voorbeeld plaats heeft.

II VOORBEELD. Zij gegeven $a = 236$, $b = 374$, $c = 177$, $B = 99°\,38'21'$, $\alpha = 28°\,30'$ en $\beta = 32°\,00'00''$; dan is $\varepsilon = 360° - (99°\,38'2'' + 38°\,30' + 32°) = 199°\,51'58''$ en diensvolgens,

$$Cot.\,\mu = Cot.\,199°\,51'58'' + \frac{236\ Sin.\ 32°}{374\,Sin.\,28°\,30'\ Sin.\,199°\,51'58''}$$

waarvan, aangezien $Sin.\ 199°\,51'58'' = -\,Sin.\ 19°\,51'58''$ is, het laatste gedeelte negatief wordt. Nu is

$Log.\ 374 = 2{,}5728716$	$Log.\ 236 = 2{,}3729120$
$Log.\ Sin.\ 28°\,80' = 9{,}6786629 - 10$	$Log.\ Sin.\ 32° = 9{,}7242095 - 10$
$Log.\ Sin.\ 19°\,51'58'' = 9{,}5312532 - 10$	$2{,}0971217$
$*\ 1{,}7827877$	$*\ 1{,}7827877$ af
	rest $0{,}3143340$

hetwelk de *Log.* van 2,0622152 is, en dit getal moet, in de waarde van $Cot.\ \mu$, negatief genomen worden, zoo als bereids voor $Sin.\ 199°\,51'58''$ is aangemerkt geworden. Daar voorts $Cot.\ 199°\,51'58'' = Cot.\ 19°\,51'58'' = 2{,}7674990$ is, heeft men $Cot.\,\mu = 2{,}7674990 - 2{,}0622152 = 0{,}7052678 = Cot.\ 54°\,48'8''$; gevolgelijk is:

$$Sin.(54°\,48'8'' - \varphi) = \frac{-\,177\ Sin.\,32° \times Sin.\,54°\,48'8''}{374\ Sin.\ 19°\,51'58''}$$

$Log.\ 374 = 2{,}5728766$	$Log.\ 177 = 2{,}2479733$
$Log.\,Sin.\,19°\,51'58'' = 9{,}5312532 - 10$	$Log\ Sin\ 32° = 9{,}7242097 - 10$
$*\ 2{,}1041248$	$L.\,Sin.\,54°\,48'8'' = 9{,}9123110 - 10$
	$11{,}8844940 - 10$
	af .. $*\ 2{,}1041248$
	rest ... $9{,}7803692 - 10$

hetwelk de *Log. Sin.* $37°\,5'25''$ is. Men vindt derhalve, voor den eersten wortel, $Sin.\ (54°\,48'\,8'' - \varphi) = -\,Sin.\ 37°\,5'25'' = Sin.\ (180° + 37°\,5'25'')$ of $\varphi = -\,162°\,17'17''$; en, voor den twee-

tweeden wortel, is *Sin.* (180° — (54° 48′ 8″ — φ)) = *Sin.* (180° + 37° 5′ 25″); of φ = 91° 53′ 33″. Daar nu, volgens het eerste antwoord, de hoek φ eene negatieve waarde heeft, zoo is het zeker, dat de standpunten D en E, voor dit geval, aan de tegenovergestelde zijde van de holligheid des hoeks ABC zullen vallen: bevinden zich dan de ware standpunten in de holligheid van dezen hoek, dat is, binnen denzelven, gelijk in de figuur aangenomen is, zoo valt allen twijfel weg, omdat, in dit geval, het tweede antwoord alleen het ware zijn kan.

Om te onderzoeken, welke figuur uit den eersten wortel ontstaat, make men, aan de tegengestelde zijde van AB, (*Fig.* 66.) den hoek BAD = φ = 162° 17′ 17″ (*) en, om de punten D en E te bepalen, merke men op: dat, in (*Fig.* 65), hoek ABD of hoek ABE = 180° — (α + φ) = 180° — (28° 30′ — 162° 17′ 17″) = + 313° 47′ 17″ wordt: daar nu deze hoek, grooter dan 180° is, en de hoek ABE, in de oorspronkelijke figuur 65, van AB naar BC geteld wordt, zoo telle men, in die rigting, ABE = 313° 47′ 17″; of men neme den scherpen hoek ABE, in *fig.* 66, gelijk aan het supplement van 313° 47′ 17″ tot 360°; en doordien, voor dit geval, hoek BCE = ε — φ = 199° 51′ 58″ + 162° 17′ 17″ = 360° + 2° 9′ 15″, is, welke, in den zin onzer eerste figuur 65, met hoek *abc* = 360° + *a*C*c* overeënkomt, zoodanig dat de scherpe hoek *a*C*c* = 2° 9′ 15″ is en C*e* aan de binnenzijde van BC valt, waardoor het punt E op de lijn BE bepaald wordt. Verlengt men eindelijk DA tot het verlengde van EB in D., dan zullen de pun-

(*) De lezer raadplege, wegens het begrip van positieve en negatieve hoeken, op dat hij dit gedeelte der oplossing te beter versta, DE GELDER's, *Beg. Meetk.* §. 532. *Wet. Comm.*

punten D en E de ſtandpunten voor de negatieve waarde van φ zijn.

Ten einde zich hiervan te overtuigen, zal het ſlechts noodig zijn, aan te toonen: dat de hoeken BDA en BEC met de waargenomene hoeken $\alpha = 28^\circ 30'$ en $\beta = 32^\circ$ overëénſtemmen. Men ſubtrahere tot dat einde $D'AB = 162^\circ 17' 17''$ van 180°, rest $BAD = 17^\circ 42' 43''$: voorts ſubtrahere men 180° van den verhevenen hoek $ABE = 313^\circ 47' 17''$, rest $ABD = 133^\circ 47' 17''$; derhalve is $BDA = 180^\circ - (17^\circ 42' 43'' + 133^\circ 47' 17'') = 28^\circ 30' = \alpha$: en, om zich te overtuigen: dat hoek $BEC = \beta = 32^\circ$ is, ſubtrahere men den verhevenen hoek $ABE = 313^\circ 47' 17''$ van 360°, rest $EBA = 46^\circ 12' 43''$; hier bij $ABC = B = 99^\circ 38' 2''$, geeft $EBC = 145^\circ 50' 45''$, waaruit volgt, dat $BEC = 180^\circ - (145^\circ 50' 45'' + 2^\circ 9' 15'') = 32^\circ = \beta$ is.

Uit dit onderzoek blijkt het dan: dat beide verkregen antwoorden tot twee verſchillende problemata behooren: namelijk, in onze oorſpronkelijke figuur, zijn de ſtandpunten D en E in eene regte lijn, welker verlengde door het punt D gaat, en binnen den hoek ABC aangenomen: het eerſte antwoord van het tweede *voorbeeld* leert ons echter, dat in onze oploſſing het geval mede begrepen is, waarin de ſtandpunten zich buiten den hoek ABC ten wederzijden van het punt B bevinden, zoodanig, dat de punten D, B en E in eene regte lijn liggen: het is dus buiten twijfel, dat deze beide gevallen op het allernaauwſte met elkander verknocht zijn, en dat dus het laatſte geval, wanneer men daar den verheven hoek $D'AB = \varphi$ aanneemt, tot onze gevondene vergelijking brengen moet. In de daad is dan ook $BAD = \varphi - 180^\circ$, de verheven hoek $AFC = AFE + 180^\circ = \alpha + \beta + 180^\circ$ en daar, in den vierhoek ABCF, de ſom zijner vier hoeken, den inſpringenden hoek F, als naar

be-

behooren > 180° nemende, gelijk 360° is, zoo wordt BCE $= 360° - (\alpha + \beta + B) - \varphi = \varepsilon - \varphi$. Voorts is, in den driehoek ABD, BD $= a\ Sin.\ (\varphi - 180°) : Sin.\ \alpha = - a\ Sin.\ (180° - \varphi) : Sin.\ \alpha = - a\ Sin.\ \varphi : Sin\ \alpha$, en, in den driehoek EBC, is BE $= b\ Sin.\ (\varepsilon - \varphi) : Sin.\ \beta$, en daar DE $=$ BE $+$ BD is, heeft men $\frac{b\ Sin.\ (\varepsilon - \varphi)}{Sin.\ \beta} - \frac{a\ Sin.\ \varphi}{Sin.\ \alpha} = c$, zijnde deze dezelfde vergelijking, welke wij boven, voor het eerste geval, gevonden hebben. (*)

De meetkunstige constructie is de volgende. Men beschrijve (*Fig.* 67,) op AB en BC, als koorden, de beide cirkels, welker middelpunten zijn X en Y, zoodanig, dat hoek AXB $= 2\alpha$ en hoek BYC $= 2\beta$ zij: men make voorts, in den tweeden cirkel, hoek BYF $= 2\alpha$, en beschrijve op AF, als koorde, eenen cirkel, zoodanig, dat de hoek aan het middelpunt FZA $= 2\alpha$ zij; daarna beschrijve men uit F, als middelpunt, met DE $= c$, als straal, eenen boog, welke dezen cirkel, in de beide punten G en g, zal snijden; wanneer men dan uit B de beide lijnen BE en Be met FG en Fg evenwijdig trekt, zullen deze lijnen de standpunten D en E voor het eerste, en d en e, voor het tweede antwoord, in de omtrekken der beide cirkels bepalen.

Want, volgens de constructie, is hoek ADB $=$ AdB $= \frac{1}{2}$ AXB $= \alpha$; derhalve is FEB $=$ ADB

(*) De stelkundige en de analytisch-trigonometrische oplossingen van meetkundige voorstellen hebben doorgaands het nut, dat zij andere voorstellen of eigenschappen van figuren leeren kennen, waaraan men, hoezeer dezelve met het oorspronkelijke voorstel in verband staan, niet gedacht had, en hoedanige als verwandschapte figuren moeten beschouwd worden, welker nasporing vermoedelijk voor de uitbreiding der Meetkunst allernuttigst zoude zijn. HUGUENIN.

ADB en F*e*B = A*d*B; alzoo zijn AD en FE evenwijdig; ook is A*d* evenwijdig aan F*e*; maar doordien ook FG en F*g* = *c* evenwijdig met DE en *de* zijn, zoo is ook DE = *de* = *c* en de punten D en E en *d* en *e* zijn de ſtandpunten, welke op tweeërlei wijze ons voorſtel beantwoorden.

Dezelfde conſtructie geldt ook voor *fig.* 68, in welke de ſtandpunten *d* en *e* voor het tweede antwoord, buiten de rigting der lijn AB vallen, met die uitzondering, dat hier niet de hoek A*d*B zelf; maar zijn ſupplement A*de* = ½AXB = *α* is; zoodat A*d*B = 180° — *α* wezen zal.

De conſtructie voor *fig.* 69, welke met ons tweede voorbeeld overeenkomt, is van de vorige niet onderſcheiden; uitgenomen, dat hier de punten *d* en *e* van het eene antwoord eene tegengeſtelde ligging, gelijk die van *fig.* 66, verkrijgen, zoodanig, dat niet het verlengde van *de* = *c*; maar deze lijn zelve door B gaat en dat voorts hoek F*e*B (zoo als in *fig.* 67,) niet gelijk FEB = ½BYX = *α*, maar gelijk aan zijn ſupplement is; want, naardien de punten F, *e*, B en E in den omtrek eens cirkels gelegen zijn, is F*e*B + FEB = 180°, en F*e*B = 180° — FEB = 180° — *α*. Dat nu voor het overige *d* en *e* de ſtandpunten zijn, die met het eerſte antwoord van het tweede voorbeeld overëénkomen, is zigtbaar: want, aangezien *de* door B evenwijdig aan F*g* getrokken en hoek B*d*A = ½AXB = *α* is, zoo is F*ed* + *ed*A = 180° en gevolgelijk F*e* evenwijdig aan *gd*; diensvolgens is *ed* = F*g* = *c*; eindelijk is hoek B*e*C = ½BYC = *β*; derhalve zijn *d* en *e* punten, welke, even als D en E, het voorſtel beantwoorden.

Wanneer de lijn DE = *c* de lengte van de middellijn FH des cirkels FG*g* F heeft, vallen, ingevolge deze conſtructie, de lijnen FG en F*g* op de middellijn FH en de punten D en *d*, zoo als ook de punten E en *e*, zullen zich veréénigen en

en er zal, in dit geval, slechts één antwoord bestaan: is echter DE $= c$ grooter dan men, door eene constructie, de middellijn vindt, dan zijn de gegevens van het voorstel onderling onbestaanbaar, omdat de koorden FG en Fg des cirkels niet grooter dan deszelfs middellijn kunnen zijn.

Dit komt nu ook met de hier boven gevondene wortels overëén. Wij hebben gezien: dat dezelve gelijk worden, als $Sin. (\mu - \phi) = Sin. (180^\circ - (\mu - \phi)) = Sin. 90^\circ = 1 = c\, Sin. \beta\, Sin. \mu : b\, Sin. \epsilon$ is; derhalve kan $c\, Sin. \beta\, Sin. \mu : b\, Sin. \epsilon$ nooit grooter dan *één* worden; wijl de sinus nooit grooter dan de straal worden kan, en alzoo is de grootste waarde, welke $Sin. (\mu - \phi)$ of $Sin. (180^\circ - (\mu - \phi))$ hebben kan, $c\, Sin. \beta\, Sin. \mu : b\, Sin. \epsilon = 1$; voor welk geval $c = b\, Sin. \epsilon : Sin. \beta\, Sin. \mu$ worden zal; daar voorts, onder deze voorwaarde, de beide wortels gelijk zijn, zoo moet ook de waarde van c met de lengte van de middellijn FH overëënkomen, hetgeen bovendien ook uit de figuur bewijsbaar is.

CONSTRUCTIE, door *J. R. Schmidt.*

Laten, *Fig.* 70, A, B en C de gegevene en D en E de gezochte punten zijn, zoodat $\angle$ ADB $= \angle p$, $\angle$ BEC $= \angle q$ en DE $= r$ zij: wanneer wij dan AD verlengen, tot dat zij EC in G snijdt, dan zijn, in den driehoek DEG, bekend, $\angle$ DEG $= q$; $\angle$ EDG $=$ ADB $= p$ en de zijde DE $= r$: de driehoek DEG is dan is alles gegeven en het vraagstuk komt dus eigenlijk hier op neder: *Drie punten A, B en C gegeven zijnde; door elk van dezelve eene lijn te trekken, zoodanig dat de driehoek DEG, door de onderlinge snijding dezer lijnen gevormd, in alles gegeven zij?*

Van dit voorstel nu vindt men eene oplossing in

in de *Meetk. Anal.* van den Heer DE GELDER §. 105. in de noot, en eene andere in onze *Verz. van Voorst.* I *Deel* n°. 169. door mij zelve gegeven. In deze laatste is aangewezen, dat dit voorstel in het algemeen voor vier-en-twintig onderscheidene oplossingen vatbaar is, welk aantal antwoorden, in ons tegenwoordig geval, slechts tot acht gebragt wordt; omdat hier, in de omstandigheden van het vraagstuk, eene nadere bepaling van den stand des driehoeks DEG, ten opzigte van de gegevene punten A, B en C, ligt opgesloten; want hier wordt gevorderd, dat de zijde DE en niet DG of EG gelijk aan de gegevene lijn *r* zij; waaruit dan van zelf blijkt: dat het aantal oplossingen slechts een derde kan zijn van het geen het zijn zou, indien er deze voorwaarde niet ware bijgevoegd. Neemt men bovendien nog in aanmerking, dat de voorsteller nog eene voorwaarde stelt, namelijk, dat men, na den hoek ADB gemeten te hebben, in de rigting van BD, tot in E, achter uitgaat en dus het punt E niet op BD; maar op derzelver verlengde moet vallen; dan is het klaar, dat, door deze nadere bepaling, wederom de helft van het getal der oplossingen, welke ons overbleven, worden uitgesloten, en dat er dus slechts vier oplossingen bestaan, welke aan alle de voorwaarden, door den opgever gesteld, in den striksten zin, zullen voldoen. Zie hier kortelijk de constructie, welke ik op de aangehaalde plaats gegeven heb.

Laten (*Fig.* 70.) op AB en BC cirkel-segmenten beschreven worden, bevattende de gegevene hoeken *p* en *q*; dan blijft er niets meer over, dan, *uit het snijpunt B dezer twee cirkels, de regte lijn BD zoodanig te trekken, dat derzelver gedeelte DE tusschen de omtrekken dezer cirkels begrepen, gelijk zij aan de gegevene lijn r*

Dit laatste voorstel is het 20e der onopgeloste, ach-

achter de *Grond. der Meetk.* van A. B. STRABBE: men vindt in de Werken van ons Genootschap onderscheidene oplossingen van hetzelve, als eene in de *Meetk. Anal.* van DE GELDER, §. 97, XXIe *Vr.;* eene van A. F. DE PAAUW in het *Wisk. Mengelw.* II D. N°. 41, en eindelijk eene van mij zelve, in de *Verz. van Voorst.* I D. N°. 168, en deze is de volgende.

Laten (*Fig.* 71.) B en B′ de snijpunten der twee cirkels zijn. Men beschrijve op de koorde BB′ eenen cirkel: indien dan B′F = B′F′, als vierde evenredige tot den afstand PQ der middelpunten, de halve koorde BB′ = ½ BB′ en de gegevene lijn *r* genomen wordt; dan zullen de lijnen BDE en BD E′, door de punten F en F′ getrokken, de begeerde zijn. Men heeft dan twee oplossingen en de lijnen BDE en BD′E′ hebben de eigenschap, dat zij met de koorde BB′ gelijke hoeken maken. (Zie 168e *Voorst.* I D. *Verz. van Voorst.*) Deze twee oplossingen worden slechts ééne, wanneer de vierde evenredige BF aan de middellijn BB′ gelijk wordt; het geen plaats heeft, wanneer 2PQ = *r* is, in welk geval, de punten F en F′ in B vallen, en de lijn BFE den stand van D″BE″, loodregt op BB′ verkrijgt. De lijn D″E″ is dan, daar eene koorde nooit grooter dan de middellijn zijn kan, de grootste waarde, welke *r*, zal het vraagstuk bestaanbaar zijn, hebben kan. Passen wij nu deze constructie op het voorgestelde vraagstuk toe.

Er zijn, in de opgave van het vraagstuk, geene bepalingen, waarom wij de cirkel-segmenten liever aan deze dan aan gene zijde der lijnen AB en BC (*Fig.* 70.) zouden plaatsen: er bestaan dus, ten opzigte van de ligging dezer segmenten, vier combinatien, offschoon de ligging der gegevene punten A, B en C, de waarde der gegevene hoeken *p* en *q*, en die der gegevene lijn *r* onveranderd blijven; daar nu elke dezer com-

binatien twee oplossingen geeft, verkrijgen wij er in het geheel acht.

1°. In *Fig.* 70, hebben wij de cirkel-segmenten boven de gegevene lijnen AB en BC geplaatst, en, de constructie wijders, als in *Fig.* 71, ingerigt hebbende, hebben wij de lijnen BDE en E'BD' verkregen, welke met BB' gelijke hoeken maken: de eerste lost het voorstel, in den eigenlijken zin op, omdat E in het verlengde van BD ligt; maar in de tweede ligt E' aan de andere zijde van D': en men is dus, in plaats van in de rigting BD' achter uit te gaan, van D' tot B genaderd.

2°. In *Fig.* 72, is het segment op AB naar boven; maar dat op BC naar beneden geplaatst, en dit geval, als in *Fig.* 71, behandeld hebbende, geeft ons de lijnen BDE en BD'E', waarvan de eerste alleen het voorstel in den eigenlijken zin oplost; daar in de tweede E' wederom op de lijn BD' en niet in derzelver verlengde ligt; zijnde hier daarenboven hoek BE'C niet $= q$, maar $= 180^\circ - q$.

3°. Stellen wij, *Fig.* 73, het segment op AB naar beneden, en dat op BC naar boven; dan verkrijgen wij, als boven, de lijnen BDE en BD'E', met BB' gelijke hoeken makende, en waarvan, even als in de voorgaande gevallen, alleen de eerste aan de voorgestelde voorwaarden voldoet.

4°. Stellen wij eindelijk in *Fig.* 74. beide segmenten beneden de lijnen AB en BC; dan verkrijgt men wederom BDE en BE'D', waarvan de eerste eene wezenlijke oplossing geeft, terwijl, in de tweede, het punt E' niet in het verlengde maar op de lijn BD' zelve gelegen is.

Vereenigen wij nu alle deze bijzondere oplossingen, voor dezelfde gegevens, in éénе en dezelfde figuur (zie *fig.* 75), dan hebben wij alle oplossingen, waarvoor het vraagstuk, voor de

drie

drie gegevene punten A, B en C, de twee gegevene hoeken ADB en BEC en de gegeven lijn DE, vatbaar is, in een duidelijk bestek bij elkander: de oplossingen, uit *Fig.* 70, 72, 73 en 74 volgende, zijn hier met 1 en 2, 3 en 4, 5 en 6, 7 en 8 geteekend, en de vraag is nu, welke van dezelve op de kaart behooren gebragt te worden? De oplossingen, geteekend 2, 4, 6 en 7, lijden geen twijfel; want zij beantwoorden aan eene voorwaarde, welke, in den striktsten zin, niet met de opgegevene overëenstemmen, daar, in alle deze, het punt E niet in het verlengde van BD; maar op BD zelve ligt, en, bovendien, de oplossing, met 4 geteekend, den hoek BEC niet $= q$, maar $= 180^o - q$ maakt; waaromtrent, in het werkdadige, geenen twijfel kan overblijven, daar men op het veld altoos weet, of men, in eene zekere rigting, zich van een zigtbaar voorwerp verwijdert of tot hetzelve nadert? De vier andere oplossingen, gemerkt met 1, 3, 5 en 8, lossen allen het voorstel op, in den volkomensten zin en zonder wijziging van eenige voorwaarde, en men zou dus in het onzekere kunnen blijven, welke van dezelve op de kaart behoorde gebragt te worden? indien niet de eene of andere waargenomene omstandigheid op het terrein deze keuze bepaalde: zoo zou men, bij voorbeeld, niet meer in het onzekere zijn, wanneer men, bij de waarneming, had opgemerkt, dat de rooilijn EDB binnen de beenen van den hoek ABC gelegen ware; want dan zou, in onze figuur, alleen de oplossing, gemerkt met N°. 1, kunnen dienen. Hadt men opgemerkt, dat de rooilijn tusschen het verlengde van AB en BC viel, zou de oplossing, met 8 geteekend, in de kaart moeten gebragt worden. Wist men, dat zij tusschen AB en het verlengde van BC viel, zou de oplossing, met 5 geteekend, alleen aan de waarneming beantwoorden; en eindelijk

zou

zou de oplossing, met 3 geteekend, voor de ware moeten gehouden worden, wanneer men had opgemerkt, dat DEB tusschen BC en het verlengde van AB gelegen ware.

Offchoon er dan slechts vier van de acht oplossingen aan het vraagstuk kunnen beantwoorden, verdienen de vier andere nogtans alle onze aandacht; daar zij met het voorstel in een naauw verband staan en hetzelve oplossen, in de onderstelling, dat men, na, in D, den hoek ADB gemeten te hebben, niet in BD eene gegevene lengte DE is te rug gegaan; maar in tegendeel even zoo veel tot het voorwerp B genaderd ware.

Overigens moet worden aangemerkt: dat dit aantal oplossingen, in sommige gevallen, minder wordt; ja dat er somtijds geen antwoord hoegenaamd mogelijk is; en dit alles is van de onderscheidene betrekkingen der gegevens afhankelijk. Is, in *Fig.* 71, $r = D'E'$, bestaat er slechts één, is $r > D'E'$ bestaat er geen antwoord. Wanneer, bij voorbeeld, de gegevens zoo gesteld mogten zijn, als in *Fig.* 76, 77, 78 en 79, is aangewezen, zou de eerste combinatie der segmenten slechts ééne, de tweede en derde combinatie geene, en de vierde twee antwoorden voortbrengen, welke laatste, (zie *Fig.* 79) daar de cirkels zich niet snijden, maar wel aanraken, merkwaardig is: men zou dus wel drie onderscheidene antwoorden hebben: maar, bij elke van deze, ligt E op BD en niet in derzelver verlengde en men verkrijgt dus zelfs niet ééne wezenlijke oplossing: nochtans kan dit geval in het werkdadige geen plaats hebben; aangezien de gegevens, omdat zij, door eene dadelijke meting bepaald worden, niet anders dan altijd onderling bestaanbaar kunnen zijn.

ANAL.

ANAL. OPLOSSING, door *Jacob de Gelder.*

Daar wij geene meetkundige conſtructie, welke, in den grond der zake, van de waarlijk fraaije, door de Heeren HUGUENIN en SCHMIDT, gegeven, onderſcheiden is, gevonden hebben, vergenoegen wij ons, met ſlechts onze analytiſche oplosſing medetedeelen; niet, omdat wij dezelve, in eenig opzigt, als geſchikter of beter oordeelen; maar alleen met oogmerk, om den jongen Wiskundigen, ter gelegenheid van de opgave van dit fraaije en voor het werkdadige belangrijke vraagſtuk, eene nieuwe en leerzame bijdrage tot zelfoefening opteleveren.

Daar de Heer HUGUENIN, in zijne opgave, geene bepaling maakt, hoedanig de punten A, B en C, ten opzigte van de lijn DE, moeten gelegen zijn, zoo doen er zich vier gevallen op, welke elk afzonderlijk overwogen en met elkander behooren vergeleken te worden, 1°. wanneer de lijn BDE (*Fig.* 65.) binnen de beenen van den hoek ABC ligt; 2°. wanneer zij tusſchen de beenen van den hoek ABP; 3°. wanneer zij binnen den hoek PBQ; en eindelijk 4°. wanneer zij binnen den hoek QBC gelegen is.

a. Stellen wij, met den Heer HUGUENIN, (*Fig.* 65.) AB $= a$, BC $= b$, hoek ABC $=$ B, DE $= c$, ADB $= \alpha$, BEC $= \beta$, BAD $= \varphi$ en $\varepsilon = 360^\circ - (\alpha + \beta + B)$; dan wordt, zie zijne oplosſing, (*Bladz.* 206):

$$Cos.\,\varphi - \left[Cot.\,\varepsilon + \frac{a\,Sin.\,\beta}{b\,Sin.\,\alpha\,Sin.\,\varepsilon}\right] \times Sin.\,\varphi = \frac{c\,Sin.\,\beta}{b\,Sin.\,\varepsilon}$$

Deze behandelen wij als volgt: (*) de coefficient van

(*) Dit willen wij als geene critiek aangemerkt hebben. Het ſtrekt alleen, om den Leden aantewijzen: dat men, in de berekening van deze vergelijking, de natuurlijke ſinus-tafel ontwijken kan, hetgeen thans doorgaans ge-

van $Sin.\ \varphi$ wordt, aangezien $Cot.\ \varepsilon = Cos.\ \varepsilon : Sin.\ \varepsilon$ is, gelijk aan $\dfrac{b\ Sin.\ \alpha\ Cos.\ \varepsilon + a\ Sin.\ \beta}{b\ Sin.\ \alpha\ Sin.\ \varepsilon}$.
Men stelle nu $b\ Sin.\ \alpha\ Cos.\ \varepsilon = P$; $a\ Sin.\ \beta = Q$, en $b\ Sin.\ \alpha\ Sin.\ \varepsilon = R$, en $Cot.\ \mu = (P + Q) : R$; dan wordt, $Cos.\ (\varphi + \mu) = c\ Sin.\ \beta\ Cos.\ \mu : b\ Sin.\ \varepsilon = M$, en men heeft dan, om den onbekenden hoek φ te vinden, het volgend stelsel van vergelijkingen:

(1) . . . $\varepsilon = 360^{\circ} - (\alpha + \beta + B)$ . . (I)
(2) . . . $P = b\ Sin.\ \alpha \times Cos.\ \varepsilon$
(3) . . . . . $Q = a\ Sin.\ \beta$
(4) . . . $R = b\ Sin.\ \alpha \times Sin.\ \varepsilon$
(5) . . . $Tang.\ \mu = (P + Q) : R$
(6) . . . $M = c\ Sin.\ \beta\ Cos.\ \mu : b\ Sin.\ \varepsilon$
(7) . . . $\begin{cases} \varphi = Boog\ Cos.\ M - \mu \\ \varphi = -\mu - Boog\ Cos.\ M \end{cases}$
(8) . . . $p = a : Sin.\ \alpha$; en $q = b : Sin.\ \beta$
(9) . . $BD = p \times Sin.\ \varphi$; en $AD = p \times Sin.\ (\alpha + \varphi)$
(10) $BE = q \times Sin.\ (\varepsilon - \varphi)$; en $CE = q \times Sin.\ (\varepsilon - \varphi + \beta)$

zullende de deugd der berekening daaruit blijken, wanneer het verschil der berekende waarden van BE en BD juist gelijk aan c is.

Nemen wij, om dit stelsel van formulen op een voorbeeld toetepassen, het *eerste van* den Heer Huguenin, (zie *Bladz.* 206) te weten $a = 785$, $b = 414$, $c = 306$, $B = 117^{\circ}41'26''$, $\alpha = 50^{\circ}30'$ en $\beta = 17^{\circ}45'$; dan vindt men (*)

geschiedt (en altijd geschieden kan,) en ook van belang is voor hen, die met de tafelen van Callet, welke de beste en naauwkeurigste zijn, plegen te werken. de Gelder.

(*) Wij oordeelen het geschikter de schets der berekening te geven; de jonge beoefenaar zal ons gemakkelijker, van stap tot stap, kunnen volgen, en zich in die soort van rekenen, zonder veel moeite, bekwaam kunnen maken. Wij gebruiken bestendig de tafelen van Callet, welke de beste, naauwkeurigste en gemakkelijkste zijn. de Gelder.

$\varepsilon = 174^\circ 31' 34''$	$L.\ T.\ \mu = 0,3750866$
$Log.\ P = 2,5020679$	$\mu = -67^\circ\ 8' 20'',78$
$Log.\ Q = 2,3789763$	$L.\ C.\ \mu = 9,5898856$
$Log.\ R = 1,5193324$	$Log.\ M = 9,9272873$
$P = -317,737073$	$B.\ C.\ M = +32^\circ 14' 17'',37$
$Q = +239,318493$	$\varphi = +99^\circ 22' 38'',15$
$R = +\ 33,062253$	*of* $\varphi = +54^\circ 54'\ 3'',41$
$P + Q = -\ 78,418580$	*en, hier uit volgt:*

1°. *Voor de eerste waarde van* φ,

BE = 1309, 739; BD = 1003, 739; AD = 510, 553; CE = 1856, 758.

2°. *Voor de tweede waarde van* φ,

BE = 888, 077; BD = 582, 077; AD = 1014, 058; CE = 532, 601.

zijnde alles ten naauwkeurigste berekend. Het onderscheid tusschen deze uitkomsten en die van den Heer HUGUENIN, moet aan het onderscheid der tafels toegeschreven worden.

b. Wil men de onbekende hoeken BAD en BCE, op eene andere wijze, vinden, zoo redenere men als volgt. In den vierhoek ABCF (*Fig.* 65.) is $A + C + B + \alpha + \beta = 360^\circ$; derhalve $\frac{1}{2}(A - C) = 180^\circ - \frac{1}{2}(B + \alpha + \beta)$. Men stelle dan kortheidshalve $\gamma = 180^\circ - \frac{1}{2}(B + \alpha + \beta)$, en $A = \gamma + \chi$, $C = \gamma - \chi$; (zijnde χ een onbekende hoek, welke, indien hij bekend geworden is, A en C insgelijks bekend doen worden,) dan is, in de driehoeken ADB en AEC,

$$Sin.\ \alpha : Sin.\ (\gamma + \chi) = a : BD$$
$$Sin.\ b : Sin.\ (\gamma - \chi) = b : BE$$

en hieruit volgt, aangezien $BE - BD = c$ is, de vergelijking:

$$b\ Sin.\ \alpha\ Sin.\ (\gamma - \chi) - a\ Sin.\ \beta\ Sin. \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots (\gamma + \chi) = c\ Sin.\ \alpha\ Sin.\ \beta$$

en wanneer men nu deze ontwikkelt, en als boven behandelt, dan vindt men het volgend stelsel van vergelijkingen:

(1)

(1) . . $\gamma = 180^\circ - \frac{1}{2}(B + \alpha + \beta)$ . . (II)
(2) . . . . $M = a\ Sin.\ \beta$
(3) . . . . $N = b\ Sin.\ \alpha$
(4) . . $Tang.\ x = \frac{M - N}{M + N} \times Tang.\ \gamma$
(5) . . $K = -\frac{c \times Sin.\ \alpha\ Sin.\ \beta \times Cos.\ x}{[M + N] \times Cos.\ \gamma}$
(6) . . $\chi = \begin{cases} 1^\circ.\ Boog\ Sin.\ K - x \\ 2^\circ.\ 180^\circ - Boog\ Sin.\ K - x \end{cases}$
(7) . . $A = \gamma + \chi$ *en* $B = \gamma - \chi$
(8) . . $p = a : Sin.\ \alpha$; *en* $q = b : Sin.\ \beta$
(9) $BD = p \times Sin.\ A$ *en* $BE = q \times Sin.\ C$
(10) $AD = p \times Sin.\ (A + \alpha)$ en $CE = q \times Sin.\ (C + \beta)$

Dit ſtelſel van formulen op hetzelfde voorbeeld toepasſende, vindt men:

$\gamma = 92^\circ 58' 13''$	$x = -70^\circ 6' 33'',77$
$M = 239,31849$	*Log.* $K = 9,9272873$
$N = 319,45259$	*B.Sin.* $K = -57^\circ 45' 42'',73$
$M + N = 558,77108$	*en* $1^\circ \chi = +12^\circ 20' 51'',04$
$M - N = -80,13410$	*of* $2^\circ \chi = +307^\circ 52' 16'',50$
L.Tang.x $= 0,4415197$	*en hieruit vindt men:*

$1^\circ. \begin{cases} A = 99^\circ 22' 38'',04 \\ B = 74^\circ 40' 55'',96 \end{cases}$ $2^\circ. \begin{cases} A = 34^\circ 54' 3'',50 \\ C = -220^\circ 50' 29'',50 \end{cases}$

men kan, in de tweede waarde, voor C ook nemen $139^\circ 9' 30'' 5$, welke met $- 220^\circ 50' 29'' 50$ dezelfde ſinus heeft.

c. Wil men de hoeken ABE en CBE zoeken, zoo ſtelle men, wijl hoek ABC = B bekend is, hoek ABE = $\frac{1}{2}$ B — ψ en hoek CBE = $\frac{1}{2}$ B + ψ; dan heeft men:

$$BAD = 180^\circ - \alpha - \tfrac{1}{2} B + \psi$$
$$BCE = 180^\circ - \beta - \tfrac{1}{2} B - \psi$$

en nu vindt men, door de evenredigheden,

$$Sin.\ BEC : Sin.\ C = b : BE$$
$$Sin.\ ADB : Sin.\ A = a : BD$$

en de vergelijking BE — BD = c, (hetgeen wij wederom aan den Lezer ter zelfoefening overlaten,) het volgend ſtelſel van vergelijkingen:

(1)

(1) . . . . $A = b \; Sin . \alpha \; Sin . \; (\frac{1}{2}B + \beta) \ldots$ (III)
(2) . . . $A' = b \; Sin . \alpha \; Cos . \; (\frac{1}{2}B + \beta)$
(3) . . . $B = a \; Sin . \beta \; Sin . \; (\frac{1}{2}B + \alpha)$
(4) . . . $B' = a \; Sin . \beta \; Cos . \; (\frac{1}{2}B + \alpha)$

$$(5) \ldots Tang . \eta = \frac{A - B}{A' + B'}$$

$$(6) \ldots L = \frac{c \; Sin . \alpha \; Sin . \beta \; Cos . \eta}{A' + B'}$$

$$(7) \ldots \psi = \begin{Bmatrix} 1^o . \; Boog \; Sin . L - \eta \\ 2^o . \; 180^o - \eta - Boog \; Sin . L \end{Bmatrix}$$

(8) . . . $ABE = \frac{1}{2}B - \psi$ *en* $CBE = \frac{1}{2}B + \psi$

$$(9) \ldots \begin{Bmatrix} A = 180^o - \frac{1}{2}B - \alpha + \psi \\ C = 180^o - \frac{1}{2}B - \beta - \psi \end{Bmatrix}$$

(10) . . . $p = a : Sin . \alpha$; *en* $q = b : Sin . \beta$
(11) . . . $BD = p \; Sin . A$; *en* $BE = q \; Sin . C$

$$(12) \ldots \begin{Bmatrix} AD = p \times Sin . \; (\frac{1}{2}B - \psi) \\ CE = q \times Sin . \; (\frac{1}{2}B + \psi) \end{Bmatrix}$$

Men vindt, dit ſtelſel van formulen op hetzelfde voorbeeld toepasſende,

$\frac{1}{2}B + \alpha = 109^o 20' 43''$	*L. T.* $\eta = 1,2115718$
$\frac{1}{2}B + \beta = 76^o 35' 43''$	$\eta = -86^o 29' 3'',669$
$A = +310,749643$	*Log.* $L = 9,9272876$
$B = +225,806467$	*B. S.* $L = -57^o 45' 42'',934$
$A' = +74,058068$	1° $\psi = +28^o 43' 20'',737$
$B' = -79,276700$	2° $\psi = +324^o 14' 46'',601$
$A - B = +84,943176$	*Met deze twee waarden*
$A' + B' = -5,218632$	*van* ψ *vindt men,*

Voor de eerste waarde van ψ:
$ABE = 30^o 7' 22'',263$ *en* $CBE = 87^o 34' 3'',737$
$A = 99^o 22' 37'',737$ *en* $C = 74^o 40' 56''263$
en voor de tweede waarde van ψ:
$ABE = -265^o 24' 3'',601$ *en* $CBE = 383^o 5' 29'',601$
of, *dat op het zelfde uitkomt,*
$ABE = +94^o 35' 56'',399$ *en* $CBE = 23^o 5' 29'',601$
$A = 34^o 54' 3'',72$ *en* $C = 139^o 9' 30'',1.$

hetwelk alles, met de berekening der voorgaande formulen overeenſtemt.

Men zal, langs nog andere wegen, tot de op-

lossing van dit werkstuk kunnen komen: dan, de drie opgegevene stelsels van formulen, zijn, onder allen, die welke wij beproefd hebben, voor de berekening in getallen de eenvoudigste; inzonderheid geven wij aan de twee eerste stelsels de voorkeur. Men ziet intusschen, hoe naauwkeurig onderscheidene stelsels van formulen, uit verschillende oplossingen ontstaande, steeds met elkander overeenstemmen; mits men met aandacht en naauwkeurigheid te werk ga.

Wij hebben dus het eerste geval, wanneer de lijn BDE tusschen de voorwerpen A en C, of in den hoek ABC, gelegen is, afgehandeld, en er blijft ons nog de beschouwing der gevallen over, in welke de lijn BDE in de hoeken ABP, PBQ en QBC valt. In de daad zouden elk dezer gevallen eene bijzondere figuur en eene bijzondere oplossing vereischen, welke, niet tegenstaande de overeenstemming, welke men in dezelve vinden zou, in andere opzigten echter van elkander en van het eerste geval zouden schijnen onderscheiden te zijn; maar de oplossingen dezer gevallen zijn alle in de stelsels van formulen, uit de oplossing van het eerste geval volgende, begrepen, mits men slechts oplettend zij, op welk eene wijze de teekens der gegevens, ten opzigte dezer andere gevallen, veranderen. Het zal nogtans voor den eerstbeginnenden nuttig zijn dat hij deze gevallen oplosse, (*) op dat hij zich ook,

(*) Dit zal hem meer nut aanbrengen, dan de nutteloze en geestvermoeijende speculatien in de oneindigheid van *Polygonalen*, *Columnaren* en *Pirgoïdalen*, welke in de dadelijke toepassing geen nut aanbrengen: bovendien is de grondige naarvorsching van een enkel fraai en leerzaam werkstuk, gelijk het tegenwoordige is, oneindig meer waard dan de oplossing van honderd anderen; wij hebben ook om die reden alleen dit fraaije en leerzame werkstuk zoo uitvoerig behandeld: de andere

ook, door de dadelijke proef, van de waarheid onzer gevolgtrekkingen moge verzekeren.

Wanneer men een werkstuk, dat aan onderscheidene gevallen onderworpen is, voor een enkel geval, heeft opgelost, dan is het stelsel van vergelijkingen of formulen, voor dit enkele geval verkregen, algemeen voor alle de andere; mits dat men oplette, welke grootheden, in de overige gevallen, van teeken, dat is van positief in negatief, of van negatief in positief veranderen; en tot dat einde moet men de lijnen, welke gezochte punten met gegevens vereenigen, de figuur in de gedachte doen rondwandelen, en aandachtig nagaan; welke gegevens standvastig blijven en welke andere gegevens van teeken veranderen.

De berekening van de drie stelsels van formulen, hier boven opgegeven, is gegrond op de onderstelling, dat de lijn BDE binnen den hoek ABC, of dat het voorwerp C ter regter en het voorwerp A ter linkerhand van deze lijn gelegen zij. Natuurlijk heeft men de lijnen *a*, *b* en *c*, benevens de hoeken B; α, β als positief aangenomen; want het positief en negatief zijn der grootheden is slechts betrekkelijk; zij worden slechts in vergelijking van andere negatief.

Laten wij nu de lijn BDE, van de regter naar de linkerhand, doen bewegen, zoodanig dat de hoek ABE steeds kleiner wordt, en laten wij hem eene geheele omwenteling om het punt B laten volbrengen: dan blijven de lijnen *a*, *b* en en *c*, benevens de hoek B, standvastig, en kunnen, als zoodanige, noch positief noch negatief wor-

komeling in de Wiskunde moet echter, om onzen voordragt grondig te kunnen nagaan, het VIII en IX Boek onzer *Beg. der Meetk.* raadplegen; hij zal daarin den waren sleutel vinden van het geen hem hier te zwaar om te verstaan mogt voorkomen. DE GELDER.

worden; zij blijven derhalve, in alle mogelijke gevallen, hetzelfde positieve teeken behouden: de hoeken α, β, als mede BAD, BCE, CBE en ABD, veranderen daarentegen van teeken en wel in de volgende rangorde:

1°. In den hoek ABC, blijven de hoeken α en β, ten aanzien van de lijn BDE, in dezelfde betrekkelijke ligging; zij veranderen dus wel in grootte; maar niet van teeken en blijven positief, omdat zij, in de oorspronkelijke stelsels der formulen voor dit geval, als positief zijn aangenomen. De hoek ABD wordt kleiner; maar de hoek BAD nadert steeds tot 180°.

2°. Wanneer de lijn BDE op AB valt, dan wordt $\alpha = 0$; ABE $= 0$, en BAD $= 180°$. Alle grootheden welke, in de opgegevene formulen, *Sin.* α tot factor hebben, verdwijnen. Dan, het is niet noodig, zich hier mede op te houden; wijl, in dit geval, voor het eerste stelsel, bij voorbeeld, $\phi = 180°$ wordt, en de *form.* (10) van dit stelsel, hier alleen te pas kan komen. Ook ziet men duidelijk; dat dit geval tot de oplossing van eenen driehoek, waarvan ééne zijde en de drie hoeken gegeven zijn, gebragt wordt.

3°. Is de lijn BDE door het punt A gegaan en in den stand N°. 2. gekomen, en liggen dus de voorwerpen A en C, beide ter regterhand van B: dan is, de hoek α aan de andere zijde van de lijn BDE gekomen, hij is door de nul gegaan, en moet dus, ten aanzien van de ligging, N°. 1, (zie *Beg. Meetk.* §. 532) als negatief beschouwd worden. De hoek β is, in dit geval, wel van waarde verandert; maar vermits hij aan dezelfde zijde van de bewegende lijn BDE gebleven is, is hij natuurlijk positief gebleven. De hoek BAD de ϕ van het stelsel (I) is nu, zoo als het boogje *def* aanwijst, grooter dan 180° geworden; maar de hoek ABD is, daar hij aan de andere zijde van AB (welke de oorsprong zijner telling is,)

is,) valt, negatief geworden: *alle de drie stelsels van formulen, voor het eerste geval gevonden, zullen dan op dit tweede geval toepasselijk worden, indien men slechts* α *negatief neemt en de teekens, welke de hulpgrootheden, door die onderstelling, verkrijgen, naar de bekende regels verandert.*

4°. Wanneer de lijn BDE, uit den hoek ABP, in den hoek PBQ overgaat, en op het verlengde van BC valt, dan wordt $\beta = o$, en men ziet duidelijk, dat alsdan het werkstuk wederom tot de oplossing van eenen eenvoudigen driehoek wordt terug gebragt.

5°. Maar is de lijn BDE, bij N°. 3, in den hoek PBQ overgegaan, en ligt het voorwerp A ter regter en het voorwerp C ter linkerhand van de lijn BDE; dan ligt ook de hoek α ter regterhand van BDE, en de hoek β, welke door nul gegaan is, is nu ter linkerzijde van dezelve gekomen en daar zulks, in allen opzigte, het tegenovergestelde van het eerste geval is, *moeten de hoeken* α *en* β *beide negatief genomen en de teekens der hulpgrootheden, in alle de oorspronkelijke stelsels van formulen, naar de bekende regels, bepaald worden;* de lijn AD is nu den boog *ghi* doorgeloopen, en de negatieve hoek ABD wordt nog steeds grooter.

6°. Valt de lijn BDE op BQ, dan wordt wederom alles door de oplossing van eenen enkelden driehoek EAC volbragt, en de hoek α gaat dan door nul.

7°. Is de lijn BDE, in den stand N°. 4, tusschen de beenen van den hoek CBQ gekomen, dan is de hoek α, na door nul gegaan te zijn, aan de linkerzijde van de lijn BDE gekomen, en is dus, ten aanzien van de standen N°. 2 en N°. 3, negatief, dat is, daar hij in dezelve negatief was, positief geworden; maar de hoek β aan dezelfde zijde van BDE gebleven zijnde, heeft

zijn negatieve teeken behouden; de hoek BAD is nu, daar hij den boog *klm* is doorgeloopen, reeds grooter dan 360° geworden, en de negatieve hoek ABD is reeds over de 180° gekomen. Uit dit alles ziet men dan: *dat de oorspronkelijke stelsels van vergelijkingen, voor dit geval, zullen dienen, wanneer men, in dezelve α, positief en β negatief stelt.*

8°. In den overgang eindelijk van het derde tot het eerste geval, heeft hetzelfde verschijnsel, als in den overgang van het eerste tot het tweede, van het tweede tot het derde, *enz.* plaats. Hier wordt de hoek β = 0 en gaat van den negatieven tot den positiven toestand over, terwijl de hoek α in zijnen positiven toestand blijft.

In deze beschouwing, zijn alle mogelijke gevallen begrepen; het zij men de lijn BE, en de stelling der punten D en E op dezelve, (zoo als wij in de redeneering aangenomen hebben,) standvastig, of dat men dezelve veranderlijk aanneme.

De Heer Huguenin heeft zijn werkstuk aan de voorwaarde onderworpen, dat men, na, in D, den hoek α waargenomen te hebben, in de rigting van BD tot in E achteruitga en aldaar den hoek β waarneme; doch indien hij gezegd had: *uit het punt D kan men den hoek ADB waarnemen en, in een ander punt E, op de lijn BD genomen, kan de hoek BEC waargenomen worden*, zou dit punt E of *voorwaards* of *achterwaards* kunnen gelegen zijn; nu is *voorwaards* en *achterwaards* hetzelfde, wat men in de analytische taal, kunstmatig, *positief* en *negatief*, of omgekeerd, *negatief* en *positief* noemt; daar wij dan, in onze oorspronkelijke berekening van het geval N°. 1, de lijn DC = *e*, dat is de afstand van E tot D, positief genomen hebben, zoo volgt hieruit: dat, wanneer men, in plaats van achteruittegaan, vooruit gaat, DE = *c*, ten aanzien van het eerste geval, negatief worden zal:

men

men zal dan slechts in de oorspronkelijke stelsels van formulen de grootheid c negatief behoeven te stellen, om, ingevalle men vooruitgegaan is, door die zelfde oorspronkelijke stelsels van formulen, het werkstuk op te lossen; en, daar voor de negatieve waarde van c, even als voor hare positieve waarde, vier gevallen bestaan, bestaan er, het werkstuk in deszelfs uitgestrektste algemeenheid nemende, acht gevallen; het geen dan alles ten volle overëënkomt met de fraaije constructie, welke de Heer SCHMIDT ons hier boven heeft medegedeeld.

Uit deze verklaring blijkt nu volledig: 1°. dat de stelsels der formulen, benevens alle anderen, die men, om het voorstel op te losfen, zou kunnen vinden, ontworpen zijn, in de onderstelling, dat het punt B, ten aanzien van de standpunten D en E des waarnemers, tusschen de twee andere punten A en B en boven de lijn AC gelegen is, en dat men, na den hoek ADB = α te hebben waargenomen, zij achteruitgegaan, om den hoek BEC = β waartenemen; 2°. dat elk dezer stelsels op zich zelve dienen kan, om, in alle gevallen, zonder onderscheid, de stelling der punten D en E te berekenen; mits dat 1°. wanneer men in plaats van achteruit te zijn gegaan, vooruit gegaan zij, DE = c negatief genomen worde; 2°. dat men, indien de voorwerpen A en C ter regterhand van het voorwerp B liggen, de hoek α negatief en hoek β positief neme; 3°. dat men, wanneer het punt B tusschen de punten A en C, maar beneden de lijn AC gelegen is, de hoeken α en β beide negatief neme; 4°. en dat men eindelijk, ingevalle de voorwerpen A en C ter linkerhand van het voorwerp B liggen, α positief en β negatief aanneme.

Met deze regels, welke uit den aard der figuur volgen, zal men in het werkdadige alle gevallen, dit werkstuk betreffende, door hetzelfde stelsel

 van

van formulen, in getallen kunnen berekenen. In deze uit de natuur genomene gevallen, kunnen de gegevens nimmer onderling onbestaanbaar zijn: men behoeft slechts één geval te berekenen; maar daar hetzelve twee oplossingen geeft, moet men, na de berekening, onderzoeken, welke van dezelve de wezenlijke waargenomene standpunten D en E geven, en hieromtrent kan nimmer eene onzekerheid bestaan, dan wanneer de twee oplossingen de twee systemata der standpunten D en E zoo na bij elkander mogten brengen, dat het onderscheid als 't ware eene oneindige kleine grootheid mogte zijn.

Doch, bijaldien de gegevens uit geene dadelijke waarneming ontleend zijn, en het werkstuk, zonder eenige bepaling, op de algemeenste wijze, voorgesteld, een voorwerp van beschouwing en oefening wordt, dan moet men, met de aangenomene gegevens, alle de boven opgenoemde gevallen berekenen. Wij hebben, daar deze zaak van zoo veel gewigts is, noodig geoordeeld, de uitkomsten der berekeningen van het eerste voorbeeld, door den Heer HUGUENIN, *Bladz.* 206 opgegeven, in alle mogelijke gevallen genomen, alhier medetedeelen; de berekening is naar het stelsel (II) geschied en het stelsel (I) heeft met eene afwijking van $0''$, 1 of $0''$, 2 dezelfde uitkomsten gegeven.

a. Voor het eerste geval, als namelijk de lijn ADE in den hoek ABC ligt (zie altijd *fig.* 65,) en c positief genomen wordt, is $\gamma = 87^\circ 1' 47''$, $x = -70^\circ 6' 33'',77$, *Boog Sin.* K $= -57^\circ 45' 42'',73$, en $\chi = 12^\circ 20' 51'',04$, of $= 307^\circ 52' 16'',50$ en hier mede vindt men:

$$1^\circ \begin{bmatrix} A = 99^\circ 22' 38'',04 \\ C = 74^\circ 40' 55'',96 \end{bmatrix} \text{of } 2^\circ \begin{bmatrix} A = 394^\circ 54' \ 3'',50 \\ C = -220^\circ 50' 29'',50 \end{bmatrix}$$

doch c negatief nemende, blijft alles hetzelfde, alleen verkrijgt *Boog Sin.* K het tegengestelde teeken, en wordt $= + 57^\circ 45' 42'',73$; en nu is

$\chi =$

$\chi = 127^\circ 52' 16'',40$, of $192^\circ 20' 51'',14$; hiermede wordt nu:

$$1^\circ \begin{bmatrix} A = +214^\circ 54' \; 3'',40 \\ C = -\;40^\circ 50\; 29'',40 \end{bmatrix} 2^\circ \begin{bmatrix} A = \;279^\circ 22' 38'',14 \\ C = -105^\circ 19' \; 4'',14 \end{bmatrix}$$

b. Voor het tweede geval, wanneer de lijn BDE in den hoek ABP ligt, is voor de poſitive waarde van c, $\gamma = 137^\circ 31' 47''$; $x = 81^\circ 5' 45'',25$; *Boog Sin*. K $= 10^\circ 51' 53'',65$; $\chi = -70^\circ 13' 51'',60$ of $+ 88^\circ 2' 21'',10$ en hieruit volgt dan verder:

$$1^\circ \begin{bmatrix} A = \;67^\circ 17' 55'',40 \\ C = 207^\circ 45' 38'',60 \end{bmatrix} 2^\circ \begin{bmatrix} A = \;225^\circ 34' \; 8'',10 \\ C = \;49\; 29' 25'',90 \end{bmatrix}$$

en wanneer men c negatief neemt, wordt

$$1^\circ \begin{bmatrix} A = \;45^\circ 34' \; 8'',10 \\ C = 229^\circ 29' 25'',90 \end{bmatrix} 2^\circ \begin{bmatrix} A = 247^\circ 17' 55'',40 \\ C = \;27^\circ 45' 38'',60 \end{bmatrix}$$

c. Valt de lijn BDE in den hoek PBQ; dan is, voor de poſitive waarde van c, $\gamma = 155^\circ 16' 47''$; $x = 3^\circ 46' 38'',55$, *Boog Sin*. K $= -\; 8^\circ 8' 7'',54$ en $\chi = -\; 11^\circ 54' 46'',09$ of $= + 184^\circ 21' 28'',99$; waaruit volgt:

$$1^\circ \begin{bmatrix} A = 143^\circ 22' \; 0'',91 \\ C = 167^\circ 11' 38'',09 \end{bmatrix} 2^\circ \begin{bmatrix} A = \;339^\circ 38' 15'',99 \\ C = -\;29^\circ \; 4' 41'',99 \end{bmatrix}$$

en, wanneer men c negatief neemt:

$$1^\circ \begin{bmatrix} A = 159^\circ 38' 15'',99 \\ C = 150^\circ 55' \; 8'',01 \end{bmatrix} 2^\circ \begin{bmatrix} A = \;323^\circ 22' \; 0'',91 \\ C = -\;12^\circ 48' 26'',91 \end{bmatrix}$$

d. Valt eindelijk de lijn BDE in den hoek QBC; dan is, voor de poſitieve waarde van c, $\gamma = 104^\circ 46' 47''$, $x = 87^\circ 49' 59'',37$; *Boog Sin*. K $= -\; 7^\circ 39' 3'',48$, $\chi = -\; 95^\circ 29' 2'',85$, of $\chi = 99^\circ 49' 4'',11$, en hieruit volgt dan:

$$1^\circ \begin{bmatrix} A = \;\;9^\circ 17' 44'',15 \\ C = 200^\circ 15' 49'',85 \end{bmatrix} 2^\circ \begin{bmatrix} A = 204^\circ 35' 51'',11 \\ C = \;\;4^\circ 57' 42'',89 \end{bmatrix}$$

en, wanneer men c negatief ſtelt:

$$1^\circ \begin{bmatrix} A = \;24^\circ 35' 51'',11 \\ C = 184^\circ 57' 42'',89 \end{bmatrix} 2^\circ \begin{bmatrix} A = 189^\circ 17' 44'',15 \\ C = \;20^\circ 15' 49'',85 \end{bmatrix}$$

Om zich deze uitkomſten duidelijk voorteſtellen, moet men, met eene ſchaal en eenen transporteur, de figuur teekenen en de gevondene hoeken A en C in dezelve brengen: men zal dan bevinden: 1°. dat er, voor de poſitieve waarde van c, twee

 ſtan-

ſtanden van de punten D en E, in den hoek ABC, één ſtand in den hoek PRQ, en één in den hoek QBC aan de gegevens voldoen; dat, voor de negatieve waarde van *e*, één ſtand in den hoek ABP en één in den hoek PBR insgelijks aan de gegevens voldoen; er beſtaan dus, in den volſtrekten zin, *vier* oploſſingen, en, wanneer men uit het vraagſtuk het woord *achteruitgaan* weglaat, *zes*: en dat er geen meer zijn, hangt af van de bijzondere betrekking der gegevens; deze kan zoodanig beſtaan, dat er, voor — *e*, insgelijks vier antwoorden plaats hebben. Maar men heeft zestien waarden voor A en C; wat kunnen de tien andere onbeſtaanbare waarden beteekenen? Is hier geene tegenſtrijdigheid, daar men voor A en C wezenlijke en geene onbeſtaanbare uitdrukkingen verkrijgt? Doch, dit volgende zal de zaak ophelderen. In het algemeen zijn de geſtelde gegevens onderling onbeſtaanbaar, wanneer, in het ſtelſel (I) $M > 1$, in het ſtelſel (II) $K > 1$, en in het ſtelſel (III) $L > 1$ is; want, daar, in dit geval, de eindvergelijking van het werkſtuk niet beſtaan kan, zoo zijn ook de gegevens onderling onbeſtaanbaar; *maar, wanneer de eindvergelijking van een werkſtuk beſtaanbaar is, kan het werkſtuk nogtans onbeſtaanbaar worden, wanneer andere vergelijkingen, welke met deze eindvergelijking in geen onmiddelijk verband ſtaan, met de gevondene wezenlijke waarden, uit die eindvergelijking afgeleid, ſtrijdig zijn.* En dit is juist hier het geval; want, in het algemeen, moet 1°. $A + B + C + \alpha + \beta = 360°$; 2°. in den eerſten en vierden ſtand, $BAD + \alpha < 180°$ en, in den tweeden en derden ſtand, $360° - BAD + \alpha < 180°$; nu zal men bevinden: dat alle de boven opgegevene waarden van A en C, welke geen beſtaanbaar antwoord op het vraagſtuk geven, aan deze vergelijkingen niet voldoen. Nu vraagt men: van waar zestien antwoorden,

daar

daar er flechts acht mogelijk zijn? De zaak aandachtig overwegende zal men zien, dat ook de gevallen, waarin men, niet de hoeken ADB en BEC, maar wel derzelver fupplementen heeft waargenomen, in deze oplosfingen mede begrepen zijn; en dit alzoo zijnde, dan beftaan er nog twee zoodanige antwoorden in den hoek ABC. Doch, de Lezer onderzoeke zelve; wij zouden verder gaande, eer eene verhandeling dan eene oplosfing fchrijven; bij eene andere gelegenheid meer hier van. Wij moeten echter, voor den eerstbeginnenden, nog dit weinige ter opheldering zeggen. De hoeken A en C komen, in de boven opgegevene antwoorden, in alle quadranten, *pofitief* en *negatief* voor; om deze nu met den transporteur te plaatfen, moet men de pofitieve en negatieve hoeken A en C, van de lijnen AB en CB beginnen te tellen, en wel in die rigtingen, welke in de figuur met de teekens + en — aangewezen zijn, hetgeen, uit de voorgaande befchouwingen, duidelijk genoeg blijkt.

Ten flotte merken wij aan: 1°. dat dit voorftel een bijzonder geval fchijnt te zijn van N°. 63 van dit Deel, door den Heer HUGUENIN opgegeven; maar de oplosfingen, aldaar gegeven, worden, indien men, in *Fig.* 44, BDE $= \beta =$ 180° en BDE $= \gamma = 0$, ftelt, onbepaald. 2°. Dat het tegenwoordig voorftel, indien C = 0 wordt, in het bekende vraagftuk van SNELLIUS verandert, gelijk ook het ftelfel der formulen (II), indien men $M : N = Tang. \gamma$ ftelt, in dat, hetwelk wij, in onze Beginfelen, gegeven hebben, op de letters na, verandert.

N°. 91.

N°. 91. Door

U. Huguenin, en Jacob de Gelder. (*)

Daar de punten a, b en c (*Fig.* 80.) benevens de cirkel ABC in ſtand of ſtelling gegeven zijn, zoo zijn, (P het middelpunt des cirkels zijnde,) de lijnen $aP = a$, $bP = b$, $cP = c$, benevens de hoeken $aPb = \alpha$, $bPc = \beta$ en $cPa = \gamma$, gegeven, en, daar de cirkel ook in grootte gegeven is, is ook zijn ſtraal $AP = BP = CP = r$ gegeven. Men ſtelle de onbekende hoeken $APa = \phi$, $BPb = \omega$ en $CPc = \zeta$; dan wordt $aPC = \gamma + \zeta$, $bPA = \alpha + \phi$ en $cPB = \beta + \omega$: men heeft dan, in den driehoek aPC, de bekende evenredigheid:

$aP + CP : aP - CP = Tang. \frac{1}{2}(aCP + PaC)$:
$\ldots\ldots\ldots Tang. \frac{1}{2}(aCP - PaC)$

maar aangezien $aCP + PaC = 180^\circ - aPC = 180^\circ - (\gamma + \zeta)$, $aCP - PaC = CAP - CaP = APa = \phi$, en $Tang. \frac{1}{2}(aCP + PaC) = Tang. (90^\circ - \frac{1}{2}(\gamma + \zeta)) = Cot. \frac{1}{2}(\gamma + \zeta)$ is, zoo wordt de voorgaande evenredigheid:

$a + r : a - r = Cot. \frac{1}{2}(\gamma + \zeta) : Tang. \frac{1}{2}\phi$

waaruit (voor $Cot. \frac{1}{2}(\gamma + \zeta)$ hare waarde ſchrijvende,) volgt:

$$Tang. \tfrac{1}{2}\phi = \frac{a - r}{a + r} \times \frac{1 - Tang. \frac{1}{2}\gamma\, Tang. \frac{1}{2}\zeta}{Tang. \frac{1}{2}\gamma + Tang. \frac{1}{2}\zeta} \ldots (1)$$

In den drieh. cPB, is hoek $cPB = \beta + \omega$ en dus $PBc + PcB = 180^\circ - (\beta + \omega)$; $PBc - PcB = PCB - PcB = CPc = \zeta$: insgelijks is, in den driehoek APb, $aPb = \alpha + \phi$, $PAb - PbA = PBA - PbB = BPb = \omega$ en $PAb + PbA = 180^\circ - (\alpha + \phi)$ en men vindt, op gelijke wijze, als boven,

Tang.

(*) Zie de oploſſing van de Gelder, in zijne *Meetk. Anal. Bladz.* 155, *en verv.*

$$Tang.\tfrac{1}{2}\zeta = \frac{c-r}{c+r} \times \frac{1 - Tang.\tfrac{1}{2}\beta\, Tang.\tfrac{1}{2}\omega}{Tang.\tfrac{1}{2}\beta + Tang.\tfrac{1}{2}\omega} \ldots (2)$$

$$Tang.\tfrac{1}{2}\omega = \frac{b-r}{b+r} \times \frac{1 - Tang.\tfrac{1}{2}\alpha \cdot Tang.\tfrac{1}{2}\varphi}{Tang.\tfrac{1}{2}\alpha + Tang.\tfrac{1}{2}\varphi} \ldots (3)$$

Men ſtelle nu, ter bekorting, $A = \frac{a-r}{a+r}$, $B = \frac{b-r}{b+r}$, $C = \frac{c-r}{c+r}$, $m = Tang.\tfrac{1}{2}\alpha$, $n = Tang.\tfrac{1}{2}\beta$ en $p = Tang.\tfrac{1}{2}\gamma$; dan verandert de vergelijking (1) in $Tang.\tfrac{1}{2}\zeta = \frac{A - p\,Tang.\tfrac{1}{2}\varphi}{Ap + Tang.\tfrac{1}{2}\varphi}$ en deze met de vergelijking (2) vergeleken hebbende, zal men vinden:

$$\frac{A - p\,Tang.\tfrac{1}{2}\varphi}{Ap + Tang.\tfrac{1}{2}\varphi} = C \times \frac{1 - n\,Tang.\tfrac{1}{2}\omega}{n + Tang.\tfrac{1}{2}\omega}$$

en dezelve, ten opzigte van $Tang.\tfrac{1}{2}\omega$, oploſſende,

$$Tang.\tfrac{1}{2}\omega = \frac{ACp - An + (C + pn)\,Tang.\tfrac{1}{2}\varphi}{ACnp + A + (ACn - p)\,Tang.\tfrac{1}{2}\varphi}$$

en vergelijkt men eindelijk deze waarde van $Tang.\tfrac{1}{2}\omega$ met die van vergelijking (3), zoo verkrijgt men:

$$\frac{ACp - An + (C + pn)\,Tang.\tfrac{1}{2}\varphi}{ACpn + A + (Cn - p)\,Tang.\tfrac{1}{2}\varphi} = B \times \frac{1 - m\,Tang.\tfrac{1}{2}\varphi}{m + Tang.\tfrac{1}{2}\varphi}$$

in welke alleen de onbekende hoek φ voorkomt: deze vergelijking verder ontwikkelende en kortheidshalve

$$P = C + np + Bm\,(Cn - p)$$

$$Q = m(C + np) + A(Cp - n) + ABm(Cnp + 1) - B(Cn - p)$$

$$R = A[B(Cnp + 1) + mn - Cmp]$$

ſtellende, verkrijgt men de vierkants-eindvergelijking:

$$P\,Tang.^2\tfrac{1}{2}\varphi + Q\,Tang.\tfrac{1}{2}\varphi = R$$

welke met behulp van de ſinus-tafel, aldus kan worden opgelost. Men vermenigvuldige dezelve met den factor $Cos.^2\tfrac{1}{2}\varphi$, dan wordt zij:

$$P\,Sin.^2\tfrac{1}{2}\varphi + Q\,Sin.\tfrac{1}{2}\varphi\,Cos.\tfrac{1}{2}\varphi = R\,Cos.^2\tfrac{1}{2}\varphi$$

dat

dat is, (zie DE GELDER, *Beg. der Meetk.* §. 546 en 547)

$$P.(1 - Cos.\varphi) + Q Sin.\varphi = R(1 + Cos.\varphi)$$

of, na ontwikkeling en verschikking der termen,

$$Sin.\varphi - \frac{P+R}{Q} \times Cos.\varphi = \frac{R-P}{Q}$$

Men stelle, in deze, den coefficient $\frac{P+R}{Q} =$ $Tang.\epsilon = Sin.\epsilon : Cos.\epsilon$; dan wordt (zie de noot op *Bladz.* 83, hier boven, of de *Meetk. Anal.* §. 347. *Bladz.* 265.)

$$Sin.(\varphi - \epsilon) = (R - P) Cos.\epsilon : Q$$

$$\text{of } Sin.[180^{\circ} - (\varphi - \epsilon)] = (R - P) Cos.\epsilon : Q$$

door welke de twee waarden, welke φ hebben kan, in getallen berekend kunnen worden.

De oplossingswijze, waarvan ik mij hier bediend heb, is ontleend, uit de *Géométrie de position* van CARNOT; zij is toepasselijk op alle in den cirkel te beschrijvene veelhoeken, zonder tot eene hoogere, dan tot eene vierkants-vergelijking op te klimmen, met deze uitzondering echter, dat de coefficienten ingewikkelder worden, naarmate het aantal van de zijden des veelhoeks toeneemt.

CASTILLON heeft dit voorstel, volgens het berigt van CARNOT, het eerst in den trant der ouden opgelost, in de *Mémoires de l'Acad. de Berlin* 1776; LA GRANGE gaf daarop dadelijk, in dit zelfde deel, eene analytische oplossing van hetzelve; terwijl LEXELL, in het IV *Deel der Petersburgsche Comment.* de formule van LA GRANGE construeerde. In het IV Deel van de *Memorie della Società Italiana* is dit voorstel, op eene cierlijke wijze, door den zestien jarigen OLTAJANO, opgelost, en op alle veelhoeken toegepast, en men vindt nog eene andere, in denzelfden trant, door MALFATI, in dit zelfde deel geplaatst.

Ik heb geene dezer oplossingen of constructien ge-

gezien; (*) doch, naar onze oplossing te besluiten, moet de constructie vermoedelijk zeer wijdloopig zijn; wij zullen daarom slechts onze vergelijking op het eenvoudigste geval toepassen en aannemen, dat de punten a, b en c de hoekpunten eens gelijkzijdigen driehoeks zijn en dat het middelpunt P des gegeven cirkels ABC tevens het middelpunt des cirkels zij, die om den driehoek abc kan beschreven worden. Voor dit geval, is nu $a = b = c$; hoek $\alpha = \beta = \gamma = 120°$; $m = n = p = Tang. 60°$, $A = B = C = (a - r) : (a + r)$ en nu wordt:

$$P = A + p^2 (A^2 - A + 1)$$

$$Q = p (A + 1) [A + p^2 (A^2 - A + 1)]$$

$$R = A \times [A + p^2 (A^2 - A + 1)]$$

$$\frac{P+R}{Q} = \frac{(A+1) [A+p^2 (A^2-A+1)]}{p(A+1)[A+p^2(A^2-A+1)]} = \frac{1}{p} = Cot. 60°$$

$$\frac{P-R}{Q} = \frac{(A-1)[A+p^2(A^2-A+1)]}{p(A+1)[A+p^2(A^2-A+1)]} = \frac{r}{a} Cot. 60°$$

Onze eindvergelijking verandert dan in deze:

$$Sin. \varphi - Cos. \varphi \, Cot. 60° = - \frac{r}{a} Cot. 60$$

waaruit volgt: $Cos. 60° Cos. \varphi - Sin. 60° Sin. \varphi = \frac{r}{a} Cos. 60°$; zijnde derhalve de twee wortels der vergelijking:

$$1° \quad Cos. (60° + \varphi) = \frac{r}{a} Cos. 60°$$

$$2° \quad Cos. [360° - (60° + \varphi)] = \frac{r}{a} Cos. 60$$

Uit den eersten wortel volgt nu: $a. Cos. (60° + \varphi) = r$

(*) In de *Meetk. Anal.* zullen wij, volgens onze belofte, dit werkstuk nader behandelen; voor het tegenwoordige zou zulks meer plaats innemen, dan de veelheid van stof, voor dit deel voorhanden, gedoogt. DE GELDER.

$= r\ Cos. 60^{\circ}$ en deze is ligt te construeren. Laten, (*Fig.* 81.) tot dat einde, de lijnen aP, bP en cP getrokken worden, snijdende den omtrek des gegevenen cirkels, in de punten, f, g en l; voorts trekke men fg en late uit P de loodlijn Ph op dezelve vallen; dan is $fPh = hPg = 60^{\circ}$, en $Ph = r\ Cos. 60$. Men beschrijve dan op aP, als middellijn, eenen cirkel, en stelle in deszelfs omtrek, uit P, de lengte $Pi = Ph$; zoo zal, na ai getrokken te hebben, $aiP = 90^{\circ}$, en $iP = aP \times Cos. aPi = a \times Cos. aPi = Ph = r \times Cos. 60^{\circ}$ zijn, en aPi is derhalve $= 60^{\circ} + \phi$. Daar voorts de lijn ai den gegevenen cirkel in A, en, verlengd zijnde, in C snijdt; en bovendien hoek $AiP = 90^{\circ}$ is, waardoor $Ai = iC$ wordt, zoo is (AP getrokken hebbende,) $APi = 60^{\circ}$, en alzoo $aPA = \phi$.

Daar nu, volgens deze constructie, de gelijkbeenige driehoeken fPg en APC volmaakt gelijk en gelijkvormig zijn, zoo is het gemakkelijk te zien: dat hoek $gPC = APa$, of dat $\phi = \zeta$ is, en, wanneer men nu aC, tot aan den omtrek in B, verlengt, zal men ligtelijk bewijzen: dat ABC de begeerde driehoek is, welke gelijkzijdig zal zijn en dat de punten A, B en b in dezelfde regte lijn liggen.

Bovendien is het zigtbaar; dat, makende $Pk = Pi = Ph$ en trekkende, door a en k, eene regte lijn, den gegevenen cirkel in A′ en B′ snijdende, A′ en B′ twee punten eens tweeden driehoeks zullen zijn, welke aan den tweeden wortel der eindvergelijking beantwoorden; wordende het derde punt C′ dezes tweeden driehoeks gevonden, wanneer men, door b en B′ eene regte lijn, tot aan den omtrek in C′, trekt; want het is zigtbaar, dat $aPk = aPi$ is, en dat de verheven hoek om aPk gelijk aan $360^{\circ} - (60^{\circ} + \phi)$ wordt.

Eindelijk moet ik nog aanmerken: dat, wanneer

neer a, b, c, d, *enz.* de punten eens regelmatigen veelhoeks zijn en P het middelpunt des omgeschrevenen cirkels, de hier opgegevene constructie slechts behoort gevolgd te worden, om eenen veelhoek, aan de vereischten der vraag voldoende, in eenen gegevenen concentrieken cirkel fgh *enz.* te beschrijven.

N°. 92. Door

U. Huguenin, en *Jacob de Gelder*.

Zij, *Fig.* 82, MN de as of abscissen lijn der kromme, waarvan $y = 864x - \frac{252x^2}{a} + \frac{28x^3}{a^2} - \frac{x^4}{a^3}$ de gegevene vergelijking is.

Om den oorsprong der ordinaten benevens de punten, in welke de kromme lijn de as MN snijdt, te bepalen, stelle men, in de gegevene vergelijking, $y = 0$; dan heeft men, na alles met a^3 vermenigvuldigd te hebben, $x^4 - 28ax^3 + 252a^2x^2 - 864a^3x = 0$. In deze is vooreerst $x = 0$; stelt men dus, dat het punt A de oorsprong der abscissen is, dan zijn, voor dit punt, x en y beide $= 0$, en de kromme lijn gaat dan door hetzelve; maar uit de laatste vergelijking vindt men, na dezelve door $x = 0$ gedeeld te hebben,

$$x^3 - 28ax^2 + 252a^2x - 864a^3 = 0$$

welke, daar zij eene derde magts vergelijking is, en dus ten minste nog éénen bestaanbaren wortel zal hebben, ons leert, dat de kromme lijn de as ten minste nog in één punt zal snijden. Men stelle, om de absciss, tot dit punt behoorende, te vinden, $x = 2az$; dan wordt de laatste vergelijking: $z^3 - 14z^2 + 63z - 108 = 0$, en stellende verder $z = v + \frac{14}{3}$; dan verandert de-

Q ze

ze wederom in $y^3 - \frac{7}{3}y - \frac{466}{27} = 0$, welke, door $y = \frac{\omega}{3}$ aantenemen, in $\omega^3 - 21\omega - 466 = 0$ verandert, waaruit, volgens den regel van CARDANUS, de eenige mogelijke wortel, $\omega = \sqrt[3]{[233+\sqrt{(233^2-7^3)}]}+\sqrt[3]{[233-\sqrt{(233^2-7^3)}]} = 8,65205$ gevonden wordt; $y = \frac{1}{3}\omega = 2,884016$; $z = y + 4\frac{2}{3} = 7,550683$; en $x = 2az = 15,101366a$. Maakt men dan AB $= x = 15,101366a$, zoo zal, daar voor deze waarde van x, de ordinaat $y = 0$ is, de kromme door het punt B gaan.

Om verder te onderzoeken, of de kromme zich veel of weinig boven de abscisfen lijn MN verheffe, ftelle men, in de gegevene vergelijking, $x = a$; dan verkrijgt men: $y = 864a - 252a + 28a - a = 639a$, bewijzende, dat de ordinaat y, voor $x = a$, meer dan zeshonderdmaal grooter dan de absbis wordt. Daar zich dan de kromme lijn zoo aanmerkelijk ver boven de abscisfen lijn MN verheft en dezelve, in zulk eene verhouding tusfchen de abscisfen en ordinaten, bezwaarlijk in eene figuur te brengen zoude zijn, zullen wij de ordinaten, naar eene honderdmaal kleinere fchaal dan die der abscisfen, in de figuur voorftellen. Wanneer men dan, volgens deze fchalen, AC $= a$ en CL $= 639a$ neemt, zal L het punt der kromme zijn, hetwelk tot de abscis, $x = a$, behoort

Het is uit de vergelijking zigtbaar, dat, aangezien hare termen, welke de evene magten van x inhouden, negatief zijn, y, voor alle negatieve waarden van x, niet flechts negatief blijven; maar dat de or-

Waarde van x	Waarde van y
. . . . . .	. . . . .
$6a$	$864a$
$5a$	$895a$
$4a$	$960a$
$3a$	$999a$
$2a$	$928a$
a	$639a$
$-a$	$-1145a$
$-2a$	$-2976a$
$-3a$	$-5697a$
$-4a$	$-9536a$
$-5a$	$-14745a$
$-6a$	$-21600a$
enz.	enz.

ordinaten, beneden de as, veel ſterker dan boven dezelve zijde [illegible]eijen: zoo als men, ook uit het nevenſtaande berekende tafeltje duidelijk ziet, uit hetwelk bovendien blijkt: dat de kromme, onder de as, met de bolle zijde naar dezelve gekeerd is, omdat de holle zijde, bij de eerſte poſitieve abscisſen ten minſte, naar dezelve gelegen is.

Uit dit tafeltje blijkt al verder: dat, voor de poſitieve absçisſen, de ordinaten beurtelings aangroeijen en afnemen en dat er diensvolgens ten minſte eene grootſte ordinaat beſtaan moet. Om nu deze te bepalen, differentiere men de gegevene vergelijking; dan heeft men:

$$\delta y = 864\,\delta x - \frac{504\,x\delta x}{a} + \frac{84\,x^2\delta x}{a^2} - \frac{4\,x^3\delta x}{a^3} \ldots (A)$$

en hieruit:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -x^3 + 21\,ax^2 - 126\,a^2x + 216\,a^3 = 0$$

waarvan $x = 3a$, $x = 6a$ en $x = 12a$ de wortels zijn, welker overeenkomſtige ordinaten, te weten, $y = 999a$, $y = 864a$ en $y = 1728a$, *maxima* of *minima* kunnen zijn.

Om dit nu te beslisſen, differentiere men de vergelijking (A); dan is:

$$\frac{\delta\delta y}{\delta x} = -\frac{504\,\delta x}{a} + \frac{168\,x\delta x}{a^2} - \frac{12\,x^2\delta x}{a^3}$$

en hieruit volgt dan verder:

$$\frac{\delta\delta y}{\delta x^2} = -\frac{12}{a^3} \times \left[x^2 - 14\,ax + 42\,a^2\right] \ldots (B)$$

ſtelt men nu in deze uitdrukking $x = 3a$; dan wordt derzelver waarde, of het rapport van $\delta\delta y : \delta x^2$ gelijk aan $-9a^2$, en dus negatief, verſtrekkende ten bewijze, dat, voor de coördinaten, $x = 3a$, $y = 999a$, de ordinaat y eene grootſte is. Stelt men voorts, in dezelfde uitdrukking (B), eerst $x = 6a$ en daarna $x = 12a$; dan wordt zij reſpectievelijk $+6a^2$ en $-18a^2$; waaruit gevolgelijk blijkt: dat $x = 6a$ de

 over-

overeenkomstige ordinaat tot eene kleinste, en $x = 12a$ dezelve tot eene grootste maakt.

Maar het zou mogelijk kunnen zijn, dat de punten der kromme lijn, welke, door deze grootste en kleinste ordinaten, bepaald worden, tevens keerpunten (points de rebroussement) waren? Om in dezen te beslissen, moet men de algemeene uitdrukking voor de subtangens der kromme lijn, welke, (gelijk men weet,) door het berekenen van de functie $y \times \frac{\delta x}{\delta y}$ gevonden wordt, en voor onze gegevene kromme lijn

$$\frac{y\delta x}{\delta y} = \frac{x}{4} \times \frac{x^3 - 28ax^2 + 252a^2x^2 - 864a^3}{x^3 - 21ax^2 + 126a^2x - 216a^3} \ldots (C)$$

is, in overweging nemen. Er kan geen keerpunt bestaan, of de twee takken AB en BC, (*Fig.* 83 en 84) welke door het keerpunt B vereenigd zijn, moeten, ten aanzien van de as MN, als in *Fig.* 83 liggen en dan behooren tot eenige abscis twee ordinaten; maar daar, in de gegevene vergelijking, y slechts tot de eerste magt opklimt, is zulk eene soort van keerpunt niet mogelijk; de takken AB en BC kunnen dan alleenlijk gelijk als in *Fig.* 84 liggen, en dan moet, buiten allen twijfel, de subtangens van dit keerpunt gelijk nul zijn: nu wordt, voor $x = 12a$, $x = 6a$ en $x = 3a$, de subtangens, respectievelijk $\frac{1768a}{0}$, $\frac{864a}{0}$ en $\frac{999a}{0}$, en dus, in alle deze gevallen, oneindig groot en niet gelijk nul, zoo als behoorde plaats te hebben, wanneer de punten, tot de grootste of kleinste ordinaten behoorende, keerpunten waren. Slechts, in twee gevallen, wordt de subtangens nul; te weten, wanneer $x = 0$ en (zie boven) $x = 15,101376a$ is; dat is in de twee punten A en B, (*Fig.* 82) in welke de kromme lijn de as MN snijdt.

De tangens van den hoek, onder welken de tan-

tangens van eenig punt eener kromme lijn hare as doorsnijdt, is, (gelijk elk weet) $= \partial y : \partial x$ en zij is, voor onze gegevene kromme lijn:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{4}{a^3} \times (x^3 - 21\,ax^2 + 126\,a^2x - 216\,a^3). \text{ (D)}$$

Stelt men, in deze uitdrukking, $x = 0$; dan wordt de tangens van den hoek, onder welke de kromme lijn de as, in den oorsprong A, doorsnijdt, gelijk aan $+ 864$, en de hoek zelve $= 89^\circ 56' 2'',7$; maar stelt men $x = 15,101376a$; dan wordt de tangens van den hoek, onder welken de kromme de as in het punt B snijdt $= - 1366,36$ en de hoek zelve $= - 89^\circ 57' 28'',9$; waaruit blijkt: dat de tangenten der punten A en B elkander, naar boven, onder eenen hoek van $0^\circ 6' 28'',4$, snijden, binnen welken hoek gevolgelijk de geheele kromme lijn gelegen is.

Het buigpunt P (*Fig.* 85,) eener kromme lijn, heeft de eigenschap, dat de tangens PT van dat punt niet slechts de kromme lijn in hetzelve aanraakt; maar ook doorsnijdt: het eene gedeelte PY der kromme is dan beneden en het ander gedeelte PX boven dezelve gelegen; of omgekeerd. Uit deze bepaling, kan nu gemakkelijk eenen regel, strekkende ter naarspeuring der buigpunten worden afgeleid. (*). Zij PM de ordinaat van het buigpunt P, TP de tangens en TM de subtangens van hetzelve: men neme, ter regter en linkerhand van P, de ordinaten P'M' en P''M'', op zekeren afstand $MM' = MM'' = i$; dan is (in-

(*) Wij nemen deze gelegenheid waar, om het gebrekkige van de leerwijze der Engelschen, welke de Heer STRABBE, in de VIII *Afdeel.* zijner *Fluxie-Rekening*, gevolgd heeft, ten gebruike der Leden, te verbeteren. In onze *Differentiaal* en *Integraal-Rekening*, zullen wij dit Stuk nogtans nader en met meer klaarheid kunnen toelichten. DE GELDER.

(indien men door het punt P de lijn RPR′ evenwijdig aan de as getrokken heeft,) P′R of P″R de verandering van de ordinaat, en, volgens het theorema van TAYLOR, zal

$$P'R = \frac{\delta y}{\delta x} \times i + \frac{\delta\delta y}{\delta x^2} \times \frac{i^2}{2} + \frac{\delta^3 y}{\delta x^3} \times \frac{i^3}{6} + \frac{\delta^4 y}{\delta x^4} \times \frac{i^4}{24} + \textit{enz.}$$

zijn, in welke vergelijking i flechts negatief behoeft genomen te worden (hetgeen dan de teekens van de onevene magten van i verandert,) om de waarde van P″R′ (met MM″ overeenftemmende) te vinden. Nu is de fubtangens TM van het punt P gelijk aan $\frac{y\delta x}{\delta y}$ en, uit de gelijkvormige driehoeken, TMP en PRN, volgt: TM : PM = PR : RN; dat is, $\frac{y\delta x}{\delta y} : y = i :$ RN; dus RN $= \frac{\delta y}{\delta x} \times i$; daar nu, in de figuur, P′N = P′R — RN is, zal

$$P'N = \frac{\delta\delta y}{\delta x^2} \cdot \frac{i^2}{2} + \frac{\delta^3 y}{\delta x^3} \cdot \frac{i^3}{6} + \frac{\delta^4 y}{\delta x^4} \cdot \frac{i^4}{24} + \frac{\delta^5 y}{\delta x^5} \cdot \frac{i^5}{120} + \textit{enz.} \quad (E)$$

moeten zijn. Befchouwen wij nu, in de figuur, den toeftand der lijn P′N ter regter en ter linkerzijde van het buigpunt P; dan ziet men: dat zij ter regterzijde van hetzelve pofitief; maar ter linkerzijde negatief moet zijn, terwijl zij, in het buigpunt zelve, verdwijnt. Zulks dan buiten twijfel zijnde, zal men uit de gefteldheid van de vergelijking (E) kunnen opmaken, wat er, in de nabijheid van een buigpunt P, gebeuren zal en aan welk kenmerk derhalve deszelfs aanwezen, in eene gegevene kromme lijn zal kunnen herkend worden? Het is, uit het *Theorema* van TAYLOR, bekend, dat de letter i (welke hier niet als eene oneindige kleine; maar als eene eindige grootheid genomen wordt,) altijd zoo klein kan genomen worden, dat elke term, op zich zelven,

ven, grooter is dan de fom van al de volgende (*); zulk eene waarde van i = MM' = MM" dan aannemende, zal de term $\frac{\partial\partial y}{\partial x^2} \times \frac{i^2}{2}$ (aangezien $i^2 = (-i)^2$ is,) altijd pofitief blijven; i derhalve zoodanig genomen hebbende, dat die term grooter dan de fom van al de anderen wordt, zal onze vergelijking, voor de negatieve waarde van i, niet negatief kunnen worden, ten zij men de coefficient $\frac{\partial\partial y}{dx^2}$ gelijk nul aangenomen hebbe. Neemt men dan deze coefficient gelijk nul aan, zoo zal (daar men voor i zulk eene waarde aangenomen heeft, dat $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \times \frac{i^3}{6}$ grooter is dan de fom van al de volgende termen,) de vergelijking (E) aan de voorwaarde voldoen dat, voor $+ i$ en $- i$, PN pofitief en negatief wordt. *Men zal dus de vergelijking* $\frac{\partial\partial y}{\partial x^2} = 0$ *moeten oplosfen en deze zal de abscisfen, tot de wezenlijk bestaande buigpunten behoorende, bepalen.* Maar zulks is niet genoeg: wanneer men, uit geene bijzondere omftandigheden weet, dat er buigpunten beftaan, zou men zich zeer kunnen bedriegen, daar de wortels der vergelijking $\frac{\partial\partial y}{\partial x^2} = 0$ niet altijd buigpunten geven; want, ingeval eenige wortel dezer vergelijking den volgenden term $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \times \frac{i^3}{6}$ nul maakt en tevens den onmiddelijk volgenden pofitief of negatief, ftrijdt zulk een wortel met de voornaame voorwaarde van een buigpunt en geeft er geen; doch wordt ook die term

(*) Dit te bewijzen zou ons te ver afleiden: men moet zulks hier, als bewezen, aannemen. DE GELDER.

term door de fubftitutie van dien wortel nul en de volgende pofitief of negatief; dan geeft hij een buigpunt; en op die wijze moet men met het onderzoek der volgende termen voortgaan, tot dat men de zaak geheel voldongen hebbe.

Pasfen wij nu dit verklaarde op onze gegevene kromme lijn toe. Wij hebben, zie boven:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{4}{a^3} \times (x^3 - 21\,ax^2 + 126\,a^2x - 216\,a^3)$$

en, door de volgende differentialen te zoeken, vindt men:

$$\frac{\delta\delta y}{\delta x^2} = -\frac{12}{a^3} \times (x^2 - 14\,ax + 42\,a^2)$$

$$\frac{\delta^3 y}{\delta x^3} = -\frac{24}{a^3} \times (x - 7\,a)$$

Stellen wij dan, volgens de boven verklaarde theorie, $\delta\delta y : \delta x^2 = 0$; dan moet de vergelijking, $x^2 - 14\,ax + 42\,a^2 = 0$, opgelost worden en deze geeft: $x = 7\,a - a\sqrt{7}$ en $x = 7\,a + a\sqrt{7}$: men brenge nu deze waarden van x in de waarde van $\delta^3 y : \delta x^3$, dat is, in $x - 7\,a$; dan geeft de eerfte fubftitutie, $+ 24\sqrt{7} : a^2$, en de tweede, $- 24\sqrt{7} : a^2$. Deze waarden worden niet nul: het blijkt dan, dat de absciss-fen, $x = a\,(7 - \sqrt{7}) = 4{,}35425\,a$ en $x = (7 + \sqrt{7})\,a$, met welke de ordinaten, $y = a\,(1148 - 80\sqrt{7}) = 936{,}3399\,a$ en $y = a\,(1148 + 80\sqrt{7}) = 1359{,}6601\,a$ overeenftemmen, tot twee onderfcheidene buigpunten der kromme lijn behooren, terwijl men, met behulp der vergelijking (D), vinden zal, dat de tangens dezer buigpunten de as van de kromme doorfnijden onder hoeken, welker tangenten refpectievelijk zijn, $80 - 56\sqrt{7} = -48{,}162$, en $80 + 56\sqrt{7} \ldots = 228{,}162$, behoorende tot $-88^\circ 48' 38''$ en $+89^\circ 44' 56''$.

Wanneer men eindelijk, in de vergelijking van de gegevene kromme lijn, de abscis x, aan de

po-

positieve en negatieve zijde, zeer groot neemt, dan worden de termen + $28ax^3$, — $252a^2x^2$ en + $864a^3x$, ten opzigte van x^4, steeds kleiner, naarmate x grooter wordt; hier uit volgt dan, dat de kromme, voor de grootere waarden der abscissen, steeds naden met de kromme lijn, welker vergelijking $x^4 = - a^3y$ is en die haren oorsprong in A heeft, zal overeenkomen, en deze kromme, die zich geheel beneden A uitstrekt, en eene *parabola van de derde orde* is, wordt bij gevolg de *asymptota* der gegevene kromme lijn.

Voegt men bij dit alles de bijna regthoekige doorsnijding van de tangenten der punten A en B met de as MN, welke, aangezien zij in het punt B nog sterker dan in het punt A is, de tak BZ, ook natuurlijk spoediger dan de tak AY van de as doet afwijken; derwijze, dat, met $x = 16a$ en $x = 20a$, de ordinaten $y = - 2536a$ en $y = - 19520a$, overeenstemmen, zoo zal men, dit alles met het voorgaande te zamen nemende, en in eene figuur (zie *Fig.* 82.)

AD $= 3a$ . . . *en* DE $= 999a$
AD′ $= 4{,}3562a$ . . D′E′ $= 936{,}340a$
AF $= 6a$ . . . . . FG $= 864a$
AF′ $= 9{,}6438a$ . . F′G′ $= 1359{,}660a$
AH $= 12a$ . . . . HI $= 1728a$
AP $= 16a$ . . . . PQ $= -2536a$

makende, mits de ordinaten op eene honderdmaal kleinere schaal nemende, de kromme lijn . . . . YUVALEE′GG′IBQZ verkrijgen, welker ordinaten honderdmaal grooter gedacht zijnde, de kromme lijn, door de gegevene vergelijking uitgedrukt, zal voorstellen, in welke DE en IH de grootste, FG de kleinste ordinaten, en E′ en G′ de buigpunten zullen zijn.

N°. 93. Door

U. HUGUENIN, *en Jacob de Gelder.*

Volgens de opgave is (zie *Fig.* 86.) AB $= a$ en de hoek BAG $= 90°$ en hoek ABD $= \alpha$; diensvolgens is AD $= a$ *Tang.* α. Laat de kromme BM de weg zijn, welken het punt B, met eene eenparige beweging, in denzelfden tijd, dat het punt P, in de rigting van de lijn AC gelijkmatig DT is doorgeloopen, heeft afgelegd; M*m* de oneindig kleine aanwas der kromme lijn BM; men late MP en *mp* loodregt op AG vallen; deze zijn dan de ordinaten der overeenkomstige abscissen AP en A*p*. Zij *rm* evenwijdig aan AG getrokken; daar dan, volgens het voorstel, het bewegend punt B steeds naar het bewegend punt D gerigt blijft, zal zich, in elk oogenblik des tijds, het bewegend punt D in T, dat is, in de raaklijn van het punt M der kromme BM moeten bevinden, of, met andere woorden, de lijn, MT welke, van oogenblik tot oogenblik, de bewegende punten M en T vereenigt, zal bestendig de raaklijn der kromme BM blijven, en wel van dat punt derzelve, waarin zich het bewegend punt M, van oogenblik tot oogenblik, bevindt. Deze verklaring van den aard van het vraagstuk en de verdere voorwaarden van hetzelve zullen nu moeten dienen, om de vergelijking der kromme lijn, door het punt M beschreven, te vinden.

Men zal, op de volgende wijze, tot eene differentiaal-vergelijking tusschen de coördinaten der begeerde kromme lijn geraken. Men stelle de abscis AP $= x$, de ordinaat PM $= y$; (zijnde dus het punt A de oorsprong der coördinaten,) dan is Pp $= rm = \partial x$ en rM $= -\partial y$; (men moet hier de differentiaal van y negatief stellen, om-

omdat uit de natuur der zake volgt: dat, wanneer de abscis x aangroeit, de ordinaat y vermindert,) en dan is $Mm = \sqrt{(rm^2 + rM^2)} = \sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)}$ $= \delta . BM$, welke aldus $\delta BM = -\delta y \sqrt{\left[1 + \frac{\delta x^2}{\delta y^2}\right]}$ kan voorgesteld worden. Uit de eerste beginselen der differentiaal-rekening weet men: dat de subtangens $PT = -\frac{y\delta x}{\delta y}$ is, welke hier negatief moet gesteld worden (*); en nu wordt $DT = AP + PT - AD = x - \frac{y\delta x}{\delta y} - a\ Tang.\ \alpha$; en de differentiaal van DT wordt (de differentialen van δx en δy beide als veranderlijk (†) aannemende,) $\delta . DT = \delta x - \frac{\delta y \delta x}{\delta y} - \frac{y\delta\delta x}{\delta y} + \frac{y\delta x\delta\delta y}{\delta y^2} = y \times \frac{\delta x\delta\delta y - \delta y\delta\delta x}{\delta y^2}$.

Wij kennen dus de differentiaal, zoo wel van den boog BM als van de lijn DT; dat is van de wegen, welke beide punten M en T, in denzelfden tijd, hebben afgeloopen; daar nu beide bewegingen gelijkmatig ondersteld worden, en wel $BM : DT = m : n$; waardoor $nBM = mDT$ is, zoo is ook $n\delta . BM = m\delta . DT$; of $\delta . BM =$

m

(*) De welbekende algemeene uitdrukking van de subtangens der kromme lijnen is genomen, in de onderstelling, dat de kromme met haren hollen kant naar de as ligt, in welk geval de subtangens, van de ordinaat PM, links af, gesteld wordt: in het tegengestelde geval, (gelijk hier,) is derhalve de subtangens natuurlijk negatief. DE GELDER.

(†) Men kan ook δx of δy als standvastig aannemen; de uitkomsten zullen dezelfde zijn. DE GELDER.

$\frac{m}{n}\,\delta.DT$ en wij verkrijgen diensvolgens de differentiaal-vergelijking:

$$\frac{my}{n} \times \frac{\delta x \delta\delta y - \delta y \delta\delta x}{\delta y^2} = -\delta y \sqrt{\left[1 + \frac{\delta x^2}{\delta y^2}\right]} \;.\;(A)$$

welke de natuur van de kromme lijn uitdrukt, en (vermits er tweede differentialen in voorkomen) van de tweede order is. Er blijft thans alleen over, dat wij uit deze differentiaal-vergelijking de eindige, dat is van differentialen bevrijd zijnde vergelijking, waarvan (A) de tweede differentiaal is, ontdekken, hetgeen door twee achter een volgende integreringen moet volbragt worden.

Men stelle, om uit (A) de differentiaal van de eerste orde te vinden, $\delta x : -\delta y$ gelijk aan de veranderlijke functie p; dan is $\delta p = -\delta.\frac{\delta x}{\delta y}$ $= \frac{\delta x \delta\delta y - \delta y \delta\delta x}{\delta y^2}$; (nemende namelijk δx en δy, ten einde in de boven aangenomene onderstelling te blijven, beide veranderlijk,) brengt men nu deze waarde van δp en p in vergelijking (A) over, dan wordt zij:

$$-\delta y \sqrt{(1 + p^2)} = \frac{my\delta p}{n}$$

in welke de veranderlijke grootheden y en p, zonder behulp van eenige kunstgreep, terstond afscheidbaar zijn, en, na afscheiding, de vergelijking:

$$\frac{\delta p}{\sqrt{(1 + p^2)}} = -\frac{n}{m} \times \frac{\delta y}{y}$$

in staat van integreerbaarheid stellen; waarvan de integraal, gelijk bekend is, wordt:

$$Log.[p+\sqrt{(1+p^2)}] = -\frac{n}{m} Log.y + Log.C \;.\;(B)$$

zijnde in dezelve $Log.C$ de onbepaalde standvasti-

eige grootheid, naar welgevallen aangenomen, om de integraal op de algemeenſte wijze voorteſtellen, en welke ſtraks nader zal bepaald worden. (*)

Uit deze vergelijking moet p weggemaakt worden. Men ſtelle, om te bekorten, $n : m = r$; dan wordt de vergelijking (B) $Log. [p + \sqrt{(1 + p^2)}] = - r\, Log.\, y + Log.\, C = Log.\, Cy^{-r}$ en, van de logarithmen tot de getallen, waarvan zij logarithmen zijn, overgaande, $p + \sqrt{(1 + pp)} = Cy^{-r}$; waaruit, na, op de gewone wijze, de wortel-uitdrukking weggemaakt te hebben, volgt:

$$p = \tfrac{1}{2} C y^{-r} - \tfrac{1}{2} C^{-1} y^{r}$$

in deze ſtelle men nu voor p hare waarde $\frac{\partial x}{\partial y}$; dan verkrijgt men, na alles met ∂y vermenigvuldigd te hebben, voor de differentiaal-vergelijking van de eerſte orde:

$$\partial x = \frac{y^{r}\, \partial y}{2C} - \frac{C \partial y}{2 y^{r}}$$

waarvan de integraal is

$$x = \frac{y^{1+r}}{2(1+r)C} - \frac{C y^{1-r}}{2(1-r)} + C' \ldots (D)$$

zijnde in deze C' wederom eene nieuwe onbepaalde ſtandvastige grootheid, welke, te gelijk met C, zoo dadelijk zal bepaald worden.

De

(*) Aan zulk eene onbepaalde ſtandvastige grootheid, bij eene integraal te voegen, kan men, daar zij, in het afgetrokkene en op zich zelve genomen, onbepaald is, zulk eene gedaante geven, welke het best met den aard der zake overeenſtemt; men heeft dan, daar elke grootheid de logarithmus van eene andere zijn kan, voor de ſtandvastige grootheid $Log.$ C genomen. DE GELDER.

Deze vergelijking (D) is nu de vergelijking der begeerde kromme lijn, in welke de standvastige grootheden, overeenkomstig den aard van het werkstuk, aldus bepaald worden.

Wanneer de ordinaat PM $= y$ gelijk aan AB of a wordt, als dan verandert de hoek PMT in ABD $= \alpha$; diensvolgens wordt $p = -\frac{\delta x}{\delta y} =$ *Tang*. PMT $=$ *Tang*. α. Stelt men dan deze waarde in de verg. (B), zoo verkrijgt men: *Tang*. $\alpha + \sqrt{(1 + Tang^2 . \alpha)} = C a^{-r}$; derhalve zal C $= a^{r}$ [*Tang*. α + *Sec*. α] $= a^{r} \times$ [*Cot*. $(90° - \alpha)$ + *Cos*. $(90° - \alpha)$] $=$ (zie DE GELDER, *Beg. der Meetk.* §. 559) a^{r} *Tang*. $(45° + \frac{1}{2}\alpha)$ zijn.

Voor AP $= x = 0$, wordt P $= y = a$; de vergelijking (D) verandert hier door in de volgende:

$$0 = \frac{a^{1+r}}{2(1+r)C} - \frac{C a^{1-r}}{2(1-r)} + C'$$

en hieruit volgt dan eindelijk:

$$C' = -\frac{a^{1+r}}{2(1+r)C} + \frac{C a^{1-r}}{2(1-r)}$$

stelt men nu deze waarden der standvastige grootheden C en C′ in de vergelijking (D); dan verkrijgt men voor de vergelijking der kromme lijn, door het punt B beschreven,

$$x = \frac{Cot.\,(45° + \frac{1}{2}\alpha)}{2(1+r)\,a^{r}} \times \left[y^{1+r} - a^{1+r}\right] \ldots$$

$$- \frac{a^{r}\,Tang.\,(45° + \frac{1}{2}\alpha)}{2(1-r)} \times \left[y^{1-r} - a^{1-r}\right] \quad (1)$$

en uit deze de ordinaat y afgezonderd hebbende,

y

$$y^{1+r} - \frac{1+r}{1-r} \cdot a^{2r} Tang^2 . (45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha) \times y^{1-r} = \ldots$$

$$\ldots a^{1+r} \times \left[1 - \frac{1+r}{1-r} Tang^2 . (45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha) \right] \ldots$$

$$\ldots + (1+r) \times a^{r} \times Tang . (45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha) \times x \ldots (2)$$

ſtrekkende de eerſte dezer twee vergelijkingen, om x, voor elke gegevene waarde van y, en de tweede, om y, voor elke gegevene waarde van x, te berekenen. (*)

AANMERKINGEN. De vergelijkingen (1) en (2) der kromme lijn, door het punt B beſchreven, geven aanleiding tot zeer vele gewigtige aanmerkingen en leerzame onderzoekingen, waarvan wij, wegens de bekrompenheid van plaats, ſlechts eenige der voornaamſte kunnen opgeven. (†)

1°. Ziet men, dat de graad der vergelijking, de natuur der kromme lijn uitdrukkende, ofſchoon zij altijd, (hoewel zij ſlechts in één geval (zie N°. 2. hier onder) transcendentaal wordt,) *algebraisch* is, alle mogelijke variatien van r hebben kan, en dus, om zoo te ſpreken, begrepen kan worden, tot de geheele oneindigheid der mogelijke

(*) De Heer DUBOIS-AYMÉ, Oud-eleve van de polytechniſche ſchool, heeft onlangs, in de *Correspondance sur l'école militaire polytechnique*, Tom. II. pag. 275, zonder oplosſing, eene vergelijking voor onze kromme lijn medegedeeld, welke veel naar de onze gelijkt, doch, in de teekens en de ſtandvastige coefficienten, van dezelve onderſcheiden is; maar hij moet zich bedrogen hebben, omdat zijne vergelijking tot de onze niet kan gebragt worden: althans is het bezijden de waarheid, dat, zoo als hij zegt, de kromte-ſtralen evenredig aan de abscisſen zouden zijn. DE GELDER.

(†) Deze aanmerkingen zijn van de Heeren HUGUENIN en DE GELDER, wordende, door de Letters *H* en *G*, aangewezen van wien dezelve zijn.

gelijke orden van kromme lijnen te behooren; want, naar mate de betrekking van de snelheden der bewegende punten M en T verandert, verandert ook $n : m = r$. De vergelijking verkrijgt de eenvoudigste vormen indien r een geheel getal is; is r een gebroken, dan is y met gebrokene exponenten aangedaan; en wanneer de betrekking van n tot m onmeetbaar is, gaat de kromme lijn over in die soort van krommen, waaraan de beroemde LEIBNITZ den naam van *intertscendentale lijnen* gegeven heeft. Alle deze hebben, op de exponenten van y na, denzelfden vorm, en worden, door r als veranderlijk te beschouwen, en door alle mogelijke waarden te doen varieren, met elkander in vergelijking gebragt. [*G* en *H.*]

2°. Wanneer $r = 0$, dat is, indien $\frac{n}{m} = 0$ of $n = 0$ is, het geen plaats heeft, wanneer het punt T in rust is, dan verandert de vergelijking (1) in deze meer eenvoudige:

$$x = \tfrac{1}{2}[Cot.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha) - Tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)] \times [y - a]$$

maar nu is (zie *Beg. Meetk.* §. 550 en §. 560.)

$$\tfrac{1}{2}Cot.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha) - \tfrac{1}{2}Tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha) = \tfrac{1}{2}Tang.(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha) - \tfrac{1}{2}Cot.(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha) = -Cot.(90^\circ - \alpha) = -Tang.\alpha;$$

de vergelijking wordt derhalve, bij nadere herleiding,

$$x + y \times Tang.\alpha = a \times Tang.\alpha$$

zijnde dus eene vergelijking tot de regte lijn en wel tot de lijn BD van *Fig.* 86; want, stelt men in dezelve $x = 0$; dan wordt $y = a = AB$; en stelt men $y = 0$; dan wordt $x = a\ Tang.\alpha = AD$; en, zulks verstrekt tevens tot eene proef van de waarheid onzer uitgebragte vergelijking (1); daar de vergelijking, door den Heer DUBOIS-AYMÉ (zie noot Bladz. 253.) uitgebragt, wel eene regte lijn; maar niet de lijn AD geeft. Dat intusschen, wanneer het punt D rust, de weg, welken het punt B aflegt, de regte lijn AD zijn moet, behoeft wel niet betoogd te worden voor die

die genen, welke in ſtaat zijn, om de oplosſing van ons werkſtuk te volgen. [G].

3°. Bij aldien wij $r = 1$ onderſtellen, dat is $m = n$ nemen, en bij gevolg de ſnelheden der beide ligchamen gelijk ſtellen, heeft er in de vergelijking (1) een zonderling verſchijnſel plaats; te weten, de tweede term van het voorſte lid, zijnde

$$-\frac{a^r\,Tang.(45^\circ + \frac{1}{2}a)}{2(1-r)} \times \left[y^{1-r} - a^{1-r}\right]$$

wordt, omdat $1 - r = 0$, en $y^0 - a^0 = 1 - 1 = 0$ is, gelijk aan $-a^r\,Tang.(45^\circ + \frac{1}{2}a) \times \frac{0}{0}$ en verandert dus in eene uitdrukking, welke in den ſtaat, waarin zich onze vergelijking opdoet, onbepaald ſchijnt te zijn; doch op deze wijze bepaald kan worden.

Men ſtelle $y = a - z$ en ontwikkele, volgens de bekende formule van NEWTON, de breuk $\frac{y^{1-r} - a^{1-r}}{1-r}$, welker teller en noemer, na de ontwikkeling, door $1 - r$ deelbaar wordt. Na *deze deeling* volbragt te hebben, ſtelle men $r = 1$ en wederom $a - z = y$; dan vindt men, voor de vergelijking van de kromme lijn, in dit geval, ... $x =$ . . . . (μ)

$$\frac{Cot.(45^\circ+\frac{1}{2}a)}{4a}(y^2-a^2) - \frac{1}{2}a\,Tang.(45^\circ+\tfrac{1}{2}a)\,Log.\frac{y}{a}$$

welke men ook vinden zal, indien men, in de vergelijking $\partial x = \frac{y^r\,\partial y}{2C} - \frac{Cy^{-r}\,\partial y}{2}$, $r = 1$ ſtelt en dezelve in die onderſtelling integreert, hetgeen eigenlijk wel de kortſte weg is. [G.]

4°. Maakt men, in de laatst verkregene vergelij-

lijking (μ), $Cot.(45^o + \frac{1}{2}\alpha) : 4a = A$, en $\frac{1}{2}a \times Tang.(45^o + \frac{1}{2}\alpha) = B$, en verder:

$$u = A(y^2 - a^2)$$
$$t = B\ Log.(y : a)$$

dan is $x = u - t$. De eerste dezer vergelijking is eene vergelijking tot de gewone parabola en de tweede eene transcendentale lijn, welke, met behulp der bekende *Logarithmica* gemakkelijk wordt geconstrueerd: deze twee kromme lijnen dan geconstrueerd hebbende, zal men, met behulp van dezelve en de vergelijking $x = u - t$, voor elke waarde van y, de abscis vinden en aldus de kromme lijn door punten construeren. Naauwkeuriger zal het nogtans zijn, wanneer men, voor eene aanmerkelijke reeks van waarden van y, de overeenkomstige waarden van x berekent. Zoo gemakkelijk zal het nogtans niet slagen om, voor elke waarde van x, de overeenkomstige waarde van y te vinden. [G].

5°. Stelt men in de vergelijking (μ) de ordinaat $y = 0$; dan is, omdat $Log.0 = -\infty$ is, $x = \frac{1}{2}aTang.(45^o + \frac{1}{2}\alpha) \times \infty - \frac{1}{4}aCot.(45^o + \frac{1}{2}\alpha) = \infty$ de kromme lijn zal dus den as der abscisfen niet eer doorsnijden, dan, naar den positieven kant van de as der abscisfen, en op eenen oneindig verren afstand van den oorsprong der coördinaten; de as AK is diensvolgens de *asymptota* der kromme lijn. [G]

6°. Om, in de algemeene vergelijking (1) het punt G te bepalen, alwaar zich de beide punten in de lijn AC vereenigen, stelle men in dezelve $y = 0$, dan verandert x in AG en wij hebben dus:

$$AG = x \left[\frac{Tang.(45^o + \frac{1}{2}\alpha)}{2(1 - r)} - \frac{Cot.(45^o + \frac{1}{2}\alpha)}{2(1 + r)} \right]$$

welke, met behulp van de bekende goniometrische formulen, deze meer eenvoudige gedaante verkrijgt:

AG

$$AG = a \times \frac{Tang.\,\alpha + r \times Sec.\,\alpha}{1 - r^2}$$

wordende door deze formulen, ingevalle $r < 1$ is, de doorsnijding van de kromme met hare as bepaald. (*H*)

7°. Deze waarde van AG geldt alleen voor het geval, dat $r < 1$ is. Is $r = 1$, dan moet men van de vergelijking (μ) gebruik maken; en is $r > 1$, dan verkrijgt de laatste term van het tweede lid der vergelijking den vorm:

$$-\frac{a\,\overset{r}{Tang}.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)}{2(1-r)} \times \left[\frac{1}{y^{r-1}} - \frac{1}{a^{r-1}}\right]$$

stelt men derhalve, in (1), $y = 0$, dan wordt $x = -\infty$. [*G*].

8. Neemt men in aanmerking: dat de lijn DG en de kromme BMG wegen zijn, welke beide punten, in denzelfden tijd, met eene gelijkmatige snelheid hebben doorgeloopen, zoo staan deze afgelegde wegen, in reden van de snelheden; derhalve BMG : DG $= m : n$, of BMG $= \frac{m}{n} \times$ DG $= \frac{1}{r}$ (AG — AD). Hier door vindt men dan, met weinig moeite,

$$kromme\ BMG = \frac{a}{1 - r} \times Sec.\,\alpha \ldots (\omega)$$

en de kromme BMG is derhalve volkomen rectificeerbaar. (*H*)

9°. Niet slechts is BMG, maar ook elk gedeelte der kromme lijn rectificeerbaar. Men zal, met weinig moeite, vinden, dat de lengte van een gedeelte BM der kromme lijn, indien men namelijk:

$$\frac{a\,\overset{r}{Tang}.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)}{2r(1-r)} = C,\ en\ \frac{\overset{r}{Cot}.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)}{2n(1+r)a} = D$$

 stelt,

ſtelt, door . . . . BM $=$ . . . .

$$C.\left(a^{1-r} - ry^{1-y}\right) - D.\left(ry^{1-r} + a^{1-r}\right) - \frac{a}{r}\,Tang.\,\alpha$$

wordt voorgeſteld, welke, door nu dezelve $y = 0$ te ſtellen, in de vergelijking (ω) verandert. (H)

10°. Het blijkt, uit de hoofdvergelijkingen (1) en (2): dat, voor elke waarde van y, gemakkelijk x gevonden wordt; maar dat men, ten einde y voor eene gegevene waarde van x te vinden, eene vergelijking van den graad $1 + r = \frac{m+n}{m}$ zal moeten oplosſen; of liever, men zal $y = z^m$, en kortheidshalve,

$$\frac{m+n}{m-n} \times a^{\frac{2n}{m}}\ Tang.(45° + \tfrac{1}{2}\alpha)^2 = K$$

$$a^{\frac{m+n}{m}} \times \left[1 - \frac{m+n}{m-n} \times Tang.(45° + \tfrac{1}{2}\alpha)\right] = L$$

en $\frac{2.(m+n)}{m} \times a^{\frac{n}{m}}\ Tang.(45° + \tfrac{1}{2}\alpha) = M$

ſtellende, de vergelijking:

$$z^{m+n} - Kz^{m-n} = L + Mz^n$$

en dus een $(m+n)^{de}$ graads vergelijking moeten oplosſen, om z en voords $y = z^m$ te verkrijgen. Bijaldien nu m en n beide onevene getallen zijn, worden de exponenten $m + n$ en $m - n$ even, en de vergelijking zal, in dit geval, ten minſte twee mogelijke wortels hebben. Van de evene waarden van m en n geldt hetzelfde. Zijn de getallen m en n het eene even en het ander oneven, dan zijn $m + n$ en $m - n$ beide onevene getallen en de vergelijking is eene onevene magtsvergelijking, welke één, drie, vijf, enz. wor-

wortels hebben kan, in welk geval, de kromme lijn ook even zoo vele takken hebben kan; er bestaan dan twee zeer onderscheidene hoofdgevallen, naar dat $m + n$ en $m - n$ even of oneven zijn; zijnde, in het eerste, het aantal der mogelijke takken even en in het tweede oneven; doch de wezenlijke bestaanbaarheid dezer takken zou, in elk bijzonder geval, een nader onderzoek vereischen. (*H* en *G*.)

11°. Wanneer de twee bewegende punten, na elkander in G achterhaald te hebben, volgens dezelfde wet blijven voortgaan; te weten het punt T in de lijn AD en het punt M zoodanig in het vervolg der kromme, dat, van oogenblik tot oogenblik, het verlengde van de rigting van deszelfs beweging bestendig naar het punt T gerigt blijve; dan is het zigtbaar, dat beide punten onophoudelijk verder van elkander afraken; de negatieve ordinaten worden als dan steeds grooter; maar het verdient een nader onderzoek, of de abscissen x, in het positieve van de as, onophoudelijk grooter worden?

Men differentiere, om dit nategaan, de vergelijking (1) der kromme lijn; dan verkrijgen wij, na kortheidshalve $a^r \times Tang.(45° + \frac{1}{2}u) = c$ gesteld te hebben, voor de vergelijking (1):

$$x = \frac{1}{2(1+r)c}\left[y^{1+r} - a^{1+r}\right] - \frac{c}{2(1-r)}\left[y^{1-r} - a^{1-r}\right]$$

en houden wij nu onder het oog, dat, in het geval, dat wij beschouwen, $r = \frac{n}{m} < 1$ is, dan zijn de eerste en tweede differentialen dezer vergelijking:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{2c} \times y^r - \frac{1}{2}c \times \frac{1}{y^r}$$

$$\frac{\partial\partial x}{\partial y^2} = + \frac{r}{2c} \times \frac{1}{y^{1-r}} + \frac{1}{2}rc \times \frac{1}{y^{1+r}}$$

 Om

Om nu te onderzoeken, of x een maximum of minimum kan worden, moet men $\delta x : \delta y = 0$ stellen; dit doende, vinden wij: $y^r = \pm c$ of wel, voor r hare waarde $n : m$ stellende, $y^{\frac{n}{m}} = \pm c$.

Hier zijn nu twee hoofd-gevallen te overwegen: 1°. Zijn m en n beide onevene getallen, dan is $y^n = \pm c^m$ en dan wordt $y = \pm c^{\frac{m}{n}} = \pm i$. Men stelle elke dezer twee waarden in $\delta\delta x : \delta y^2$; daar dan m en n beide onevene getallen zijn, zijn $m - n$ en $m + n$ evene en m is een oneven getal; het zij men dan de positieve of de negatieve waarde van y in $\delta\delta x : \delta y^2$ overbrenge; de magten van y^{1-r} en y^{1+r} worden in beide gevallen positief en $\delta\delta x : \delta x^2$ kan niet anders dan positief worden. 2°. Is n een even en m een oneven getal, of omgekeerd n een oneven en m een even getal, zal men, naar de theorie van de teekens, uit $y = \pm i$ niets anders dan $y = + \sqrt[n]{i^m}$ vinden en $\delta\delta y : \delta x^2$ zal in beide deze gevallen nog positief blijven. In het eerste geval, schijnen $+ i$ en $- i$ beide een *minimum* en, in het tweede, insgelijks een *minimum* te geven; wanneer men intusschen de figuur met oplettenheid beschouwt, bestaat er buiten allen twijfel een *maximum* en *minimum*. De volkomen verklaring van dit, in den eersten opslag, vreemde verschijnsel zou ons hier te ver afleiden: het is in de veranderlijkheid van den exponent r gelegen, welke, door slechts eene oneindig kleine verandering in dezelve te onderstellen, de exponent r onmeetbaar maakt, en strikt genomen, buiten het gebied der teekens brengt. Dit dan aannemende wordt:

$$y = - a\,Tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\,a)^{\frac{1}{r}} \ldots \text{voor het } max.$$

y

$$y = + a\,Tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}a)^{\frac{1}{r}} \ldots \text{voor het } min.$$

Stelt men nu deze waarden, in de verg. (1); dan wordt, voor het maximum:

$$x = \frac{ar\,Tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}a)^{\frac{1}{r}}}{1 - r^2} + AG$$

en, voor het minimum:

$$x = AG - \frac{ar\,Tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}a)^{\frac{1}{r}}}{1 - r^2}$$

Neemt men nu in de figuur AK $= x$, en, op de overeenkomstige negatieve ordinaat, KI gelijk aan de waarde van y, voor het maximum gevonden, dan zal I het punt zijn, in hetwelk de kromme omwendt en naar de as y terug keert; de ordinaat KI wordt, in dit geval, eene raaklijn en ten bewijze daarvan zal strekken, dat de subtangens voor dit punt, gelijk uit de berekening blijken zal, nul wordt. Eindelijk bestaat er een minimum van x, welke de kromme lijn, boven die as, eenen loop geeft, met den loop, beneden dezelve, veel overeenkomst hebbende. (*H* en G.)

Substitueert men in de vergelijking (2) de waarde van AG uit verg. (4); dan vindt men:

$$y^{1+r} - \frac{1+r}{1-r}\, a^{2r}\, Tang^2.(45^\circ + \tfrac{1}{2}a)\, y^{1-r} = 0$$

waaruit volgt voor eerst, zoo als het behoort, $y = 0$; en ten anderen:

$$y = \pm\, a\,Tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}a)^{\frac{1}{r}} \times \sqrt[2r]{\frac{1+r}{1-r}}$$

omdat nu r eene eigenlijke breuk is, is de grootheid onder het wortelteeken > 1 : neemt men derhalve de negatieve waarde $=$ GN, ziet men

 dui-

duidelijk, dat zich de kromme lijn ſteeds verder van de as van x verwijderen zal; hetwelk derhalve tot eene bevestiging van het reeds boven aangemerkte verſtrekken moet. Wij laten de verdere onderzoekingen over den aard dezer kromme lijn, welke nog zeer vele bijzonderheden oplevert, aan den jongen beoefenaar over (H).

N°. 94. Door

J. R. Schmidt.

Laten de algemeene termen der gevraagde arithmetiſche progresſien zijn: $a + bx$, $a' + b'x$ en $a'' + b''x$; dan wordt hun product $(a + bx)$ $(a' + b'x)$ $(a'' + b''x)$ de algemeene term der reeks, welke uit de producten van de overeenkomſtige termen dezer arithmetiſche reekſen ontſtaat. De algemeene term dezer reeks zal klaarblijkelijk tot de derde magt van x opklimmen; bijaldien wij dan dien algemeenen term $A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ ſtellen, zullen wij, op eene zeer gemakkelijke wijze, de coefficienten A, B, C en D kunnen bepalen, waardoor de factoren van $A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ en bijgevolg de algemeene termen der gevraagde arithmetiſche progresſien, benevens deze progresſien zelve, bekend zullen worden.

Het blijkt uit de voorwaarden van het voorſtel, dat de ſommen van de x^{ste} en $(x + 1)^{ste}$, min de $(x + 1)^{de}$ term der reeks, waarvan $A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ de algemeene term is, zullen zijn:

30, 71, 150, 279, 470, *enz.*

waaruit men, voor de eerſte en volgende verſchillen, vindt:

41, 79, 129, 191, *enz.* . . . . 1e *verschillen*
38, 50, 62, *enz.* . . . 2e *verschillen*
12, 12, *enz.* . . . 3e *verschillen*

daar dan de derde verschillen standvastig of gelijk zijn, hebben wij, om den x^{den} of algemeenen term dezer reeks uittedrukken, door de bekende formule, (zie DE GELDER, II *Curs. Bladz.* 432.)

$$30+41(x-1)+\frac{38(x-1)(x-2)}{2}+\frac{12(x-1)(x-2)(x-3)}{2,3}.$$

of, na verdere herleiding,

$$15+6x+7x^2+2x^3.$$

Deze uitdrukking moet nu, gelijk gezegd is, gelijk zijn aan de som van de x^{ste} en $(x+2)^{ste}$ min de $(x+1)^{ste}$ term der reeks, welker algemeene term is $A+Bx+Cx^2+Dx^3$; en wij hebben dus de vergelijking:

$$[A+Bx+Cx^2+Dx^3]+[A+B(x+2)+C(x+2)^2+D(x+2)^3]-[A+B(x+1)+C(x+1)^2+D(x+1)^3]$$
$$\ldots\ldots=15+6x+7x^2+2x^3$$

of wel, na ontwikkeling,

$$[A+B+3C+7D]+[B+2C+9D]x+[C+3D]x^2+$$
$$\ldots\ldots Dx^3=15+6x+7x+2x^3$$

Weshalve $D=2$; $C=7-3D=1$, $B=6-2C-9D=-14$ en $A=15-B-3C-7D=12$. De algemeene term van de reeks, ontstaande uit de volgreeks van de producten der drie arithmetische reeksen, is derhalve $2x^3+x^2-14x+12$. Zoekt men nu de factoren dezer formulen; dan vinden wij:

$$2x^3+x^2-14x+12=[2x-3][x+1-\sqrt{5}][x+1+\sqrt{5}]$$

De algemeene termen der gevraagde progressien zijn derhalve: $2x-3$, $x+1-\sqrt{5}$ en $x+1+\sqrt{5}$, en de progressien zelve:

$-1,+1,+3,+5$ tot $2x-3$
$2-\sqrt{5},3-\sqrt{5},4-\sqrt{5},5-\sqrt{5}$ tot $x+1-\sqrt{5}$
$2+\sqrt{5},3+\sqrt{5},4+\sqrt{5},5+\sqrt{5}$ tot $x+1+\sqrt{5}$

want, vermenigvuldigt men derzelver overeen-

komstige termen met elkander, dan verkrijgt men de reeks:

1, 4, 33, 100....., $2x^3 + x^2 - 14x + 12$ welke behandeld zijnde, zoo als het voorstel voorschrijft, geven zal: 30, 71, 150, 279, 470, *enz.*, en algemeen, $15 + 6x + 7x^2 + 2x^3$.

N°. 95. Door

J. R. SCHMIDT.

De gegevene sommen bestaan uit de reeks van de volgende getallen:

50,	98,	179,	311,	512,	*enz.* . . reeks
	48,	81,	132,	201,	*enz.* . 1ᵉ *versch.*
		33,	51,	69,	*enz.* . 2ᵉ *versch.*
			18,	18,	*enz.* . 3ᵉ *versch.*

welker derde verschillen gelijk zijn: wij vinden dus voor den algemeenen of x^{en} term, (zie DE GELDER, II *Curs. Bladz.* 437) de uitdrukking

$$50 + 48(x-1) + 33 \times \frac{(x-1)(x-2)}{1,2}$$

$$+ 18 \times \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1,2,3} \text{ of wel,}$$

(deze ontwikkeld en naar de magten van x geordend hebbende,)

$$\tfrac{1}{2}(6x^3 - 3x^2 + 63x + 34)$$

Nu is het, uit de voorwaarden van het vraagstuk, duidelijk te zien, dat de hier gevondene x^{de} term gelijk moet zijn aan de som van den x^{en}, den $(x+2)^{en}$ en den $(x+4)^{en}$ term der gezochte reeks: men stelle dan den algemeenen of x^{en} term der gezochte reeks $A + Bx + Cx^2 + Dx^3$; dan verkrijgen wij de vergelijking:

[A

$[A+Bx+Cx^2+Dx^3]+[A+B(x+2)+C(x+2)^2$ $+D(x+2)^3]+[A+B(x+4)+C(x+4)^2+D(x+4)^3]$ $\ldots\ldots = \frac{1}{2}[6x^3 - 3x^2 + 63x + 34]$, of, alles naar de afmetingen van x schikkende, $[3A+6B+20C+72D]+[3B+12C+60D]x+\ldots$ $[3C+18D]x^2+3Dx^3 = 17+31\frac{1}{2}x-1\frac{1}{2}x^2+3x^3$ waaruit men, door term voor term aan elkander gelijk te stellen, vinden zal: $D = 1$, $C = -6\frac{1}{2}$, $B = 16\frac{1}{2}$ en $A = -8$; zoodat de begeerde algemeene term wordt $\frac{1}{2}(2x^3 - 13x^2 + 33x - 16)$ en de gezochte reeks zelve: 3, 7, 10, 18, 37, 73, *enz.*

Aanmerking. De grootheden A, B, C en D, kunnen nog op eene andere wijze gevonden worden. Men geve namelijk in den algemeenen term $A + Bx + Cx^2 + Dx^3$, aan de grootheid x bij opvolging de waarden 1, 2, 3 *enz.*; dan hebben wij, voor de acht eerste termen:

1e .. $A+B+C+D$	5e .. $A+5B+25C+125D$
2e .. $A+2B+4C+8D$	6e .. $A+6B+36C+216D$
3e .. $A+3B+9C+27D$	7e .. $A+7B+49C+343D$
4e .. $A+4B+16C+64D$	8e .. $A+8B+64C+512D$

en hier uit voor de sommen der,

1e, 3e *en* 5e term .. $3A+9B+35C+153D = 50$
2e, 4e *en* 6e term .. $3A+12B+56C+288D = 98$
3e, 5e *en* 7e term .. $3A+15B+83C+495D = 179$
4e, 6e *en* 8e term .. $3A+18B+116C+729D = 311$

De *eerste verschillen* dezer sommen zijn:

$$3B+21C+135D = 48$$
$$3B+27C+207D = 81$$
$$3B+33C+297D = 132$$

de *tweede verschillen* worden:

$$6C+72D = 33$$
$$6C+90D = 51$$

en de *derde verschillen*, die standvastig zijn, $18D = 18$. Hier uit vindt men dan; $D = 1$, $C = -6\frac{1}{2}$; $B = 16\frac{1}{2}$ en $A = -8$, het geen met

met de bovenstaande oplossing overeenkomt. Men kan ook het voorgaande voorstel langs dien weg oplossen.

N°. 96. Door

JACOB DE GELDER, *U. Huguenin*, waar mede *P. van Eeghen* gedeeltelijk overeenkomt.

Men stelle, zegt de Heer HUGUENIN, *Fig.* 87. hoek ACB $= \phi$ en hoek ABC $= 2\phi$, dan is BAC $= 180^\circ - 3\phi$; voorts trekke men de stralen AP en BP, welke $= \frac{1}{2}a$ gegeven zijn; dan is APB $= 2$ACB $= 2\phi$; en, wanneer men nu DP loodregt op AB getrokken heeft, is AD $=$ BD $= \frac{1}{2}a$ *Cos*.$(90^\circ - \phi) = \frac{1}{2}a$ *Sin*.ϕ. Nu is *Sin*. BCA : *Sin*. BAC $=$ AB : BC; of *Sin*.ϕ : *Sin*.3ϕ $= a$ *Sin*.ϕ : BC; derhalve is BC $= a$ *Sin*.3ϕ; en de inhoud des driehoeks ABC wordt nu $= \frac{1}{2}$AB $\times$ BC $\times$ *Sin*. ABC $= \frac{1}{2}a^2$ *Sin*.ϕ $\times$ *Sin*.2ϕ $\times$ *Sin*.3ϕ, zijnde in dezen ϕ de kleinste van de twee hoeken des driehoeks, welke zich tot elkander als *één* tot *twee* verhouden.

DE GELDER redeneert, om de uitdrukking voor den inhoud te vinden (en hier mede komt VAN EEGHEN het naast overeen,) aldus. Zij *Fig.* 88, (welke figuur wij in het vervolg dezer oplossing blijven gebruiken,) ABC de gevraagde driehoek, wiens hoek A gelijk is aan het dubbeld van den hoek B: laat de middellijn CD benevens de koorden AD en BD getrokken worden. Stel CD $= a$, de hoek B $=$ D $= \phi$; dan is A $=$ CDB $= 2\phi$ en C $= 180^\circ - 3\phi$. Men heeft dan, in de regthoekige driehoeken DAC en BDC,

$$AC = a\ Sin.\phi;\ en\ BC = a\ Sin.2\phi$$

en de inhoud van den driehoek ABC wordt dan (zie *Beg. der Meetk.* IX *Stell.* IX *B.*) $= \frac{1}{2}$AB $\times$

BC

BC × *Sin*: C; dat is, dien inhoud $= y$ stellende, omdat $Sin.(180^o - 3\phi) = Sin.3\phi$ is:

$$y = \tfrac{1}{2} a^2\ Sin.\phi \times Sin.2\phi \times Sin.3\phi \,..\, (1)$$

Om nu de *maxima* of *minima* dezer functie te onderzoeken, kan men onderscheidene wegen inslaan.

1°. Volgens de *Meetk. Analysis*, *Bladz.* 191, is $Sin.2\phi = 2Cos.\phi \times Sin.\phi$ en $Sin.3\phi = (4Cos^2.\phi - 1) \times Sin.\phi$. Stelt men dan deze waarden in de vergelijking (1); dan wordt dezelve:

$$y = a^2 \times [4\,Cos^3.\phi\ Sin^3.\phi - Cos.\phi\ Sin^3.\phi]$$

en hare eerste en tweede differentialen worden, de bekende regels in acht nemende:

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = -a^2 \times [24 Cos^6.\phi - 40 Cos^4.\phi + 17 Cos^2.\phi - 1] =$$
$$- a^2 \times [24 Cos^4.\phi - 16 Cos^2.\phi + 1] \times [Cos^2.\phi - 1]$$
$$\frac{\partial\partial y}{\partial \phi^2} = + a^2 [144 Cos^6.\phi Sin.\phi - 160 Cos^4.\phi Sin.\phi \,..$$
$$......+ 34]\ Cos.\phi \times Sin.\phi = ...$$
$$+ a^2 \times [144 Cos^4.\phi - 160 Cos^2.\phi + 34]\ Sin.\phi \times Cos.\phi$$

Stellende nu, volgens de theorie der *maxima* en *minima*, $\partial y : \partial \phi = 0$; dan heeft men:

$$1^o.\ Cos^2.\phi - 1 = 0$$
$$2^o.\ 24\,Cos^4.\phi - 16\,Cos^2.\phi + 1 = 0$$

De eerste dezer vergelijkingen geeft twee waarden te weten:

$$Cos.\phi = +1 \text{ en } Cos.\phi = -1$$

de tweede, zijnde eene vierde magts-vergelijking van den tweede magts-vorm, geeft vier waarden, begrepen in de uitdrukking:

$$Cos.\phi = \pm \sqrt{[+\tfrac{1}{3} \pm \tfrac{1}{12}\sqrt{10}]} = \pm \tfrac{1}{6}\sqrt{[12 \pm 3\sqrt{10}]}$$

of wel men heeft voor $Cos.\phi$ en $Sin.\phi$ de vier volgende waarden:

1° $Cos.\phi = +\tfrac{1}{6}\sqrt{(12+3\sqrt{10})}$	$Sin.\phi = \pm\sqrt{(24-3\sqrt{10})}$
2° $Cos.\phi = -\tfrac{1}{6}\sqrt{(12+3\sqrt{10})}$	$Sin.\phi = \pm\sqrt{(24-3\sqrt{10})}$
3° $Cos.\phi = +\tfrac{1}{6}\sqrt{(12-3\sqrt{10})}$	$Sin.\phi = \pm\sqrt{(24+3\sqrt{10})}$
4° $Cos.\phi = -\tfrac{1}{6}\sqrt{(12-3\sqrt{10})}$	$Sin.\phi = \pm\sqrt{(24+3\sqrt{10})}$

De-

Deze waarden van $Cos.\varphi$ en $Sin.\varphi$ moeten nu in de verkennings-vergelijking, dat is, in de functie $\frac{\delta\delta x}{\delta\varphi^2}$ overgebragt worden; en om zulks met meer gemak te volbrengen, merken wij op: dat, voor de vier waarden van $Cos.\varphi$, de overeenstemmende waarden van den factor $Sin.\varphi \times Cos.\varphi$ worden:

1° $Sin.\varphi \times Cos.\varphi = \pm \frac{1}{12}\sqrt{(22+4\sqrt{10})}$
2° $Sin.\varphi \times Cos.\varphi = \mp \frac{1}{12}\sqrt{(22+4\sqrt{10})}$
3° $Sin.\varphi \times Cos.\varphi = \pm \frac{1}{12}\sqrt{(22-4\sqrt{10})}$
4°. $Sin.\varphi \times Cos.\varphi = \mp \frac{1}{12}\sqrt{(22-4\sqrt{10})}$

dat al verder, voor de twee eerste waarden van $Cos.\varphi$, gevonden wordt:

$Cos^4.\varphi = \frac{1}{144}(26+8\sqrt{10})$, *en* $Cos^2.\varphi = \frac{1}{12}(4+\sqrt{10})$

en voor de twee laatste waarden van dien zelfden hoek:

$Cos^4.\varphi = \frac{1}{144}(26-8\sqrt{10})$, *en* $Cos^2.\varphi = \frac{1}{12}(4-\sqrt{10})$

waardoor de factor van de verkennings-vergelijking, $\delta\delta y : \delta\varphi^2$, namelijk de functie, $144\,Cos^4.\varphi - 160\,Cos^2.\varphi + 34$, voor de twee eerste waarden van $Cos.\varphi$, wordt:

$+ 6\frac{2}{3} - 5\frac{1}{3}\sqrt{10}$ . . . . . . *negatief*

en, voor de twee laatste waarden van $Cos.\varphi$,

$+ 6\frac{2}{3} + 5\frac{1}{3}\sqrt{10}$ . . . . . . *positief*.

Onderzoeken wij nu elke waarde van $Cos.\varphi$: De eerste waarde positief zijnde, geeft ook een positieve sinus; het product $Sin.\varphi \times Cos.\varphi$ is derhalve positief en,

$\frac{\delta\delta y}{\delta x^2} = [6\frac{2}{3} - 5\frac{1}{3}\sqrt{10}] \times + \frac{1}{12}[22+4\sqrt{10}]$, *negatief*

bijgevolg maakt $Cos.\varphi = \frac{1}{6}\sqrt{(12+3\sqrt{10})}$ de waarde van y, in de vergelijking (1), tot een *maximum:* maar de eerste waarde van $Cos.\varphi$ kan ook tot den boog $360^\circ - \varphi$ behooren; (want $Cos.\varphi = Cos.[360^\circ - \varphi,]$) maar dan wordt $Sin.(360^\circ - \varphi)$ negatief en $\delta\delta y : \delta x^2$ wordt bijgevolg *min* vermenigv. met *min*; dat is, positief, en geeft derhalve voor y een *minimum.*

Op

Op deze wijze voortgaande, zal men vinden: 1°. Dat $Cos.\,\phi = -\frac{1}{8}\sqrt{(12 + 3\sqrt{10})}$ de functie y tot een *minimum* of *maximum* maakt, naar dat men voor den boog, tot die Cosinus behoorende, ϕ of $360° - \phi$ neemt. 2°. Dat $Cos.\,\phi = \frac{1}{8}\sqrt{(12 - 3\sqrt{10})}$ de functie y tot een *maximum* of *minimum* maakt, naar dat men voor den boog, behoorende tot $Cos.\,\phi$, aanneemt ϕ of $360° - \phi$; en 3°. dat $Cos.\,\phi = -\frac{1}{8}\sqrt{(12 - 3\sqrt{10})}$ de functie y tot een *minimum* of *maximum* maakt, naar dat men voor den boog ϕ of $360° - \phi$ hebbe aangenomen.

Om nu de hoeken te vinden, welke tot de vier cosinussen behooren, werke men in Logarithmen, aldus:

$Log.\,10 = 1,00000000$

$Log.\sqrt{10} = 0,50000000$

$Log.\,3 = 0,47712125$

$som = 0,97712125$

$3\sqrt{10} = 9,4868332$

$12 + 3\sqrt{10} = 21,4868332 = m$

$12 - 3\sqrt{10} = 2,5131668 = n$

$Log.\,m = 1,3321725$

$Log.\sqrt{m} = 0,6660862$

$Log.\,6 = 0,7781513$ af

$Log.\,Cos.\,\phi = Log.\,\frac{1}{8}\sqrt{(12 + 3\sqrt{10})} = 9,8879349$

derhalve $\phi = 39°24'54'',85$

Met $Cos.\,\phi = +\frac{1}{8}\sqrt{(12 - 3\sqrt{10})}$ vindt men, op dezelfde wijze werkende, $\phi = \ldots\ldots$ $74°40'46'',61$, en men heeft derhalve, voor de acht waarden van ϕ, de volgende hoeken:

1° $\phi = 39°24'54'',85$	$360° - \phi = 320°35'\,5'',15$
2° $\phi = 140°35'\,5'',15$	$360° - \phi = 219°24'54'',85$
3° $\phi = 74°40'46'',61$	$360° - \phi = 285°19'13'',39$
4° $\phi = 105°19'33'',39$	$360° - \phi = 254°40'46'',61$

De vier eerste waarden, in de eerste kolom geplaatst, geven beurteling een *max.*, *min.*, *max.* en *min.*; de vier overeenstemmende waarden, in de tweede kolom, maken y beurtelings *min. max. min.* en *max.* verkrijgende y, voor elk *maximum* of *minimum*, uit de tweede kolom genomen, dezelfde waarde, als voor het overeenkomstig *maximum*

mum of *minimum*, uit de tweede; doch met een tegengesteld teeken. Er bestaan dus in de daad voor de vergelijking, $y = \frac{1}{4} a^2 \times Sin.\varphi \times \ldots Sin.2\varphi \times Sin.3\varphi$, vier maxima en vier minima, welke men zich ook zigtbaar zal kunnen voorstellen, wanneer men de transcendentale kromme lijn, door de vergelijking, $y = \frac{1}{4} a^2\, Sin.\varphi \times Sin.2\varphi \times Sin.3\varphi$ uitgedrukt, construeert.

Maar de oplossing der vergelijking $\partial y : \partial\varphi = 0$ heeft nog twee andere wortels; namelijk $Cos.\varphi = + 1$ en $Cos.\varphi = - 1$ voortgebragt, en tot deze behooren de hoeken $\varphi = 0^\circ$ en $\varphi = 180^\circ$, zijnde de overeenkomstige Sinussen dezer hoeken, beide gelijk nul; dan, deze geven noch maxima noch minima; omdat wegens $Sin.\varphi = 0$, de tweede en volgende differentialen, in beide gevallen, verdwijnen.

Alhoewel nu alle deze gevondene maxima en minima, in de vergelijking $y = \frac{1}{4} a^2\, Sin.\varphi \times Sin.2\varphi \times Sin.3\varphi$, in de daad voorhanden zijn, volgt daarom niet, dat onze gevraagde driehoek er even zoo vele zal hebben. Hier geldt wederom dezelfde aanmerking, welke wij, in de oplossing van voorstel 90 hier boven, *Bladz.* 232, gemaakt hebben. Ons vraagstuk is tot een ander gebragt, om namelijk zulk eenen boog φ te vinden, dat $Sin.\varphi \times Sin.2\varphi \times Sin.3\varphi$ een maximum worde? De oplossing heeft ook de minima leeren kennen: doch in deze eind-vergelijking is de voorwaarde, welke de natuur des driehoeks medebrengt, dat namelijk $\varphi + 2\varphi = 3\varphi < 180^\circ$ moet zijn, niet meer opgesloten. Het voorgestelde werkstuk is dus uit zijnen aard aan eene voorwaarde verbonden, waaraan het werkstuk, om $Sin.\varphi \times Sin.2\varphi \times Sin.3\varphi$ tot een maximum te maken, niet meer onderworpen blijft, onder alle de gevondene waarden van φ kan derhalve slechts alleen die voldoen, wiens drievoud kleiner dan 180° is, en deze is . . . .

$\varphi =$

$\varphi = 39^\circ 24' 54'',85$, welke y, en bijgevolg den inhoud des driehoeks, tot een *maximum* maakt.

Met deze waarde van φ vindt men nu, voor de zijden, (zie *Fig.* 88.)

$$AC = a\ Sin.\varphi = \tfrac{1}{6} a \sqrt{(24 - 3\sqrt{10})}$$
$$BC = a\ Sin.2\varphi = \tfrac{1}{6} a \sqrt{(22 + 4\sqrt{10})}$$
$$AB = a\ Sin.3\varphi = \tfrac{1}{18} a \sqrt{(204 + 15\sqrt{10})}$$

en voor den inhoud des driehoeks of voor y:

$$y = \frac{a^2 \times [34\sqrt{2} + 5\sqrt{5}]}{216}$$

of deze wortel-uitdrukking nader ontwikkeld hebbende,

$$y = 0{,}274368523\ a^2$$

welke uitdrukking, die de betrekking van den inhoud des grootsten driehoeks tot het vierkant van de middellijn des cirkels, waarin hij beschreven is, uitdrukt, ook door middel van de *Log. Sin. Tafel* (zoo als de Heer HUGUENIN in zijne oplossing gedaan heeft,) kan gevonden worden.

2°. Wanneer men niet onmiddelijk de vergelijking (1), *Bladz.* 267, de waarde van y uitdrukkende, in eene functie van den enkelden boog φ verkiest te herleiden, kan men dezelve in haren oorspronkelijken toestand differentieren, en men vindt dan:

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \tfrac{1}{2} a^2 \times [3 Sin.\varphi \times Sin.2\varphi \times Cos.3\varphi + 2 Sin.\varphi \times Sin.3\varphi \times Cos.2\varphi + Sin.2\varphi \times Sin.3\varphi \times Cos.\varphi] \ (\beta)$$

maar dan moet men toch, om tot eene welgeordende vergelijking te komen, dezelfde substitutie maken, welke dan wederom de vergelijking . . . $[24\ Cos^4.\varphi - 16\ Cos^2.\varphi + 1] \times [Cos^2.\varphi - 1]$ zal te voorschijn brengen.

3°. De Heer HUGUENIN schrijft, in de vergelijking $24\ Cos^4.\varphi - 16\ Cos^2.\varphi + 1$, voor $Cos^2.\varphi$ derzelver bekende waarde $\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\ Cos.2\varphi$, verkrijgt dan de vierkants vergelijking:

$$6\ Cos^2.2\varphi + 4\ Cos.2\varphi - 1 = 0$$

en hieruit $Cos.2\varphi = \frac{1}{8}[-2 \pm \sqrt{10}]$, met welke waarde hij dezelfde uitkomsten, als boven, verkrijgt.

4°. De Heeren HUGUENIN en VAN EEGHEN komen, doch langs onderscheidene wegen, de eerste, door de vergelijking (B). door $Cos.\varphi \times Cos.2\varphi \times Cos.3\varphi$ te deelen, en de ander, door, in de vergelijking, $24\,Cos^4.\varphi - 16\,Cos^2.\varphi + 1$, te stellen, $Cos^2.\varphi = 1 : Sec^2.\varphi = 1 : [1 + Tang^2.\varphi]$, tot de vergelijking:

$$Tang^4.\varphi - 14\,Tang^2.\varphi + 9 = 0$$

waaruit $Tang.\varphi = \sqrt{5} \pm \sqrt{2}$ gevonden wordt.

Anders, door JACOB DE GELDER.

Het kan nuttig zijn den jongen beoefenaar aan te toonen, dat dit werkstuk ook nog anders kan opgelost worden. Zij *Fig.* 89. (*) ABC de begeerde driehoek, beschreven in den eirkel, wiens middellijn CD $= a$ is, zijnde hoek A $= 2$ hoek B. Men stelle het punt C aan den omtrek standvastig en neme het punt a oneindig digt bij A: voorts Bb $= 2$ Aa, (zijnde namelijk wegens de gegevene eigenschap des driehoeks boog BC $=$ 2 boog AC.) Men trekke de lijnen Ca, Cb, ab en Ab; dan is het verschil der driehoeken ABC en abC klaarblijkelijk gelijk aan:

$$\Delta\ ABb + \Delta\ Aab - \Delta\ ACa - \Delta\ BCb$$

en dit verschil wordt, aangezien Aa oneindig klein is, de differentiaal van den inhoud en deze moet, omdat hij een *maximum* moet zijn, gelijk nul gesteld worden. (†) Uit de vergelijking:

Δ

(*) In plaat VI staat *Fig.* 98. moet zijn *Fig* 89. Trek ook Ab in plaats van aB.

(†) Dat hij een maximum kan worden, blijkt uit de beschouwing der figuur genoegzaam: in elk geval, daar zulks niet bleek, zou men zulk eene gevolgtrekking moeten wantrouwen. DE GELDER.

$$\triangle ABb + \triangle Aab - \triangle ACa - \triangle BCb = o \ldots (1)$$

kan men gemakkelijk eene eigenschap des driehoeks ABC, welke aan denzelven, in het geval van een *maximum*, bijzonder eigen moet zijn, afleiden.

De inhoud $\triangle ABb = \frac{1}{2} AB \times Ab \times Sin. BAb$ zijnde en AB van Ab slechts eene oneindig kleine grootheid verschillende, zoo zal, daar *koorde* $Bb = CD \times Sin. BAb$ en *koorde* $Bb =$ *boog* Bb is, $Sin. BAb = Bb : CD$ zijn en derhalve zal

$$Inh. \triangle ABb = \tfrac{1}{2} AB^2 \times Bb : CD$$

worden. Op dezelfde wijze zal men vinden:

$$Inh. \triangle Aab = \tfrac{1}{2} AB^2 \times Aa : CD$$
$$Inh. \triangle ACa = \tfrac{1}{2} AC^2 \times Aa : CD$$
$$Inh. \triangle BCb = \tfrac{1}{2} BC^2 \times Bb : CD$$

deze waarden van de inhouden der driehoeken dan, in de vergelijking (1), overbrengende, zal men, na behoorlijke herleiding, vinden:

$$3\,AB^2 = AC^2 + 2\,BC^2 \ldots\ldots (2)$$

en deze vergelijking bevat dan de betrekking, welke er tusschen de zijden des driehoeks, op het oogenblik, dat zijn inhoud een *maximum* wordt, bestaan moet.

De voorwaarde, bij welke $A = 2B$ moet zijn, geeft nog eene tweede vergelijking tusschen de zijden. Laat de lijn AE den hoek BAC midden door deelen; dan is hoek $BAE = B$ en $AE = BE$. Volgens de bekende eigenschap, (*Beg.* IV *Stell.* IV *B.*) is nu:

$$AC : AB = CE : BE$$
$$AC + AB : BC = AB : BE$$
$$BE = \frac{AB \times BC}{AB + AC}.$$

maar, volgens *Beg.* XXV *Stell.* V *B.* is:

$$AC \times AB = AE^2 + BE \times EC = BE^2 + BE \times EC \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots = BE \times BC$$

dat is, voor BE hare waarde stellende,

$$AC^2 + AC \times AB = BC^2 \ldots (3)$$

Stellen wij nu, om te bekorten, $AC = x$.

AB = y en BC = z; dan veranderen de vergelijkingen (2) en (3) in de twee volgende:

$$3y^2 = x^2 + 2z^2 \text{ en } x^2 + xy = z^2$$

uit welke de betrekking der grootheden x, y en z gemakkelijk gevonden wordt; want men heeft:

$$2z^2 = 3y^2 - x^2 = 2x^2 + 2xy$$

of . . . . . $2xy = 3y^2 - 3x^2$ . . . . (h)

Deze laatste in het vierkant gebragt, en aan beide zijden $36x^2y^2$ bijgeteld hebbende, wordt, uit de som den vierkants-wortel trekkende,

$$2xy\sqrt{10} = 3y^2 + 3x^2$$

deze met vergel. (h) optellende, en (h) van dezelve aftrekkende, vindt men, na door de gelijke factoren gedeeld te hebben:

$$6x = [2\sqrt{10} - 2]y; \text{ en } 6y = [2\sqrt{10} + 2]x$$

Men stelle nu $x = 6u$; dan wordt $y =$ . . . $(2 + 2\sqrt{10})\,u$, en $z^2 = x^2 + xy =$ . . . . $(48 + 12\sqrt{10})\,u^2$. Men verkrijgt dan:

$$x^2 = 36u^2;\ y^2 = [44+8\sqrt{10}]u^2,\ z^2 = [48+12\sqrt{10}]u^2$$

Er blijft dan niets anders over, dan de waarde van u te vinden. Volgens *Beg.* XXVIII *St.* V *B.* is, de inhoud des driehoeks = I stellende,

$$a^2 = x^2y^2z^2 : 4\,\mathrm{I}^2$$

en volgens *Bijv.* XIX *St.* III *B.* is verder,

$$16\,\mathrm{I}^2 = 4x^2y^2 - (x^2 + y^2 - z^2)^2$$

en diensvolgens:

$$a^2 = \frac{4x^2y^2z^2}{4x^2y^2 - [x^2 + y^2 - z^2]^2}$$

Men stelle nu in deze vergelijking, voor x^2, y^2 en z^2, de waarden hier boven gevonden; dan heeft men:

$$a^2 = \frac{4 \cdot 36 \cdot [44 + 8\sqrt{10}] \times [48 + 12\sqrt{10}]\,u^6}{4 \cdot 36 \cdot [44 + 8\sqrt{10}]\,u^4 - [32 - 4\sqrt{10}]^2\,u^4}$$

of na behoorelijke herleiding,

$$a^2 = 72 \times \frac{192 + 57\sqrt{10}}{161 + 44\sqrt{10}} \times u^2$$

$$u = \tfrac{1}{18} \cdot \sqrt{[24 - 3\sqrt{10}]}\;a$$

$$x = \tfrac{1}{3} \cdot \sqrt{[24 - 3\sqrt{10}]}\;a$$

$y =$

$$y = \frac{1}{18} \cdot \sqrt{[204 + 15\sqrt{10}]}\, a$$
$$z = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{[22 + 4\sqrt{10}]}\, a$$

hetwelk alles met de eerste oplossing overeenstemt.

N°. 97. Door

Jacob de Gelder, *U. Huguenin*, en *P. van Eeghen*, *Chz.*

Doorgaands vergenoegt men zich, met de differentiaal der functie, waarvan men het *maximum* of *minimum* zoekt, gelijk nul te stellen, zonder de wortels der vergelijking, daaruit ontstaande, aan de verkennings-vergelijking, welke de tweede differentiaal dezer functie is, te toetsen. Dit gaat nu wel aan, indien het van elders blijkbaar is, dat er een *maximum* bestaat en de vergelijking, die men oplost, slechts eenen wortel heeft; maar wanneer zulks, gelijk hier het geval is, twijfelachtig wordt, en zoo gemakkelijk, door de beschouwing der figuur of der vergelijking, niet kan beslist worden, moet de zaak regelmatig en naar behooren onderzogt worden; waarom wij niet gevraagd hebben naar het *maximum van den omtrek*; maar *te onderzoeken of er een driehoek besta, wiens omtrek een maximum of minimum mogte zijn?*

Men stelle, *Fig.* 88, B $= \phi$ en A $= 2\phi$; dan is, zie de oplossing van het voorgaande vraagstuk, AC $= a$ *Sin.* ϕ; BC $= a$ *Sin.* 2ϕ en AB $= a$ *Sin.* 3ϕ. Stellen wij dan den omtrek des driehoeks $= z$, dan is:

$$z = a\, Sin.\phi + a\, Sin.2\phi + a\, Sin.3\phi$$

Om dan ons vraagstuk op te lossen, moet:

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = a \times [Cos.\phi + 2Cos.2\phi + 3Cos.3\phi]$$

gelijk nul gesteld worden en de waarden van ϕ,

 uit

uit die vergelijking ontstaande, in de verkennings-vergelijking,

$$\frac{\delta\delta z}{\delta\varphi^2} = - a \times [Sin.\varphi + 4 Sin.2\varphi + 9 Sin.3\varphi]$$

worden overgebragt, om, naar mate $\delta\delta z : \delta\varphi^2$ negatief of positief wordt, tot het dadelijk bestaan van een *maximum* of *minimum* te mogen besluiten. Men heeft derhalve:

$$3\ Cos.3\varphi + 2\ Cos.2\varphi + Cos.\varphi = 0$$

nu is (zie DE GELDER's, *Meetk. Anal. Bladz.* 191. I *Deel.*) $Cos.3\varphi = 4\ Cos^3.\varphi - 3\ Cos.\varphi$ en $Cos.2\varphi = 2\ Cos^2.\varphi - 1$, en onze vergelijking wordt dus, door de substitutie dezer waarden,

$$Cos^3.\varphi + \tfrac{1}{3}\ Cos^2.\varphi - \tfrac{2}{3}\ Cos.\varphi - \tfrac{1}{6} = 0\ (A)$$

Na dat men nu, uit deze vergelijking, de drie waarden, welke $Cos.\varphi$ verkrijgen kan, heeft opgelost, zal men die waarden, elk afzonderlijk, in de verkennings-vergelijking $\delta\delta z : \delta\varphi^2$, moeten overbrengen, om te beoordeelen welke waarden van $Cos.\varphi$ de functie $a \times [Sin.\varphi + Sin.2\varphi + Sin.3\varphi]$ tot een *maximum* of *minimum* zullen maken? dan, om dit overbrengen met meer gemak te kunnen uitvoeren, zoo stelle men (zie *Meetk. Anal.* I. *D. Bladz.* 191.) $Sin.3\varphi = [4\ Cos^2.\varphi - 1] \times Sin.\varphi$ en $Sin.2\varphi = 2 Cos.\varphi\ Sin.\varphi$; dan verkrijgt de verkennings-vergelijking deze geschiktere gedaante:

$$\frac{\delta\delta z}{\delta\varphi^2} = -4\,a \times [9\,Cos^2.\varphi + 2\,Cos.\varphi - 2] \times Sin.\varphi\ (B)$$

Het komt er dan alleen maar op aan, om de vergelijking (A) optelossen. Stelt men in dezelve $6\ Cos.\varphi = u$; dan wordt $Cos.\varphi = \tfrac{1}{6} u$, $Cos^2.\varphi = \tfrac{1}{36} u^2$ en $Cos^3.\varphi = \tfrac{1}{216} u^3$, en zij verandert in:

$$u^3 + 2\,u^2 - 24\,u - 36 = 0 \ldots (C)$$

Door de Leerwijze van BUDAN (zie DE GELDER's *Wisk. Lessen*, II *Curs.* XLIX *Les.*) vindt men: dat er een positieve wortel, tusschen + 4 en

en + 5; een negative tusfchen — 1 en — 2, en nog een negative, tusfchen — 5 en — 6 bestaat; en deze wortel-grenzen zijn reeds voldoende, om, uit de verkennings-vergelijking (B), optemaken, wat elk dezer wortels geven zal; want, voor den eersten, is $Cos.\varphi > \frac{2}{3}$ en $< \frac{5}{6}$, en de onderstelling van $Cos.\varphi = \frac{2}{3}$ en $Cos.\varphi = \frac{5}{6}$ maakt, indien men met deze positive cosinus eene positive sinus laat overeenstemmen, dat is, φ in het eerste quadrant neemt, (B) negatief en de eerste wortel geeft derhalve een *maximum*; maar laat men φ in het vierde quadrant vallen en wordt bijgevolg $Sin.\varphi$ negatief; dan zal die eerste wortel een *minimum* geven. Uit de limieten der twee andere negatieve wortels, zal het ook blijken: dat de wortel, tusfchen — 1 en — 2, een *minimum* of *maximum* geeft, naar dat de hoek met $Cos.\varphi$, in dit geval, overeenkomende, in het tweede of derde quadrant genomen wordt; en dat eindelijk de laatste wortel, tusfchen — 5 en — 6, een *maximum* of *minimum* geeft, naar dat men de hoek, welke met dien wortel overeenstemt, in het tweede of derde quadrant neemt. Het blijkt derhalve uit dit alles, dat er, in den ruimsten zin genomen, drie *maxima* en drie *minima* bestaan.

Nu moeten nog de drie waarden van $Cos.\varphi$, het zij door de vergelijking (A), het zij door de vergelijking (C) op te losfen, benaderd worden. Onder de zoo vele verfchillende handelwijzen daartoe voorhanden, heeft DE GELDER, volgens de leerwijze van BUDAN, elken wortel van de vergelijking (C) afzonderlijk benaderd en gevonden:

$$u = + 4{,}71300597;\ u = - 1{,}45185732$$
$$\text{en } u = - 5{,}26114865$$

zijnde deze wortels, tot in het laatste cijfer, naauwkeurig; daar nu $Cos.\varphi = \frac{1}{6}u$ is, zoo

 wor-

worden de wortels van de vergelijking (A) deze volgende:

$Cos.\varphi = +0,7855010$; $Cos.\varphi = -0,2419762$
en $Cos.\varphi = -0,8768581$

wordende hier door de waarden van φ in rangorde de volgende:

$\varphi = 38^\circ 13' 59'',95$, of $321^\circ 46' 0'',05$
$\varphi = 104^\circ 0' 10'',25 \ldots 255^\circ 59' 49'',75$
$\varphi = 151^\circ 15' 56'',35 \ldots 208^\circ 44' 3'',65$

omtrent welke hoeken hetzelfde geldt, wat in het voorgaande vraagstuk is aangemerkt geworden.

De Heer HUGUENIN den jongen beoefenaar een voorbeeld willende geven, hoe de cubische vergelijkingen, drie bestaanbare wortels hebbende, (in welk geval de Cardanische oplossing tot het onherleidbaar geval brengt,) met behulp der goniometrische lijnen, regtstreeks en zonder benadering, kan opgelost worden, gaat tot dat einde op deze wijze te werk. (*) Hij stelt in de vergelijking, $Cos^3.\varphi + \frac{1}{2} Cos^2.\varphi - \frac{1}{2} Cos.\varphi - \frac{1}{8} = 0$, $Cos.\varphi = \frac{1}{6}(x - 1)$ en verkrijgt alzoo de herleide vergelijking:

$$x^3 - 57x - 65\tfrac{1}{2} = 0$$

welke geenen tweeden term meer heeft en bijgevolg in staat gebragt is, om door den Cardanischen regel opgelost te worden. Uit de vergelijkingen, in Tafel N van de *Meetk. Anal. Bladz.* 191, voorkomende, neemt hij de vergelijking $Sin.3\omega = [4\,Cos^2.\omega - 1] \times Sin.\omega$ en verkrijgt, na in dezelve $Cos^2.\omega = 1 - Sin^2.\omega$ gesteld te hebben,

$$Sin^3.\omega \pm 0 - \tfrac{3}{4} Sin.\omega + \tfrac{1}{4} Sin.3\omega = 0 \quad (1)$$

welke eene der bekende vergelijkingen is, om

eenen

(*) Men leze hier de *fraaije Verhandeling van den Heer* O. S. BANGMA, *over eenige voorstellen den cirkel betreffende*, in het II *Deel Mengelwerk van Wiskundige Verhandelingen*, *Bladz.* 73 en inzonderheid het laatste gedeelte, van *Bladz.* 86—91. DE GELDER.

eenen cirkelboog in drie gelijke deelen te verdeelen, wordende in deze $Sin. 3\omega$, als bekend en gegeven, aangenomen. (*)

Men stelle $x = p\ Sin.\omega$; dan verandert deze vergelijking (1) in de volgende:

$$x^3 - \tfrac{3}{4}p^2 x + \tfrac{1}{4}p^3 Sin. 3\omega = 0 \ldots\ldots (2)$$

vergelijkt men nu deze, term voor term, met eene algemeen gegevene cubische vergelijking,

$$x^3 - ax + b = 0 \ldots\ldots\ldots (3)$$

dan vindt men:

$$p = \tfrac{2}{3}\sqrt{3a},\ \text{en}\ Sin. 3\omega = -\frac{9b}{2a\sqrt{3a}},$$

de coefficienten der vergelijking (2) worden derhalve bekend, en $Sin. 3\omega$ is positief of negatief, naar dat b negatief of positief is.

Men zal aldus, door middel van de coefficienten, a en b, der vergelijking (3), de waarde van p en $Sin. 3\omega$ vinden; maar de sinus welke tot den boog 3ω behoort, behoort ook tevens tot $180^\circ - 3\omega$ en tot $-(180^\circ + 3\omega)$; de sinus van ω heeft dus drie waarden, te weten: $Sin.\omega$, ... $Sin.(60^\circ - \omega)$ en $Sin.(60 + \omega)$; gevende de overige bogen dezelfde waarden: de vergelijking (3) zal gevolgelijk deze drie wortels hebben: $x = p\ Sin.\omega$, $x = p\ Sin.(60 - \omega)$ en $x = -p\ Sin.(60^\circ + \omega)$, en deze gevonden hebbende, zal $Cos.\varphi = \tfrac{1}{3}(x - 1)$ voor elk dezer drie waarden van x moeten berekend worden, om de wortels der vergelijking (A) te vinden.

Om echter van deze handelwijze gebruik te kunnen maken, moet: 1° de tweede term van verg. (3) met het negatieve teeken zijn aangedaan, wijl anders $p = \tfrac{2}{3}\sqrt{3a}$ eene onbestaanba-

(*) Men zou ook van de formule $Cos. 3\omega = 4\,Cos^3.\omega - 3\,Cos.\omega$. zie *Meetk. Anal. Bladz.* 191, tot dat zelfde einde, gebruik kunnen maken. DE GELDER.

bare grootheid zou worden: 2° moet $9b < 2a\sqrt{3a}$ zijn; want ontbrak dit vereischte, dan zou . . . $Sin.\,3\omega > 1$ en onbestaanbaar zijn: maar hierin kan nimmer eene hindernis gelegen zijn; want, *ingeval de drie wortels eener cubische vergelijking bestaanbaar zijn, bestaan ook tevens deze twee vereischten* (*) en deze leerwijze is derhalve altijd op het onherleidbaar geval toepasselijk.

In ons bijzonder voorbeeld, is $a = 57$, . . . $b = -65\frac{1}{2}$; derhalve $p = \frac{2}{3}\sqrt{3a} = 2\sqrt{19}$ en $Sin.\,\omega = -\frac{131}{76\sqrt{19}}$. In Logarithmen werken-

(*) *Dat de coefficient van den derden term eener cubische vergelijking, uit welke de tweede term is uitgeroeid, en welker wortelen alle bestaanbaar zijn, altijd negatief is, wordt aldus bewezen.* De som der wortels is, in dien toestand der vergelijking, altijd nul; er bestaan dus altijd twee positieve of twee negatieve wortels, welker som aan den derden negatieven of positieven wortel gelijk is; men kan derhalve deze wortels, of door $2a$, $-a+b$ en $-a-b$; of door $-2a$, $+a+b$ en $+a-b$ (altijd $a > b$ zijnde) voorstellen; daar nu de coefficient van den derden term uit de som van de producten der wortels, twee aan twee genomen, bestaat, is die coefficient, in beide gevallen, $-3a^2 - b^2$ negatief. Voorts is, zie II *Cursus*, § 891, indien de wortels der vergelijking $x^3 - ax + b = 0$ alle bestaanbaar zijn, $\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{27}a^3$ altijd negatief; derhalve (deze uitdrukking met $+ 324$ vermenigvuldigende,) is $81b^2 - 12a^3$ insgelijk negatief, $12a^3$ is dus grooter dan $81b^2$ en $\frac{81b^2}{12a^3}$ is derhalve kleiner dan de éénheid, bijgevolg is ook $\sqrt{\frac{81b^2}{12a^6}} < 1$; of $\frac{9b}{2a\sqrt{3a}} < 1$; deze breuk kan gevolgelijk altijd door de sinus van eenigen boog worden voorgesteld en de voorgedragene leerwijze is dan, in het onherleidbaar geval, altijd toepasselijk. DE GELDER.

kende, vindt men: $Log. Sin. 3\omega = 9,5970809$; derhalve is de boog, uit de tafel genomen, tot die sinus behoorende, $\omega = 23^\circ 17' 36'',36$; maar aangezien de sinus negatief is, moet men den boog uit het derde quadrant nemen, en dan is . . . . $3\omega = 203^\circ 17' 36'',36$; derhalve is $\omega = 67^\circ 45' 52'',12$ $60^\circ - \omega = -7^\circ 45' 52'',12$ en $60^\circ + \omega = 127^\circ 45' 52'',12$, waar van de *Log. Sin.* zijn: 9,9664403; 9,1306595; 9,8979210; voorts is $Log. p = Log. 2 + \frac{1}{2} \times Log. 19 = 0,9404068$ en hier mede vindt men de waarden van x, als volgt:
. 8,0695100; — 1,1777857, *en* — 6,8917216.
en door deze eindelijk de waarden van $Cos. \phi = \frac{1}{8}(x - 1)$, in rangorde, 0,7855011; — 0,2419762 en — 0,9768579, zijnde deze dezelfde, welke de Budansche benadering heeft opgeleverd.

Hier geldt nu wederom dezelfde aanmerking, welke wij in de oplossing van het voorgaande vraagstuk gemaakt hebben: de gevondene waarden van ϕ voldoen wel alle aan de uitdrukking $a \times [Sin. \phi + Sin. 2\phi + Sin. 3\phi]$; maar slechts ééne uit deze, namelijk $\phi = 38^\circ 13' 59'',95$, is alleen op den driehoek toepasselijk. Nemende dus $B = 38^\circ 13' 59'',95$ en $A = 2 B$, zal de omtrek des driehoeks, welke, zoo als men, door berekening, ligtelijk vinden zal, aan $2,6663105 \times a$ gelijk wordt, een *maximum* zijn.

N°. 98. Door

JACOB DE GELDER, *U. Huguenin*, en *P. van Eeghen, Chz.*

De oplossers hebben, langs onderscheidene wegen, eene uitdrukking voor de middellijn des ingeschrevenen cirkels gevonden.

De Heer DE GELDER gaat aldus te werk: men stelle zegt hij, zie (*Fig.* 88.) de middellijn des gegevenen cirkels $= a$, $B = \phi$ en $A = 2\phi$;
dan

dan is (zie de oplossingen van N°. 96 en 97 hier boven.)

$Inh.\ ABC = \frac{1}{2} a^2\, Sin.\phi \times Sin.2\phi \times Sin.3\phi$

$Omtrek = a \times [Sin.\phi + Sin.2\phi + Sin.3\phi]$

Nu is (zie *Beg. der Meetk.* XXVI *Stell.* V *B.*) de inhoud van eenen driehoek gelijk aan deszelfs omtrek, vermenigvuldigd met de halve ſtraal des ingeſchreven cirkels ſtellende dan die ſtraal $= y$ dan is, volgens dit beginſel,

$$y = a \times \frac{Sin.\phi \times Sin.2\phi \times Sin.3\phi}{Sin.\phi + Sin.2\phi + Sin.3\phi}$$

en men moet nu onderzoeken, in welke gevallen, deze functie een *maximum* of *minimum* worden kan?

Men ſtelle wederom $Sin.2\phi = 2 Sin.\phi \times Cos.\phi$ en $Sin.3\phi = [4\ Cos^2.\phi - 1] \times Sin.\phi$ (zie *Meetk. Anal. Bladz.* 191) dan wordt onze vergelijking,

$$y = a \times \frac{Sin.\phi \times 2 Sin.\phi \times Cos.\phi \times [4 Cos^2.\phi - 1] \times Sin.\phi}{Sin.\phi + 2 Sin.\phi \times Cos.\phi + [4 Cos^2.\phi - 1] \times Sin.\phi}$$

of, teller en noemer door $Sin.\phi$ deelende,

$$y = a \times \frac{2 Cos.\phi \times Sin^2.\phi \times [4 Cos^2.\phi - 1]}{2 \times [2 Cos.\phi + 1] \times Cos.\phi}$$

en teller en noemer nogmaals door $2\ Cos.\phi \times [2\ Cos.\phi + 1]$ deelende, en voor $Sin^2.\phi$ hare waarde $1 - Cos^2.\phi$ ſchrijvende, vindt men:

$$y = a \times [1 - Cos^2.\phi] \times [2\ Cos.\phi - 1]$$

en door ontwikkeling der aangewezene producten,

$$y = -a \times [2 Cos^3.\phi - Cos^2.\phi - 2 Cos.\phi + 1] \ldots (A)$$

deze is nu de eenvoudigſte uitdrukking voor de ſtraal des ingeſchrevenen cirkels. Het blijkt nu wel uit de figuur, dat deze ſtraal een *maximum* moet worden; doch om in dezen zoo als het behoort te werk te gaan, zoeke men de eerſte en tweede differentiaal dezer vergelijking, en dan vindt men:

$$\frac{\delta y}{\delta \phi} = 2\ a \times [3\ Cos^2.\phi - Cos.\phi - 1] \times Sin.\phi$$

δδy

$$\frac{\delta\delta y}{\delta\varphi^2} = 2a \times [9\,Cos^3.\varphi - 2\,Cos^2.\varphi - 7\,Cos.\varphi + 1]$$

ftelt men nu de waarde van $\delta y : \delta\varphi$ gelijk nul, dan vindt men:

$$Sin.\varphi = 0;\ en\ 3\,Cos^2.\varphi - Cos.\varphi - 1 = 0$$

uit welke laatfte vergelijking $Cos.\varphi = \frac{1}{6}[1 + \sqrt{13}]$ en $Cos.\varphi = \frac{1}{6}[1 - \sqrt{13}]$, of $Cos.\varphi = 0{,}76759188$ en $Cos.\varphi = -0{,}43425855$ gevonden wordt; de bogen, welke aan deze waarden voldoen, zijn, voor $Sin.\phi = 0$, $\phi = 0^\circ$ en $\phi = 180^\circ$, waarvan de cofinusfen zijn $+1$ en -1; en, voor de tweede vergelijking, $\varphi = 39^\circ 51' 42'',73$ en $\varphi = 115^\circ 44' 17'',23$. Nu maakt $\varphi = 0^\circ$ de tweede differentiaal $+1$; de waarde $\varphi = 180^\circ$ maakt dezelve -3; de derde waarde maakt dezelve $13 - 11\sqrt{13}$ negatief en de vierde maakt dezelve $13 + 11\sqrt{13}$ pofitief $\varphi = 180^\circ$ en $\varphi = 39^\circ 51' 42'',73$ behooren derhalve tot *maxima* en de twee andere waarden, $\phi = 0^\circ$ en .... $\varphi = 115^\circ 44' 17'',23$ tot *minima*. Van alle dezen is flechts de waarde $\varphi = 39^\circ 51' 42'',73$ op den driehoek toepasfelijk, en men vindt, de berekening verder opmakende:

$$AC = a \times \tfrac{1}{6}\sqrt{[22 - 2\sqrt{13}]};\ BC = a \times \tfrac{1}{3}\sqrt{[39 + 4\sqrt{13}]}$$

$$AB = a \times \tfrac{1}{54}[1174 + 286\sqrt{13}]$$

en voor de middellijn des ingefchrevenen cirkels,

$$2y = \tfrac{1}{27}\,a \times [13\sqrt{13} - 35] = 0{,}4394876\,a$$

De Heer HUGUENIN, neemt, om het vraagftuk in vergelijking te brengen, de formule van DE GELDER (zie *Meetk. Anal. Bladz.* 95) te baat. Indien R en r de ftralen der *om* en *ingefchreyene* cirkels zijn en 2α en 2β twee hoeken des driehoeks beteekenen, is aldaar bewezen dat

$$r = 4R \times Sin.\alpha \times Sin.\beta \times Cos.(\alpha + \beta)\ ..\ (P)$$

wezen zal. Om deze formule (vervolgt hij) tot ons oogmerk bekwaam te maken, fchrijf ik voor $Sin.\alpha\ Sin.\beta = \frac{1}{2}[Cos.(\alpha - \beta) - Cos.(\alpha + \beta)]$ en verkrijg $Sin.\alpha\ Sin.\beta\ Cos.(\alpha + \beta) = ...$ $\frac{1}{2}[Cos.(\alpha - \beta)\ Cos.(\alpha + \beta) - Cos^2.(\alpha + \beta)]$;

maar

maar aangezien $Cos.(\alpha - \beta)\, Cos. \times (\alpha + \beta) = \frac{1}{2}[Cos.2\beta + Cos.2\alpha]$, en $Cos^2.(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}[1 + Cos.2(\alpha + \beta)]$ is, wordt $Sin.\alpha\, Sin.\beta\, Cos.(\alpha + \beta) = \frac{1}{4}[Cos.2\alpha + Cos.2\beta - Cos.2(\alpha + \beta) - 1]$, welke waarde in de vergelijking (P) overgebragt zijnde, en daarna ... $2\alpha = A$, $2\beta = B$ en $C = 180^\circ - 2(\alpha + \beta)$ gesteld hebbende, dezelve worden zal:

$$r = R \times [Cos.A + Cos.B + Cos.C - 1] \ldots (Q)$$

welke vergelijking ons leert: *dat de som van de cosinussen van de hoeken eens driehoeks gelijk is aan de som van de stralen der in en omgeschrevene cirkels, gedeeld door de straal des cirkels, die om denzelven beschreven is.*

Men stelle nu in de vergelijking (Q) $B = \phi$ en $A = 2\phi$; dan is $C = 180^\circ - 3\phi$, en dus $Cos.C = - Cos.3\phi$, en

$$r = R \times [Cos.\phi + Cos.2\phi - Cos.3\phi - 1]$$

moet bijgevolg een *maximum* zijn.

Stelt men in deze $Cos.3\phi = 4\,Cos^3.\phi - 3\,Cos.\phi$, en $Cos.2\phi = 2\,Cos^2.\phi - 1$; dan komt men tot de formule:

$$r = -2R \times [2\,Cos^3.\phi - Cos^2.\phi - 2\,Cos.\phi + 1]$$

zijnde deze (wanneer men $r = y$ en $2R = a$ neemt,) dezelfde formule (A), welke DE GELDER gevonden heeft.

De Heer VAN EeGHEN maakt met den Heer HUGUENIN van hetzelfde beginsel gebruik; maar de uitvoering der oplossing neemt bij hem eene geheel andere wending. Stel (zegt hij,) $B = \phi$, $A = 2\phi$ en $C = 180^\circ - 3\phi$; dan is (de middellijn des omgeschrevenen cirkels $= a$ zijnde,) $AC = a\,Sin.\phi$, $BC = a\,Sin.2\phi$ en $AB = a \times Sin.3\phi$, en, volgens DE GELDER's, *Meetk. Anal. Bladz.* 95, is, de straal des ingeschrevenen cirkels $= y$ stellende,

$$y = 4\,a\,Sin.\tfrac{1}{2}\phi \times Sin.\phi \times Cos.1\tfrac{1}{2}\phi$$

of, $\phi = 2\psi$ stellende,

$$y = 4\,a \times Sin.\psi \times Sin.2\psi \times Cos.3\psi$$

nu

nu is (zie DE GELDERS, *Beg. der Meetk. Bladz.* 569, *form.* 29, aldaar $a = b = c$ stellende,) $Cos.3\psi = Cos^3.\psi - 3Cos.\psi \times Sin^2.\psi$ en $Sin.2\psi = 2\,Sin.\psi\,Cos.\psi$ en diensvolgens,

$$y = 4a \times [Sin^2.\psi\,Cos^4.\psi - 3\,Sin^4.\psi\,Cos^2.\psi]$$

derhalve,

$$\frac{\delta y}{\delta \psi} = 8a \times [Cos^4.\psi - 8\,Cos^2.\psi \times Sin^2.\psi + 3Sin^4\psi]$$
$$\ldots\ldots\ldots \times Sin.\psi\,Cos.\psi$$

stelt men deze $= 0$; dan is $Sin.\psi \times Cos.\psi = \frac{1}{2}Sin.2\psi = 0$, en bovendien

$$Cos^4.\psi - 8\,Sin^2.\psi\,Cos^2.\psi + 3\,Sin^4.\psi = 0$$

deelt men eindelijk deze vergelijking door $3\,Cos^4.\psi$, dan verkrijgt men:

$$Tang^4.\psi - \tfrac{8}{3}\,Tang^4.\psi + \tfrac{1}{3} = 0 \ldots (R)$$

derhalve $Tang^2.\psi = Tang^2.\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{3}[4 \pm \sqrt{13}]$ en $Tang.\frac{1}{2}\varphi = \pm\sqrt{[\frac{1}{3}(4 \pm \sqrt{18})]}$. Maar men vindt hieruit ook onmiddelijk $Cos.\varphi$; want $\frac{1 - Cos.\varphi}{1 + Cos.\varphi} = Tang^2.\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{3}[4 \pm \sqrt{13}]$ zijnde, zie DE GELDER, *Beg. der Meetk.* §. 561, is $Cos.\varphi = \frac{-1 \mp \sqrt{13}}{7 \pm \sqrt{13}} = \frac{1}{6}(1 \pm \sqrt{13})$, zoo als boven gevonden is. Stelt men in de vergelijking (R) $Tang^2.\psi = Tang^2.\frac{1}{2}\varphi = \frac{1 - Cos.\varphi}{1 + Cos.\varphi}$ dan verkrijgt men de verg. (A) van de oplossing door DE GELDER hier boven opgegeven.

No. 99. Door

JACOB DE GELDER.

Zij AB (*Fig.* 92.) de middellijn des gegevenen cirkels $=$ 13 decimeters, M zijn middelpunt, MP $=$ 3 decimeters en bijgevolg P het gegeven punt buiten het middelpunt; dan is AM $=$

MC

MC = MD = MB de ſtraal en AM : MP = $\frac{1}{3} \times 13 : 3 = 1 : \frac{6}{13} = 1 : 0,4615384615384$ *enz.* men neme dus (het geen meer gemak in de berekening zal aanbrengen) de ſtraal AM = 1 en MP = 0,461538 *enz.*

Stellen wij, dat PC en PD de twee elkander regthoekig ſnijdende lijnen zijn, en dat het gedeelte, dat zij van den cirkel afſnijden, één-vierde van deszelfs inhoud evenare, dan is het klaar, dat, wanneer men den hoek APC, dien wij = φ ſtellen, vinden kunnen, het werkſtuk zal opgelost zijn.

Men trekke uit het middelpunt M, de ſtralen MC en MD, benevens MF aan PC en MG aan PD evenwijdig, dan is hoek GMF = hoek CPD = 90°: de ſector GDEFM is dan één-vierde van den inhoud des cirkels en het uitgeſneden ſtuk DEFCP moet dan gelijk aan dien ſector zijn; dit dan alzoo zijnde, zal (indien men hier van aftrekt het ſtuk DEFI,) *Fig.* GDIM = *Fig.* FCPI zijn; verlengt men nu voorts de lijnen GM en CP tot in H, dan zal GDIM + MIPH = FCPI + MIPH, dat is, GDIM + MIPH = FCMH moeten zijn.

Deze laatſte gelijkheid of eigenſchap der figuur kan ons nu dienen, om tot de noodige vergelijkingen te komen. Omdat hoek CPD = 90° is, is hoek BPD = *Compl.* APC; en daar APC = φ is, is hoek BPD = 90° — φ en *Sin.* BPD = *Cos.* APC. Nu is, in de driehoeken MPC en MPD, volgens den bekenden regel:

MC : MP = *Sin.* APC : *Sin.* MCH
MD : MP = *Sin.* BPD : *Sin.* PDM

dat is, de waarden in plaats ſtellende,

$1 : Sin.\varphi = a : Sin.MCH = a \times Sin.\varphi$
$1 : Cos.\varphi = a : Sin.MDP = a \times Cos.\varphi$

ſtellen wij dan, om te bekorten, MCH = CMF = χ en PDM = GMD = ψ; dan is $Sin.\chi = a \times Sin.\varphi$ en $Sin.\psi = a \times Cos.\varphi$ en nu is het

het gemakkelijk, om de straks gevondene vergelijking,

GDIM + MIPH = FCMH . . . (A)

in stelkundige karaters uit te drukken; want het is zigtbaar, dat GDIM = *Sect.* GDM + *Drieh.* MID, en FCMH = *Sect.* MFC + *Drieh.* MCH zijnde, (wegens MG = MD = MF = MC = 1,) 1°.) GDIM = $\frac{1}{2}\psi + \frac{1}{2}$ *Sin.* $\psi \times$ *Cos.* ψ; . . . 2°.) MIPH = *Sin.* $\chi \times$ *Sin.* ψ en 3°.) FCMH = $\frac{1}{2}\chi + \frac{1}{2}$ *Sin.* $\chi \times$ *Cos.* χ zal zijn en dat gevolgelijk de voorname vergelijking (A) worden zal:

$\frac{1}{2}\psi + \frac{1}{2}$ *Sin.* ψ *Cos.* ψ + *Sin.* χ *Sin.* $\psi = \frac{1}{2}\chi +$ . . . . $\frac{1}{2}$ *Sin.* χ *Cos.* χ . . . . (1)

moetende in deze $\frac{1}{2}\psi$ en $\frac{1}{2}\chi$ in deelen van de straal en niet in graden zijn uitgedrukt. Deze vergelijking zal nu met behulp der vergelijkingen: *Sin.* $\chi = a$ *Sin.* φ . . (2) en *Sin.* $\psi = a$ *Cos.* φ . . (3) moeten worden opgelost.

De eerste vergelijking is, daar de sinussen, te gelijk met hare bogen, in dezelve voorkomen, transcendentaal: en kan gevolgelijk niet anders, dan door de reeksen of langs den weg van benadering, opgelost worden. Stellen wij haar onder deze gedaante:

$\frac{1}{2}[\chi - \psi] + \frac{1}{2}$ *Sin.* χ *Cos.* $\chi - \frac{1}{2}$ *Sin.* ψ *Cos.* ψ . . . . − *Sin.* χ *Sin.* $\psi = 0$

dan zal men dezelve, met behulp der vergelijkingen *Sin.* $\chi = a$ *Sin.* φ, *Cos.* $\chi = \sqrt{(1 - a^2 \textit{Sin}^2 \varphi)}$, *Sin.* $\psi = a$ *Cos.* φ en *Cos.* $\psi = \sqrt{(1 - a^2 \textit{Cos}^2 \varphi)}$, onder deze gedaante;

$\frac{1}{2} \times$ [*Boog. Sin.* (a *Sin.* φ) − *Boog. Sin.* (a *Cos.* φ)]
+ $\frac{1}{2} a$ *Sin.* $\varphi \sqrt{(1 - a^2 \textit{Sin}^2 \varphi)}$ . . . .
− $\frac{1}{2} a$ *Cos.* $\varphi \sqrt{(1 - a^2 \textit{Cos}^2 \varphi)}$ . . . .
− a^2 *Sin.* $\varphi \times$ *Cos.* $\varphi = 0$

kunnen brengen, welke op geene andere wijze, dan door eene oneindig voortloopende reeks, inhoudende de magten, het zij van *Sin.* φ of *Cos.* φ, ontwikkeld en door benadering kan opgelost worden: dit voorstel behoort derhalve tot die soort

van voorstellen, waarvan EULER, in zijne *Intr. ad Anal. Infin. Vol.* II *Cap.* XXII, verscheidene voorbeelden gegeven heeft, en tot welke ook N°. 201, 202, 203 en 204 van het voorgaande Deel der *Verz. van Voorst.* behooren.

De hier aangewezene herleiding der eindvergelijking, welke meer langwijlig dan moeijelijk is, zou ons weinig helpen, daar men geen stap nader dan tot eene nieuwe in te rigten benadering zou gevorderd zijn. Het is dan beter de benadering regtstreeks aan te vatten, dat is voor ϕ eene gegiste waarde aan te nemen, $Sin. \chi$ en $Sin. \psi$ door de vergelijkingen:

$$Sin. \psi = a\ Sin. \phi \text{ en } Sin. \psi = a\ Cos. \phi$$

te bepalen en na te gaan, in hoe verre de ondersteldе waarde aan vergelijking (1), welke wij nu onder deze gedaante stellen,

$$\tfrac{1}{2}(\chi-\psi)+Sin.2\chi-Sin.2\psi-Sin.\chi \times Sin.\psi = 0 \ (B)$$

voldoet. Het is hier, dat de Leer der valsche Positien, welke men verkeerdelijk bij het oplossen van eenvoudige werkstukken pleegt te gebruiken, eene wezenlijke en nuttige toepassing heeft.

Nemen wij, dat voor, gelijkmatige en geringe veranderingen van ϕ, het voorste lid der vergelijking (B) insgelijks gelijkmatig verandere, en dat, voor $\phi = A$, de waarde van het voorste lid der vergelijking niet veel van nul verschille: indien dan, voor $\phi = A$, en $\phi = A + p$, het voorste lid der waarden B en B + q verkrijgt; dan zal, indien de waarde van ϕ genomen wordt,

$$A, A+p, A+2p, A+3p, enz. A+np$$

het voorste lid der vergelijking worden,

$$B, B+q, B+2q, B+3q\ enz.\ B+nq$$

Indien dan $B + nq = 0$ gesteld wordt; dan is

$$n = -\frac{B}{q};\ np = -\frac{pB}{q},\ \text{en } \phi = A + np$$
$$= A$$

$= A + \frac{p}{q} B$; en deze vergelijking zal dan zoo veel te nader bij de waarheid komen, naar gelang, dat B minder van nul verschilt en de grootheden p en q kleiner vallen.

Het is uit de vergelijking (B) duidelijk te zien: dat $\chi > \psi$ en gevolgelijk $Sin.\chi > Sin.\psi$ en dat bijgevolg $Sin.\phi > Cos.\phi$ moet zijn.

Neemt men $\phi = 45^\circ$, dan is $Sin.\phi = Cos.\phi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $Sin.\chi = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$ en $Sin.\psi = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$; derhalve $\chi = \psi$, $\frac{1}{2}(\chi - \psi) = 0$, $Sin^2.\chi - Sin^2.\psi = 0$ en het voorste lid der vergelijking wordt derhalve $= - Sin.\chi \times Sin.\psi = - \frac{1}{4} a^2 \times 2 = - \frac{1}{2} a^2 = - 0,10649$.

Neemt men $A = 49^\circ 12'$ en $A + p = 49^\circ 13'$, en dus $p = 1'$; dan vindt men, in Logarithmen werkende, $B = - 0,00030469$; $B + q = - 0,00026249$ en $q = + 0,00004220$; derhalve is

$$n = - \frac{B}{q} = + \frac{0,0030469}{0,0004220} = + 7',2 \text{ en } \phi = A$$

$+ np = 49^\circ 12' + 7',2 = 49^\circ 19',2$ zeer nabij.

Stelt men, om tot eene tweede benadering te komen, $A = 49^\circ 19'$, $A + p' = 49^\circ 20'$; dan is $p' = 60''$, en men vindt: $B = - 0,0000831$ en $B + q = + 0,0003522$, en hier uit . . . $\phi = 49^\circ 19' 11'',45$. Tot eene naauwkeuriger benadering zou men zich van eene sinus tafel moeten bedienen, welke verder dan tot zeven cijfers in de tiendeeligen ginge.

No. 163. Door

Jacob de Gelder, *C. J. van Brussel, P. van Eeghen, Chz., L. C. Mazel, N. Bondt, Mozes Lemans, J. C. van Setten, A. van der Swan, Rehuel Lobatto, Jan Pauw, S. J. Mulder*, en *C. Lantz, Jr.*

Het zou, zonder eenige toevallige overeenkomst tusschen de gegevene vergelijkingen:

$$x^2 + y^2 - 5x + 9y = 968 \quad . \ . \ (1)$$
$$8y^2 - xy - 30x + 54y = 5808 \quad . \ . \ (2)$$

niet mogelijk zijn om dezelve tot eene vierkantseindvergelijking te brengen; zulk eene toevallige overeenkomst heeft hier plaats; want, wanneer men het zesvoud van de eerste vergelijking van de tweede aftrekt, dan heeft het verschil:

$$2y^2 + xy - 6x^2 = 0$$

de twee factoren $y + 2x = 0$ en $2y - 3x = 0$, welke ook gevonden worden, wanneer men, in deze vergelijking, x als bekend beschouwt en y uit dezelve oplost. Uit deze twee factoren volgt nu $y = 1\frac{1}{2}x$ en $y = -2x$.

Elke dezer twee vergelijkingen ($y = 1\frac{1}{2}x$ en $y = -2x$,) kan met eene der twee gegevene (1) en (2), vereenigd worden; men zal dan twee onderscheidene stelsels van twee vergelijkingen tot twee onbekenden hebben, welke, elk op zich zelve, aan het stelsel der twee gegevene vergelijkingen zullen voldoen. Het eerste stelsel geeft:

$$x^2 + y^2 - 5x + 9y = 968$$
$$\text{en } y = 1\tfrac{1}{2}x$$

stelt men in de eerste van deze voor y hare waarde uit de tweede genomen, dan heeft men:

$$x^2 + \tfrac{9}{4}x^2 - 5x + 13\tfrac{1}{2}x = 968$$
$$\text{of } x^2 + \tfrac{34}{13}x - \tfrac{3872}{13} = 0$$

welke geeft $x = 16$, of, $x = -\frac{242}{13}$; en $y = 24$, of $y = -\frac{363}{13}$.

Het tweede stelsel bestaat uit de vergelijkingen:

$$x^2 + y^2 - 5x + 9y = 968$$
$$\text{en } y = -2x$$

welke geven $x = 2\frac{3}{10} + \frac{1}{10}\sqrt{19889}$ of $= 2\frac{3}{10} - \frac{1}{10}\sqrt{19889}$ en $y = -4\frac{3}{5} - \frac{1}{5}\sqrt{19889}$ of $= -4\frac{3}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{19889}$.

Men vindt hetzelfde, indien men $y = 1\frac{1}{2}x$ en $y = -2x$ met de vergelijking (2) vereenigt. Elke der vier gevondene waarden voor x en y voldoen aan beide de gegevene vergelijkingen;

zoo als bij de proef blijken zal; en er bestaan bij gevolg vier waarden of wortels.

N°. 101. Door

C. J. van Brussel, *J. C. van Setten*, *C. Lantz*, *Jr.*, *L. van Heusden*, *N. Bondt*, *P. van Eeghen*, *Chs.*, en JAN PAUW.

De schepen A en B liggen, *Fig.* 90, Zuid en Noord van elkander. A zeilt O. Z. O.; dus is hoek BAC $= \frac{3}{4} \times 90^\circ = 67^\circ 30'$. B zeilt N. N. O., dus is hoek ABC $= \frac{1}{4} \times 90^\circ = 22^\circ 30'$, en de driehoek ABC is derhalve in C regthoekig: stellende dan AC $= x$, dan is BC $= x + 6$ en wij hebben derhalve:

$$Sin.\,BAC : Sin.\,ABC = BC : AC$$

of,
$$Sin.\,67^\circ 30' : Sin.\,22^\circ 30' = x + 6 : x$$

waar uit gemaakt wordt de evenredigheid,

$$Sin.\,67^\circ 30' - Sin.\,22^\circ 30' : Sin.\,22^\circ 30' = 6 : x$$

en hier uit volgt dan eindelijk:

$$x = 6 \times \frac{Sin.\,22^\circ 30'}{Sin.\,67^\circ 30' - Sin.\,22^\circ 30'} = AC$$

maar $Sin.\,22^\circ 30' = \frac{1}{2}\sqrt{(2 - \sqrt{2})}$ en ... $Sin.\,67^\circ 30' = \frac{1}{2}\sqrt{(2 + \sqrt{2})}$; derhalve:

$$x = \frac{6\sqrt{(2 - \sqrt{2})}}{\sqrt{(2 + \sqrt{2})} - \sqrt{(2 - \sqrt{2})}} = AC$$

vermenigvuldigt men teller en noemer dezer breuk met $\sqrt{(2 + \sqrt{2})} + \sqrt{(2 - \sqrt{2})}$ en naderhand nog met $\sqrt{2}$, dan vindt men:

$$x = 3\sqrt{2} = 4{,}24264 = AC$$

$$x + 6 = 6 + 3\sqrt{2} = 10{,}24264 = AC$$

en eindelijk $AB = \sqrt{[AC^2 + BC^2]} = 6\sqrt{(2 + \sqrt{2})} = 11{,}087$.

N°. 102.

No. 102. Door

C. J. van Brussel, *J. C. van Setten*, *P. van Eeghen*, *Chz.*, *N. Bondt*, JAN PAUW, en *L. van Heusden*.

A en B liggen, *Fig.* 91, Oost en West van elkander. A zeilt ten zuiden, dus hoek BAC $= 90°$, B zeilt Z. O. ten O. dus hoek ABC $= \frac{3}{8} \times 90° = 33° 45'$. Stellende nu AC $= x$ dan is BC $= x + 8$ en

$$Sin. BAC : Sin. ABC = BC : AC$$

$$1 : Sin. 33° 45' = x + 8 : x$$

$$1 - Sin. 33° 45' : Sin. 33° 45' = 8 : x$$

$$x = 8 \times \frac{Sin. 33° 45'}{1 - Sin. 33° 45'} = AC$$

of, omdat $Sin. 33° 45' = Cos. 56° 15'$ is

$$x = 8 \times \frac{Sin. 33° 45'}{1 - Cos. 56° 15'} = 4 \times \frac{Sin. 33° 45'}{Sin^2. 28° 7' 30''}$$

In Logarithmen werkende, heeft men

$Log. 4 = 0,6020600$

$L. Sin. 28° 7' 30'' = 9,6733866$ $L. S. 33° 45' = 9,7447390$

$L. Sin^2. 28° 7' 30'' = 9,3467732$ . . $Compl. = 0,6532268$

$Log. x = Log. AC = 1,0000258$

Dus $x = 10$ nagenoeg $= AC$

$x + 8 = 18$ . . . $= BC$

en $\sqrt{(BC^2 - AC^2)} = 15 = AB$

No. 103. Door

JAN PAUW, *P. van Eeghen*, *Chz.*, *N. Bondt*, *J. C. van Setten*, *A. van der Swan*, *C. J. van Brussel*, en *C. Lantz*, *Jr.*

Stel de som Dukaten, die hij schuldig is $= x$, het geen hij na de eerste betaling schuldig blijft $= y$ Dukaten; dan betaalt hij $7y + 5$ Dukatons, dat is (omdat een Dukaton $= \frac{3}{5}$ Dukaat is) $\frac{3}{5} \times$

$\frac{3}{5} \times (7y + 5) = 4\frac{1}{5}y + 3$ Dukaten en de geheele ſchuld is derhalve $y + 4\frac{1}{5}y + 3 = 5\frac{1}{5}y + 3 = x$ Dukaten.

Van de y Dukaten, die hij, na de eerſte betaling, was ſchuldig gebleven, betaalt hij een zeker aantal Dukatons en blijft nog een zeker aantal Dukaten ſchuldig. Stel dit aantal Dukaten $= z$, dan betaalde hij, volgens de vraag, $3z$ Dukatons $= \frac{3}{5} \times 3z = 1\frac{4}{5}z$ Dukaten, en dus is $y = z + 1\frac{4}{5}z = 2\frac{4}{5}z$.

Brengt men deze waarde van y in de geheele ſchuld over, dan wordt $x = 5\frac{1}{5}y + 3 = 5\frac{1}{5} \times 2\frac{4}{5}z + 3 = \frac{364}{25}z + 3$; zal nu alles in de kleinſte heele getallen bepaald worden, (*) moet z een veelvoud van 25 zijn; om dus alles in de kleinſte heele getallen te vinden, neme men $z = 25$, de laatst ſchuldig geblevene Dukaten; dan is $y = 2\frac{4}{5}z = 70$, de eerst ſchuldig geblevene Dukaten, en $x = \frac{364}{25}z + 3 = 367$ Dukaten de eerſte ſchuld, waar op hij eerst $7y + 5 = 495$ Dukatons $= 297$ Dukaten, en daar na $3z = 75$ Dukatons $= 45$ Dukaten betaald heeft.

N°. 104. Door

J. C. VAN SETTEN, *A. van der Swan*, *N. Bondt*, *P. van Eeghen, Chz.*, *H. van Weſſem*, en *C. J. van Bruſſel*.

Stel de lengte van den langſten arm der balans $= r$, die des kortſten arms $= s$.

Het

(*) Het geen echter uit de wijze van de voorſtelling der vraag niet volgt, welke alleen ſchijnt te vorderen, dat de laatst ſchuldig geblevene Dukaten een heel getal zijn, als wanneer uit $y = 2\frac{4}{5}z$ volgt, dat z op zijn kleinst $= 5$ genomen kan worden, als wanneer $y = 14$ en $x = 75\frac{4}{5}$ wordt. (*Wet. Comm.*)

Het gewigt der doos, in de fchaal van den langften arm gewogen, namelijk 100 Engels trooisch, (zijnde volgens J. H. VAN SWINDEN, *over volmaakte Maten en Gewigten;* 153,8024 grammes,) gelijk aan a grammes.

Het gewigt der doos, in de fchaal van den kortften arm gewogen, het welk 65,0185 grammes bevonden is, gelijk b grammes.

Het onbekende gewigt van de doos $= x$ grammes.

Volgens de gelijkheid der momentkragten, bij het evenwigt der balans, is, bij de eerfte weging van de doos, aan de fchaal van den langften arm,

$$r \times x = s \times a$$

en bij de tweede weging, aan den kortften arm,

$$s \times x = r \times b$$

vermenigvuldigt men deze twee vergelijkingen en deelt men het product door rs, dan is

$$x^2 = ab, \text{ en } x = \sqrt{(ab)}$$

en dit leert ons; *dat het ware gewigt van eenig voorwerp, aan eene valfche balans gewogen, gelijk is aan den vierkants-wortel uit het product der gewigten, welke dit voorwerp, aan elk der twee armen, gewogen heeft.*

Men heeft dan $x = \sqrt{(ab)} = \sqrt{\ldots}$ $[153,8024 \times 65,0185] = 100$ grammes $= 6$ lood 5 engels 0,6 azen nagenoeg.

N°. 105. Door

J. R. Schmidt, H. van Wesfem, A. van der Swan, J. C. VAN SETTEN, *P. van Eeghen; Chz., Mofes Lemans, Rehuel Lobatto,* en *L. van Heusden.*

Laat ABC, *Fig.* 93. de gegevene gelijkbeenige driehoek zijn en G het middelpunt van den ingefchrevenen cirkel. Laat de middellijn AGD getrokken worden, en uit D de tangenten DE en DF aan den ingefchrevenen cirkel, ontmoeten-

tende den omtrek des omgeschrevenen cirkels in E en F, dan zal DEF de begeerde driehoek zijn, het geen wij op de volgende wijze kunnen betoogen.

Dat DEF een gelijkbeenige driehoek is, blijkt klaar, omdat, daar de hoeken EDA en FDA gelijk zijn, de koorden DE en DF evenlang zijn, en wij behoeven dus alleen aan te toonen, dat de lijn EF, welke noodzakelijk parallel aan BC en dus loodregt op AD is, den kleinen cirkel zal aanraken en dus door het punt K zal gaan; dat is: wij moeten aantoonen, dat ID = DK zal zijn.

Daar de Opgever te gelijker tijd vraagt de zijden van dezen nieuwen driehoek te berekenen, wanneer die van den eersten driehoek gegeven zijn, zoo stellen wij AB $= a$ en BH $= \frac{1}{2}$ BC $= b$; dan is AH $= \surd\,[AB^2 - BH^2] = \surd\,(a^2 - b^2)$. Trekkende nu BD, dan is

$$AH : AB = AB : AD = \frac{AB^2}{AH} = \frac{a^2}{\surd\,(a^2 - b^2)}$$

$$AH : HB = HB : HD = \frac{HB^2}{AH} = \frac{b^2}{\surd\,(a^2 - b^2)}$$

en DH : DB = DB : AD, ...

$$\text{dus } DB = \surd\,AD \times DH = \frac{ab}{\surd\,(a^2 - b^2)}.$$

Laat nu BG getrokken worden, dan is ∠ BGD = ∠ BAD + ∠ ABG = ∠ DBH + ∠ GBH = ∠ GBD, zoo dat △ GBD gelijkbeenig is, DG = DB $= \frac{ab}{\surd\,(a^2 - b^2)}$, GK =

$$GH = GL = GD - DH = \frac{ab}{\surd\,(a^2 - b^2)} - \frac{b^2}{\surd\,(a^2 - b^2)} = \frac{b\,(a - b)}{\surd\,(a^2 - b^2)} = b\surd\,\frac{a - b}{a + b}$$

en dus DK = DG + GH $= \frac{2ab - b^2}{\surd\,(a^2 - b^2)}$ is.

 Om

Om nu DI te berekenen hebben wij, na AE, welke parallel aan GL is, getrokken te hebben, DE : DL = DA : DG = DA : DB = DB : HD; dus DE $= \frac{BD \times DL}{HD}$; maar nu is DL $= \sqrt{[DG^2 + GL^2]} = b \sqrt{\frac{2ab - b^2}{a^2 - b^2}}$; dus DE $= a \sqrt{\frac{2ab - b^2}{a^2 - b^2}}$; en AD : DE = DE : DI, dus DI $= \frac{DE^2}{AD} = \frac{2ab - b^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}$.

Daar wij deze zelfde waarde voor DK gevonden hebben, zoo volgt DI = DK; de lijn EF raakt dus den kleinen cirkel in I, waar door het gezegde bewezen is.

Wij hebben nu reeds DE = DF $= a \sqrt{\frac{2ab - b^2}{a^2 - b^2}}$ voor de zijden des nieuwen driehoeks gevonden, en om de basis EF te vinden, is EI = EL = BD — DL $= (a - b) \sqrt{\frac{2ab - b^2}{a^2 - b^2}}$; derhalve EF = 2 EI $= 2\,(a - b) \sqrt{\frac{2ab - b^2}{a^2 - b^2}}$.

I. Aanmerking. Op dezelfde wijze, als wij bewezen hebben, dat BD = GD is, bewijst men ook, dat AE = AG is, en bijgevolg hebben wij AE + BD = AD. Hieruit volgt dan eene gemakkelijke Constructie, om in eenen gegevenen cirkel twee gelijkbeenige driehoeken te beschrijven, die denzelfden ingeschrevenen cirkel hebben, zoodanig dat het middelpunt dezes ingeschreven cirkels gegeven zij? want laat G dit gegeven middelpunt zijn; dan behoeven wij, na de middellijn AGD getrokken te hebben, slechts uit en A met DG en AG als radien, cirkelbogen

gen te beschrijven, en hier door ontstaan de punten B, C, E, F en dus de driehoeken. (*)

II. Aanmerking. In het opgegeven Voorstel geeft de Opgever $a = 13$ en $b = 5$; in dit bijzonder geval worden dan de zijden van den nieuwen driehoek:

$$DE = DF = a\sqrt{\frac{2ab - b^2}{a^2 - b^2}} = \tfrac{13}{12}\sqrt{105}$$

$$EF = 2(a - b)\sqrt{\frac{2ab - b^2}{a^2 - b^2}} = \tfrac{4}{3}\sqrt{105}.$$

N°. 106. Door

Jacob de Gelder, *A. van der Swan*, *L. van Heusden*, en *J. C. van Satten*. (†)

Volgens de opgave, heeft het bovenwiel 57 kam-

(*) Deze Constructie heeft niet alleen plaats voor twee gelijkbeenige driehoeken, maar ook voor twee driehoeken zonder onderscheid; want als er in en om eenen driehoek een cirkel beschreven is, bestaat er tusschen de stralen dezer cirkels en den afstand hunner middelpunten eene zekere betrekking, die van de hoeken en zijden des driehoeks geheel onafhankelijk is (zie de Gelder *Meetk. Analysis* §. 186. *Bladz.* 96), wanneer derhalve de omgeschrevene cirkel en het middelpunt des ingeschrevenen cirkels gegeven zijn, is de afstand der middelpunten en gevolgelijk de straal des ingeschreven cirkels bepaald; maar door deze dingen kan men geenszins den driehoek bepalen; er bestaan derhalve een oneindig getal driehoeken, die denzelfden in en omgeschreven cirkel hebben. Hoe deze driehoeken gevonden of geconstrueerd kunnen worden, heeft ons medelid, Bangma, reeds getoond, in de *Wisk. Oefeningen* I D. *Voorst.* 50. (*Wetensch. Commissie*)

(†) Leest in het Voorstel, in plaats van *spoorwiel*, benedenste schijfloop. De Heer L. van Heusden heeft ons

kammen, de ſchijfloop boven aan de ſpil 31 ſtaven: zoo dra de molen in beweging komt, drijven elke 31 kammen van het bovenwiel den ſchijfloop en bijgevolg de ſtaande ſpil eens om. Om nu zich duidelijk voor te ſtellen, hoedanig het zich, van het oogenblik dat de molen is begonnen te malen, toedraagt, zoo laat ons de kammen van het bovenwiel, door de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, *enz.* . . . . . 55, 56 en 57; en de ſtaven van den ſchijfloop door 1, 2, 3, 4, 5, *enz.* . . . . . 28, 29, 30 en 31 beteekenen, en nemen wij aan, dat de kam 1 de ſtaaf 1, de kam 2 de ſtaaf 2 voortdrijft, dan drijft eindelijk de kam 31 de ſtaaf 31, en, na dat de ſpil of ſchijfloop éénmaal is om geweest, de kam 32 wederom de ſtaaf 1. Wanneer, men nu, aan het bovenwiel, de ſtaven verſcheidene malen rondtelt, dan ziet men duidelijk, dat de kammen, welke, bij het begin van elke volgende omwenteling van den ſchijfloop, de ſtaaf 1 voortdrijven, de termen van de rekenkundige reeks 1, 32, 63, 94, 125, 156, *enz.* zijn; maar er zijn niet meer dan 57 kammen; derhalve, om te vinden de hoeveelſte kam, bij elke volgende omwenteling, de ſtaaf 1 voortdrijft, moet men de getallen dezer rekenkundige reeks, elk zoo menigmaal met 57 verminderen, tot dat het overblijvend getal kleiner dan 57 wordt: dit dan doende, blijkt het, dat, bij het begin der eerſte, tweede, derde, en volgende omwentelingen, de ſtaaf 1 door de kammen 1, 32, 6, 37, 11, 42, 16, 47, 21, 52, 26, 57, 31, 5, 36, 10, *enz.* wordt voortgedreven. Het bovenwiel en de ſchijfloop zullen dan voor het eerst wederom in denzelfden ſtand komen, als toen de molen begon te malen, wanneer voor de tweedemaal

ons op deze verzinning, bij het overſchrijven der kopij veroorzaakt, opmerkzaam gemaakt. Ook zal aan zijn verzoek voldaan worden. (*Wet. Commiſſie.*)

maal de kam 1 de ſtaaf 7 voortdrijft. Stel het aantal omwentelingen van het bovenwiel daar toe vereischt wordende $= p$; dan moet de $(p + 1)^{e}$ term der reeks 1, 32, 63, 94, *enz.*, dat is $1 + p \times 31$, door 57 gedeeld zijnde, één in de deeling overlaten: dit kan nu niet geſchieden, ten zij p een veelvoud van 57 zij, en dus zal zulks voor de eerſte maal plaats hebben, *wanneer het bovenwiel zoo veel maal is omgeweest, als er ſtaven in den ſchijfloop zijn*; dat is na 31 omwentelingen van het bovenwiel, en bijgevolg na 57 omwentelingen van de ſpil of den ſchijfloop.

Dit zal zich nogtans niet altijd alzoo verhouden. Stellen wij $57 = a$ en $31 = b$; dan zal $1 + p \times b$, door a gedeeld zijnde, één in de deeling moeten overlaten, dat is $\frac{p \times b}{a}$ zal een geheel getal moeten zijn. Laat nu $b = nb'$ en $a = na'$ zijn; dan zal $\frac{p \times b'n}{a'n} = \frac{pb'}{a'}$ een geheel getal moeten zijn, en hier uit volgt dan, dat, wanneer a en b eenen gemeenen deeler hebben, het bovenwiel en de ſchijfloop voor het eerst wederom in den eerſten ſtand zullen komen, als het bovenwiel b' maal en de ſchijfloop a' maal is rond geweest. Daar dan $p = a'$ is, is $pb' = a'b'$ en $a'b'n$ het kleinſte gemeene veelvoud van $a'n$ en $b'n$, of van a en b en $p = \frac{a'b'n}{b'n} = \frac{a'b'n}{b}$. Hier volgt dan dezen regel. *Men zoeke het kleinſte gemeen veelvoud van het getal ſtaven en kammen en deele hetzelve door het aantal ſtaven of kammen en dan zullen de quotienten te kennen geven, na hoe veele omwentelingen van het bovenwiel of den ſchijfloop, beide wederom voor het eerst in den oorſpronkelijken ſtand zullen komen.*

De-

Deze regel is algemeen voor elke twee raderen, die onmiddelijk op elkander werken. Alzoo zal, daar er 25 staven in den benedensten schijfloop en 81 kammen in het wiel van de wateras en de getallen 25 en 81 onderling ondeelbaar zijn, de benedenste schijfloop 81 tegen het waterrad 25 maal omgaan, en, na 81 omwentelingen van den benedensten schijfloop, zullen beide raderen wederom voor het eerst in denzelfden stand komen.

Het blijkt dan: 1°. dat, wanneer het bovenwiel 31 maal is rond geweest, de spil 57 maal is rond gegaan, en het bovenwiel en de bovenste schijfloop voor het eerst in denzelfden stand komen; 2°. dat, wanneer de benedenste schijfloop of de staande spil 81 maal is rond geweest, het waterrad 25 maal rondgaat en alzoo deze twee laatste wielen voor het eerst in denzelfden stand komen. Om nu hier uit te vinden, wanneer alle de deelen van het loopend werk, wederom, voor het eerst, denzelfden stand verkrijgen als toen de molen begon te malen, redenere men als volgt. Laat r een geheel getal zijn; dan zal na $31r$ omwentelingen van het bovenwiel de bovenste schijfloop $57r$ maal rondgaan, en beide wielen zullen, voor elke geheele waarde van r, wederom op nieuw denzelfden stand verkrijgen: insgelijks zal, s een geheel getal zijnde, na $81s$ omwentelingen van den benedensten schijfloop, het waterrad $25s$ maal zijn omgegaan en beide deze raderen zullen, voor elke waarde van s, ten opzigte van elkander, denzelfden stand als bij het begin der beweging verkregen hebben, om dat nu de spil met de beide schijfloopen te gelijk, als één vast ligchaam, omdraait, moeten natuurlijk r en s in geheele getallen zoodanig bepaald worden, dat $57r = 81s$, of (om dat 81 en 57 het getal 3 tot gemeenen deeler hebben) $19r = 27s$ zij: in de kleinste getallen is dan $r = 27$ en $s = 19$. Het blijkt dan hier uit: dat

dat na 31 × 27 = 837 omwentelingen van de as of het bovenwiel, de schijfloop 57 × 27 = 1539 maal omgaat; en dat, na den afloop van dit getal omgangen, het bovenwiel en de bovenste schijfloop op nieuw in denzelfden stand komen, als bij het begin der beweging; dat al verder, na 81 × 19 = 1539 omwentelingen van den benedensten en bijgevolg ook van den bovensten schijfloop, de wateras 25 × 19 = 475 maal omwentelt, en dat, na afloop van dit aantal omwentelingen, de benedenste schijfloop en het wiel aan de wateras op nieuw in denzelfden stand komen, als bij het begin der beweging; gevolgelijk gaat het bovenwiel 837 maal tegen de spil 1539, en het wiel aan de wateras 475 maal rond, en het loopend werk van den molen zal, na dit getal omwentelingen, op nieuw in denzelfden stand komen, als toen hij begon te malen.

Nu gaan volgens de vraag de wieken in één minuut of 60 secunden 15 maal om; dus in 4 secunden eenmaal: tot 837 omgangen van het bovenwiel of de wieken wordt derhalve een tijd van 837 maal 4 secunden = 3348 secunden dat is 55 minuten 48 secunden vereischt.

Aanmerking. Daar verscheide Leden den aard van dit vraagstuk niet duidelijk begrepen hebben, hebben wij noodig geoordeeld de Oplossing ten hunnen gevalle wat uitvoeriger mede te deelen. Wij zullen nu nog dezelve in een bekropt bestek algemeen voordragen. Zij het aantal kammen in het bovenwiel = a, het aantal staven in den bovensten en ondersten schijfloop respectivelijk = b en c en het aantal kammen in het waterrad = d. Stel, dat het bovenwiel in den tijd, noodig zijnde om alles wederom in denzelfden stand te brengen, x omwentelingen, de staande spil met de schijfloopen y omwentelingen en het wiel aan het waterrad z omwentelingen volbren-

brenge, daar dan uit de bovenstaande betoogmatige Oplossing gebleken is, dat b maal het bovenwiel in denzelfden tijd tegen a maal de bovenste schijfloop of de spil omwentelt en in verschillende tijden de hoeveelheden van volbragte omwentelingen aan elkander evenredig zijn, zal $x : y = b : a$, of $ax = by$ zijn; om dezelfde rede zal $y : z = d : c$, of $cy = dz$ zijn. Uit deze twee vergelijkingen volgt nu $y = \frac{ax}{b} = \frac{dz}{c}$, of $acx = bdz$. Indien nu de getallen ac en bd geenen gemeenen deeler hebben, zal, in de kleinste getallen, $x = bd$, $z = ac$, en $y = \frac{ax}{b} = \frac{dz}{c} = ad$ zijn, en hier uit zal dan volgen; *dat de getallen der omwentelingen van bovenwiel, staande spil en waterwiel, welke het loopend raderwerk op nieuw en voor de eerste maal, wederom in dezelfde stelling brengen, tot elkander zullen staan als het product van de staven van den bovenschijfloop met de kammen van het waterwiel, het product van de kammen van bovenwiel en waterwiel en het product van de kammen van het bovenwiel met de staven van den bovenschijfloop.*

Dan, wanneer de coefficienten der vergelijking $acx = bdz$ eenen gemeenen deeler hebben, vindt men, door dien regel, wel een getal omwentelingen, welke het loopend werk op nieuw in denzelfden stand, als bij het begin der beweging, brengen moet, maar niet het kleinste. *Men zoeke, om dit kleinste getal te vinden, den gemeenen deeler der producten bd, ad en ac, door den zoo even gegeven regel gevonden, dan zullen (n die gemeene deeler zijnde,) de omwentelingen van bovenwiel spil en waterwiel respectivelijk zijn als* $\frac{bd}{n}$, $\frac{ad}{n}$ *en* $\frac{ac}{n}$. Wij gelooven niet, dat er

eeni-

eenige duisterheid meer zal overgebleven zijn, zoo dat men, na deze verklaring, het vraagstuk op meer zamengestelde werktuigen zal kunnen toepassen.

N°. 107. Door

N. Bondt, *L. C. Mazel*, *P. van Eeghen*, *Chz.*, *C. Lantz*, *Jr.*, *F. J. Méan*, *L. van Heusden*, *J. C. van Setten*, *R. Lobatto*, *Moses Lemans*, *H. F. Fynje*, *A. van der Swan*, *C. J. van Brussel*, en *Jan Pauw*.

Stel voor de termen der rekenkundige reeks, x, $x + y$, $x + 2y$, $x + 3y$ en $x + 4y$, dan is, volgens de eerste voorwaarde der vraag $\frac{x + 4y}{x + 1} = 4$. De som der twee eerste termen min $3 = 2x + y - 3$ en de som der twee laatste termen min $5 = 2x + 7y - 5$ zijnde, zoo is, volgens de tweede voorwaarde, $\frac{2x + 7y - 5}{2x + y - 3} = 3$. Na uit deze twee vergelijkingen de breuken weggemaakt te hebben, is

$$x + 4y = 4x + 4$$
$$2x + 7y - 5 = 6x + 3y - 9$$

en dan volgt uit de eerste vergelijking

$$y = 1 + \tfrac{3}{4}x$$

en uit de tweede $y = x - 1$

derhalve $x - 1 = 1 + \frac{3}{4}x$

$$4x - 4 = 4 + 3x$$

en eindelijk $x = 8$, waar uit $y = x - 1 = 7$; gevolgelijk is de gevraagde rekenkunstige reeks 8, 15, 22, 29 en 36.

No. 108. Door

L. C. Mazel, C. Lantz, Jr. P. van Eeghen, Chz., H. F. Fynje, C. J. van Brusfel, Jan Pauw, L. van Heusden, N. Bondt, F. J. Méan, Moses Lemans, S. J. Mulder, R. Lobatto, J. C. van Setten, en A. van der Swan.

Blijkbaar ſtaat hier het onbekende tot het bekende getal francs in gelijke reden, als het bekende tot het onbekende getal guldens. Dit zeker onbekende getal guldens dan $= x$ gefteld hebbende, is $x : 176,4 = 40 : x$; derhalve $x^2 = 7056$ en $x = 84$; dus 84 Francs $= 40$ Guldens en 1 Gulden $= 2$ Francs 10 Centimes.

No. 109 Door

C. Lantz, Jr., L. C. Mazel, C. J. van Brusfel, H. F. Fynje, Moses Lemans, S. J. Mulder, N. Bondt, P. van Eeghen, Chz., A. van der Swan, J. C. van Setten, L. van Heusden, R. Lobatto, Jan Pauw, en F. J. Méan.

Stel, dat men met x zesthalven, y dertiendhalven en z Zeeuwfche Rijksdaalders de 100 guldens betalen kan; dan is voorerst $x + y + z = 100$. Voorts heeft men, elke ſpetie tot ſtuivers herleidende, $5\frac{1}{2}x + 12\frac{1}{2}y + 52z = 2000$ ſtuivers. Na de tweede vergelijking met 2 en de eerste met 11 vermenigvuldigd en de producten van elkander afgetrokken te hebben, heeft men de vergelijking:

$$14y + 93z = 2900$$

uit welke, y afgezonderd hebbende, volgt:

$$y = 207 - 7z + \frac{2 + 5z}{14}$$

Stel, ten einde de waarden van y en z in heele

le getallen te bepalen, $\frac{2 + 5z}{14} = p$; dan wordt $x = 3p - \frac{p + 2}{5}$; ftel al verder $\frac{p + 2}{5} = q$, dan wordt $p = 5q - 2$; derhalve $z = 14q - 6$, $y = -93q + 247$ en $x = 79q - 141$. Uit de waarde van y blijkt nu: dat q niet grooter en uit die van x dat q niet kleiner dan 2 kan zijn: er beftaat dus flechts eene oplosfing in geheele getallen, namelijk $x = 17$ zesthalven, $y = 61$ dertiendhalven en $z = 22$ Zeeuwfche Rijksdaalders, welke, zoo als bij de proef blijken zal, aan de voorwaarde der vraag voldoet.

N°. 110. Door

H. F. Fynje, A. van der Swan, N. Bondt, J. C. van Setten, P. van Eeghen, Chz., L. C. Mazel, C. J. van Brusfel, Mofes Lemans, S. J. Mulder, C. Lantz, Jr., R. Lobatto, L. van Heusden, Jan Pauw, en *F. J. Méan.*

Stel het eerfte deel $= x$, dan is het tweede $= 112 - x$, en het verfchil $2x - 112$, of $112 - 2x$; derhalve moet, volgens de vraag,

$$(2x - 112)^2 + \tfrac{1}{9}x + \tfrac{1}{7}(112 - x) = 210$$

zijn, welke vergelijking, verder ontwikkeld zijnde, geven zal:

$$4x^2 - 448x + 12544 - \tfrac{1}{9}x + 16 - \tfrac{1}{7}x = 210$$

en, de breuken weggemaakt hebbende,

$$252x^2 - 28224x + 790272 + 7x + 1008 - 9x = 13230$$

of eindelijk, na de gelijkfoortige termen vereenigd te hebben:

$$252x^2 - 28226x = -778050$$

$$x^2 - \frac{28226}{252}x = -\frac{778050}{252} = -\frac{196068600}{(252)^2}$$

 tel

tel bij $\left(\frac{14113}{252}\right)^2 = \ldots\ldots \frac{199176769}{(252)^2}$

dan is $x^2 - \frac{28226}{252}x + \left(\frac{14113}{252}\right)^2 = \frac{3108169}{(252)^2}$

en hier uit den vierkants wortel trekkende, is eindelijk

$$x - \frac{14113}{252} = \pm \frac{1763}{252}$$

derhalve is $x = \frac{14113 \pm 1763}{252} = 63$ of $= 49\frac{1}{126}$

en $112 - x = 49$ of $= 62\frac{125}{126}$

welke antwoorden, bij de proef, aan de voorwaarden der vraag voldoen.

N°. III. Door

H. F Fynje, *L. C. Mazel*, *C. Lantz*, *Jr.*, *N. Bondt*, *P. van Eeghen*, *Chz.*, *C. J. van Brussel*, *Mozes Lemans*, *R. Lobatto*, en *L. van Heusden.*

Laat, *Fig.* 94, P eenig punt in de basis zijn en laat uit dit punt P de loodlijnen PD en PE op de beenen BC en AC vallen; als mede uit het punt A de loodlijn AF op de zijde BC; dan moet bewezen worden: *dat de afstand AF gelijk is aan de som der afstanden PD en PE.*

Men trekke PG evenwijdig aan BC, dan is (zie DE GELDER, *Beg. der Meetk.* 24 *St. I B.*) ∠ APG = ∠ ABC, en volgens de onderstelling = ∠ PAE; daar voorts de driehoeken APG en APE in G en E regthoekig zijn, is de hoek PAG = ∠ APE, en daar beide driehoeken dezelfde zijde AP gemeen hebben, is (13 *St. I B.*) PE = AG. Voorts is, wegens de evenwijdigheid der lijnen, PDFG een parallelogram en volgens (1 *St. III B.*) GF = PD. De som der lij-

lijnen AG en GF, dat is de afstand AF is dan gelijk aan de som der afstanden PD en PE. (*)

Aanmerking. Wanneer men, op het verlengde van de basis een punt p neemt, en voorts uit dit punt p de loodlijnen pd en pe op de zijde BC en AC, of op derzelver verlengde, laat vallen, dan zal men, pg evenwijdig aan BC trekkende, op dezelfde wijze betoogen: dat $pe = Ag$ is, en $pd = Fg$; waar uit dan volgt, dat Ag = AF + Fg = AF + pd, en bijgevolg $pe - pd$ = AF, en in dit geval wordt het verschil der afstanden van het punt p tot de beenen AC en BC gelijk aan den afstand van het hoekpunt des driehoeks tot een der beenen. Doch, wanneer men in aanmerking neemt, dat de afstanden der punten p in het verlengde van de basis genomen tot de zijde BC, in vergelijking van de afstanden van de punten P, in de basis zelve, tot diezelfde zijde, negatief zijn, indien de laatste positief is, dan zal men de stelling niet slechts tot punten in de basis, maar ook tot punten, buiten de basis genomen, kunnen uitstrekken. Wanneer, voegt de Heer Lobatto er bij, het punt P nader bij het punt A komt, wordt PG steeds kleiner en PD grooter en valt P in A, dan wordt PG = o en PD = AF.

N°. 112.

(*) De Heer Mazel merkt te regt aan, dat deze stelling in drie onderscheidene gevallen, naar dat hoek C scherp, regt of stomp is, kan betoogd worden, in het tweede geval, valt de lijn AF op AC; in het derde buiten den driehoek, op het verlengde van BC: de loop van het bewijs verandert voor het overige niets. (Wet. Comm.)

N°. 112. Door

Jacob de Gelder, M. J. ZUIDHOF, *P. van Eeghen, Chz.*

Zij, *Fig.* 95, ABCD de ongelijkzijdige vierhoek, zijnde beschreven in eenen cirkel, wiens middellijn, uit het punt C getrokken, de lijn CE is. Men stelle AB $= a = 120$; BC $= b = 66$; CD $= c = 50$ en AD $= d = 32$ en de hoekpuntslijnen AC $= p$ en DB $= q$; dan is, wanneer men $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d) = \frac{1}{2}(120 + 66 + 50 + 32) = 134$ stelt, volgens de *Meetk. Anal. Bladz.* 99. *form.* (6), $s - a = 14$; $s - b = 68$, $s - c = 84$ en $s - d = 102$ en de inhoud van den vierhoek ABCD.

$$I = \sqrt{[(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)]}$$
$$= \sqrt{[14 \cdot 68 \cdot 84 \cdot 102]} = 2856$$

Die vierhoek moet nu, volgens het voorstel, in reden van 33 tot 16 verdeeld worden, derhalve is

het grootste deel $= \frac{33}{49} \times 2856 = 1923\frac{3}{7}$

het kleinste deel $= \frac{16}{49} \times 2856 = 932\frac{4}{7}$

en de inhouden dezer deelen zijn gevolgelijk bekend.

Het blijkt, uit de beschouwing der Figuur, dat het mogelijk kan zijn, de begeerde deellijn EM op tweeërlei wijze te trekken; want, indien de inhoud van den drichoek BCF grooter dan de inhoud van het kleinste deel $932\frac{4}{7}$ is, dan zal de deellijn EHNM ter regterhand van de middellijn EC vallen en het zal als dan mogelijk zijn, nog eene andere deellijn EH'N'M' te trekken, welke den vierhoek in dezelfde reden verdeelt, zullende, in het eerste geval, HBN : HNCDAH $= 16 : 33$ en in het tweede geval, BCN'H' : H'N'DA $= 33 : 16$ zijn, welke beide oplossingen, aangezien in het voorstel niet bepaald wordt, in welk eene rangorde de deelen tot elkander de ge-

gegevene reden moeten hebben, (indien namelijk beide oplossingen mogelijk zijn) even goed aan de voorwaarden der vraag zullen voldoen. (*)

Om zulks nu te beoordeelen en in beide gevallen tot eene oplossing te komen, zal het vooraf noodig zijn, na te gaan, welke lijnen en hoeken in de figuur gegeven zijn.

Volgens *form.* (11) *Bladz.* 100. *Meetk. Anal.* is, wanneer men in dezelve $a + b + c - d = a + b + c + d - 2d = 2(s - d)$; .... $a + b - c + d = 2(s - c)$; $a - b + c + d = 2(s - b)$ en $-a + b + c + d = 2(s - a)$ stelt, als wanneer $(a+b+c-d) \times (a+b-c+d) \times (a-b+c+d) \times (-a+b+c+d) = 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) = 16\,\text{II}$ wordt,

$$CE = \frac{\sqrt{[(ac+bd)(ad+bc)(ab+cd)]}}{2\,\text{I}}$$

Maar nu is gegeven $ac + bd = 120 \times 50 + 66 \times 32 = 8112$; $ad + bc = 7140$ en $ab + cd = 9520$ en men heeft gevolgelijk:

$$CE = \frac{\sqrt{(8112 \times 7140 \times 9520)}}{2 \times 2856} = 130$$

eindelijk vindt men, volgens *form.* (7) en (8), aldaar voorkomende,

$$p = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{(ab+cd)}} = \sqrt{\frac{7140 \times 8112}{9520}} = 78$$

$$q = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{(ad+bc)}} = \sqrt{\frac{9520 \times 8112}{7140}} = 104$$

Wanneer men nu verder de lijnen BE en AE trekt,

(*) De Heer VAN EEGHEN heeft het vraagstuk in de eerste en de Heer ZUIDHOF in de tweede meening opgelost: de eerste heeft nogtans niet verzuimd die aanmerking te maken, offchoon hij de oplossing van ZUIDHOF, welke van achteren blijkt de meening van MEISZNER geweest te zijn, niet heeft uitgewerkt. (*Wet. Comm.*)

trekt, zal uit de regthoekige driehoeken CBE en CAE volgen:

$BE = \sqrt{(CE^2 - BC^2)} = 112$, $AE = \sqrt{(CE^2 - AE^2)} = 104$

Omdat de koorden eens cirkels, door zijne middellijn gedeeld zijnde, gelijk zijn aan de sinussen der hoeken, welke aan den omtrek op die koorden staan, zoo heeft men:

$Sin.ABC = AC:CE = 78:130 = \frac{3}{5}$

$Cos.ABC = AE:CE = 104:130 = \frac{4}{5}$ (*)

$Sin.DCB = BD:CE = 104:130 = \frac{4}{5}$

$Cos.DCB = \sqrt{(1 - \frac{16}{25})} \ldots = -\frac{3}{5}$

$Sin.BCE = BE:CE = 112:130 = \frac{56}{65} = Cos.BEC$

$Cos.BCE = BC:CE = 66:130 = \frac{33}{65} = Sin.BEC$

en volgens de bekende formule is $Sin.BFC = Sin.(ABC + BCE) = Sin.ABC \times Cos.BCE + Sin.BCE \times Cos.ABC = \frac{3}{5} \times \frac{33}{65} + \frac{56}{65} \times \frac{4}{5} = \frac{323}{325}$ en hier uit $Cos.BFC = \frac{36}{325}$. Voorts is $Sin.DCE = Sin.[DCB - ECB] = \frac{4}{5} \times \frac{33}{65} + \frac{3}{5} \times \frac{56}{65} = \frac{12}{13}$ en $Cos.DCE = \frac{5}{13}$.

Met deze bekende hoeken kunnen nu de lijnen CF, BF en AF gevonden worden. In den driehoek BCF is $Sin.BFC : Sin.ABC = BC : CF = \frac{12870}{323}$ en $Sin.BFC : Sin.BCF = BC : BF = \frac{18480}{323}$; waaruit dan volgt: $AF = AB - BF = \frac{20280}{323}$ en $EF = EC - CF = \frac{29120}{323}$.

Deze lijnen bekend zijnde, vindt men: *Inh.* $BCF = \frac{1}{2} BC \times BF \times Sin.ABC = \frac{1}{2} \times 66 \times \frac{18480}{323} \times \frac{3}{5} = 1132\frac{268}{323}$; *Inh.* $ADCF = 2856 - 1132\frac{268}{323} = 1723\frac{55}{323}$.

Vermits nu de driehoek $BCF = 1132\frac{268}{323} > 932\frac{4}{7}$ is, blijkt het, dat, zoo wel ter regter als ter linkerhand van EC, eene lijn EM of EM′ kan getrokken worden, welke den gegevenen vierhoek in de gegevene reden verdeelt. Elk dezer twee mogelijke gevallen moet derhalve afzonderlijk onderzogt worden.

I.

(*) Want hoek ABC = hoek AEC zijnde, zoo is, wegens den regten hoek CAE, $Sin.ACE = Cos.AEC = Cos\ ABC$.

I. Stel, om het vraagſtuk in het eerſte geval op te loſſen, hoek ABC $= \alpha$, ABE $= \beta$ en BEM $= \phi$; dan heeft men in den driehoek BEN,

$$Sin.\,BEN : Cos.\,BEN = Sin.\,\phi : Cos.\,\phi = BE : BN$$

$$\text{en } BN = 112 \times Sin.\,\phi : Cos.\,\phi$$

$$Sin.\,BHE,\ \text{of } Sin.\,(BEH + ABE) : Sin.\,BEF = BE : BH$$

$$\text{of } Sin.\,(\phi + \beta) : Sin.\,\phi = 112 : BH$$

$$BH = 112 \times Sin.\,\phi : Sin.\,(\phi + \beta)$$

Nu is, (volgens de IX *Stell.* IX *B.*) *Inh.* BHN $= \frac{1}{2}\,Sin.\,ABC \times BH \times BN = \frac{1}{2}\,Sin.\,\alpha \times 112^2 \times \frac{Sin.\,\phi}{Cos.\,\phi} \times \frac{Sin.\,\phi}{Sin.\,(\phi + \beta)}$ en wij hebben derhalve (zie boven) de vergelijking,

$$\tfrac{1}{2} \times \tfrac{3}{5} \times 112^2 \times \frac{Sin^2.\,\phi}{Sin.\,(\phi + \beta) \times Cos.\,\phi} = \frac{6528}{7} \ldots (A)$$

Stellende in deze vergelijking $Sin.\,(\phi + \beta) = Sin.\,\phi \times Cos.\,\beta + Cos.\,\phi \times Sin.\,\beta$ en $Sin.\,\beta = Sin.\,ABE = Sin.\,ACE = 104 : 130 = \frac{4}{5}$ en $Cos.\,\beta = \sqrt{(1 - \frac{16}{25})} = \frac{3}{5}$, dan verandert zij in:

$$343\,Sin^2.\,\phi = 51\,Sin.\,\phi\,Cos.\,\phi + 68\,Cos^2.\,\phi\ .\ (B)$$

en ſtelt men nu in deze $Cos.\,\phi = \sqrt{(1 - Sin.\,\phi^2)}$, dan heeft men, na het wortel-teeken weggemaakt te hebben:

$$171522\,Sin^4.\,\phi - 58497\,Sin^2.\,\phi = -4624\ .\ (*)$$

en hier uit volgt dan eindelijk:

Sin.

(*) Deze vierde magts-vergelijking van de tweede magts vorm kan hier ontweken worden. Men ſtelle in (A) $2\,Sin.\,\phi\,Cos.\,\phi = Sin.\,2\phi$; $2\,Sin^2.\,\phi = 1 - Cos.\,2\phi$ en $2\,Cos^2.\,\phi = 1 + Cos.\,2\phi$, dan verkrijgt (A) deze gedaante $411\,Cos.\,2\phi + 51\,Sin.\,2\phi = 275$; waaruit, $Cos.\,2\phi = \sqrt{(1 - Sin.\,2\phi)}$ ſtellende, volgt:

$$Sin.\,2\phi = \frac{9350 \pm 274\sqrt{95897}}{12 \times 9529}$$

zijnde in deze alleen het teeken + in ons geval toepasſelijk.

 Men

$$Sin.\varphi = \pm\sqrt{\left[\frac{19499 \pm 17\sqrt{95897}}{12 \times 9529}\right]}$$

Men heeft altoo vier waarden voor $Sin.\varphi$, welke alle, zonder onderscheid, aan de eindvergelijking (B) voldoen; echter kan die waarde van $Sin.\varphi$, welke aan (A) voldoet, in den bepaalden zin, waarin het voorstel voorkomt, hier alleen gelden; deze blijkt bij beproeving te zijn:

$$Sin.\varphi = \sqrt{\left[\frac{19499 + 17\sqrt{95897}}{12 \times 9529}\right]} = Sin.BEM$$

$$Cos.\varphi = \sqrt{\left[\frac{94849 - 17\sqrt{95897}}{12 \times 9529}\right]} = Cos.BEM$$

Men zal nu de lengte der gevraagde deellijn gemakkelijk vinden; want, in den regthoekigen driehoek ECM is $EM = CE \times Cos.CEM = CE \times Cos.(CEB - MEB)$, of $CEB = \gamma$ stellende, $= CE \times (Cos.\gamma.Cos.\varphi + Sin.\gamma.Sin.\varphi)$, in welke slechts de bekende waarden van CE, γ en φ behoeven overgebragt te worden, om EM te vinden; maar, om deze uitdrukking eenvoudiger te maken, verheffe men de laatste vergelijking tot de tweede magt, dan zal, daar $EC = 120$, $Cos.\gamma = \frac{56}{65}$, $Sin.\gamma = \frac{33}{65}$ en $Cos.\varphi.Sin.\varphi = \frac{1}{2}Sin.2\varphi$ is, de vergelijking worden:

$EM^2 = 12544\,Cos^2.\varphi + 7392\,Sin.2\varphi + 4356\,Sin^2.\varphi$ en in deze de waarden van $Cos^2.\varphi$, $Sin.2\varphi$ en $Sin^2.\varphi$ overbrengende,

$$EM = \sqrt{\left[\frac{320408755 + 471553\sqrt{95897}}{28587}\right]}$$

of $EM = 127{,}74$ nagenoeg.

II. Zij

Men kan ook nog, op de wijze, in de noot, op *Bladz.* 83 hier boven verklaard, deze vergelijking tot de eerste magt brengen. Wij houden ons nogtans aan de vergelijking in den text uitgebragt, ten einde alles, overeenkomstig deze soort van vragen, in wortel-uitdrukkingen te verkrijgen. (DE GELDER.)

II. Zij EH'N'M' de lijn, welke, op de tweede wijze, den vierhoek ABCD zoodanig verdeelt, dat BCN'H' : H'N'DA = 33 : 16 zij; dan is (zie boven) ADH'N' $= 932\frac{4}{7}$; maar ADCF $= 1723\frac{55}{323}$ zijnde, (zie boven) is CFN'H' = ADCF — ADN'H' $= 1723\frac{55}{323} - 932\frac{4}{7} = 790\frac{1354}{2261}$. Men moet derhalve de lijn EH'N'M' zoodanig trekken, dat de inhoud van den vierhoek CFN'H' gegeven en gelijk $790\frac{1354}{2261}$ zij.

Stel de bekende hoeken EFH' $= \delta$ en ECD $= \varepsilon$ en den onbekenden hoek CEM' $= \psi$; dan heeft men in den driehoek EFH', de evenredigheid:

$$Sin.(\delta+\psi) : Sin.\delta = EF : EH' = EF \times \frac{Sin.\delta}{Sin.(\delta+\psi)}$$

$$Inh.\,EFH' = \tfrac{1}{2}FE^2 \times \frac{Sin.\delta \times Sin.\psi}{Sin.(\delta+\psi)}$$

en in den driehoek ECN' is

$$Sin.(\varepsilon+\psi) : Sin.\varepsilon = EC : EN' = EC \times \frac{Sin.\varepsilon}{Sin.(\varepsilon+\psi)}$$

$$Inh.\,ECN' = \tfrac{1}{2}CE^2 \times \frac{Sin.\varepsilon \times Sin.\psi}{Sin.(\varepsilon+\psi)}$$

Omdat nu *Inh.* ECN' — *Inh.* EFH' = *Inh.* FCN'H' $= 790\frac{1354}{2261}$ (zie boven) gegeven is, zoo zullen wij, dien bekenden inhoud = M ftellende, hebben:

$$\tfrac{1}{2}\times\left[CE^2\times\frac{Sin.\varepsilon}{Sin.(\varepsilon+\psi)} - EF^2\times\frac{Sin.\delta}{Sin.(\delta+\psi)}\right]\times Sin.\psi = M$$

in welke vergelijking alles, behalve de hoek ψ, bekend is.

Om deze vergelijking op te losfen, vermenigvuldige men dezelve met $Sin.(\varepsilon + \psi) \times Sin.(\delta + \psi)$; dan is

$$\left\{\begin{array}{l} +\tfrac{1}{2}CE^2\times Sin.\varepsilon\times Sin.\psi\times Sin.(\delta+\psi) \\ -\tfrac{1}{2}EF^2\times Sin.\delta\times Sin.\psi\times Sin.(\varepsilon+\psi) \end{array}\right\} = \ldots$$

$$\ldots M\times Sin.(\delta+\psi)\times Sin.(\varepsilon+\psi)$$

welke laatfte vergelijking, wanneer men de waarden van $Sin.(\delta + \psi)$ en van $Sin.(\varepsilon + \psi)$; naar

naar de bekende formulen ontwikkelt, en daar na kortheidshalve,

$A = \frac{1}{2} CE^2 Sin.\delta\, Sin.\varepsilon - \frac{1}{2} EF^2 Sin.\delta\, Sin.\varepsilon - M$
$\ldots\ldots\ldots (Sin.\delta\, Cos.\varepsilon + Cos.\delta\, Sin.\varepsilon)$
$B = \frac{1}{2} CE^2 Cos.\delta Sin.\varepsilon - \frac{1}{2} EF^2 Sin.\delta Sin.\varepsilon - M Cos.\delta Cos.\varepsilon$
en $C = M\, Sin.\delta\, Sin.\varepsilon$

stelt, in deze zal veranderen:

$$A\, Cos.\psi\, Sin.\psi + B\, Sin^2.\psi - C\, Cos^2.\psi = 0$$

Vermits de driehoek ECM′ in M′ regthoekig is, is de deellijn $EM' = EC \times Cos.\psi$; men moet derhalve uit deze vergelijking $Cos.\psi$ onmiddelijk zoeken. Stellen wij daarom $Sin.\psi = \sqrt{(1 - Cos^2.\psi)}$; dan is,

$$A\, Cos.\psi \sqrt{(1 - Cos^2.\psi)} = -B + (B + C) Cos^2.\psi$$

deze in het vierkant brengende, om het wortelteeken weg te maken, heeft men:

$$(A^2 + B^2 + C^2 + 2BC) Cos^4.\psi - (A^2 + 2B^2 + 2BC)$$
$$\ldots\ldots\ldots Cos^2.\psi + B^2 = 0$$

welker oplossing eindelijk geven zal:

$$Cos.\psi = \pm \sqrt{\left[\frac{\frac{1}{2}A^2 + B^2 + BC \pm A\sqrt{(\frac{1}{4}A^2 + BC)}}{A^2 + B^2 + C^2 + 2BC}\right]} \; (*)$$

Daar

(*) Wanneer men slechts den hoek ψ noodig had te kennen, zou onze eindvergelijking gemakkelijker op te lossen zijn; want deelt men dezelve door $Cos^2\,\psi$, dan wordt zij:

$$B \times Tang^2.\psi + A \times Tang.\psi - C = 0$$

of deelt men door $Sin^2.\psi$, dan wordt zij,

$$C \times Cot^2.\psi - A \times Cot.\psi - B = 0$$

en dan wordt $Tang.\psi = \frac{-A \pm \sqrt{(A^2 + 4BC)}}{2B}$

of $Cot.\psi = \frac{+A \pm \sqrt{(A^2 + 4BC)}}{2C}$ (zijnde zoo als het behoort $Tang.\psi \times Cot.\psi = \frac{-A \pm \sqrt{(A^2 + 4BC)}}{2B} \times \frac{+A \pm \sqrt{(A^2 + 4BC)}}{2C} = 1$). Maar, daar men,

men

Daar nu in den regthoekigen driehoek ECM′ de zijde EM′ $=$ EC $\times$ *Cos*. ψ is, zoo is alles bekend en wij hebben, in ons tweede geval, voor de deellijn des vierhoeks,

$$EM' = \pm CE \times \sqrt{\left[\frac{\tfrac{1}{4}A^2 + B^2 + BC \pm A\sqrt{(\tfrac{1}{4}A^2 + BC)}}{A^2 + B^2 + C^2 + 2\,BC}\right]} \quad (q)$$

In getallen is gegeven: (*) CE $= 130$; EF $= \frac{29120}{323}$; M $= \frac{1787544}{2261}$; *Sin*. $\varepsilon = \frac{12}{13}$; *Cos*. $\varepsilon = \frac{5}{13}$; *Sin*. $\delta =$ *Sin*. (BCE + ABC) $=$ *Sin*. BCE *Cos*. ABC + *Sin*. ABC *Cos*. BCE $= \frac{56}{65} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{33}{65} = \frac{323}{325}$ en *Cos*. $\delta = \sqrt{(1 - Sin^2.\,\delta)} = \frac{36}{325}$. Met deze gegevens vindt men verder,

A $= \frac{1}{2}$ CE^2 *Sin*. δ *Sin*. ε — $\frac{1}{2}$ EF^2 *Sin*. δ *Sin*. ε — M (*Sin*. δ *Cos*. ε + *Sin*. ε *Cos*. δ) $= \frac{1}{2} \times$

ten einde de deellijn EM′ te vinden de waarde van *Cos*. ψ noodig heeft, is het beter *Cos*. ψ onmiddelijk te zoeken, daar men toch deze laatste uit *Tang*. ψ, niet zonder eenigen omslag vinden kan. Men heeft namelijk

$$Sec^2.\,\psi = 1 + Tang^2.\,\psi = 1 + \left(\frac{-A \pm \sqrt{(A^2 + 4\,BC)}}{2\,B}\right)^2$$

$$= \frac{2\,A^2 + 4\,B^2 + 4\,BC \pm 2\,A\sqrt{(A^2 + 4\,BC)}}{4\,B^2};$$

$$Cos^2.\,\psi = \frac{1}{1 + Tang^2.\,\psi} = \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{4\,B^2}{2\,A^2 + 4\,B^2 + 4\,BC \pm 2\,A\sqrt{(A^2 + 4\,BC)}}.$$ Men vermenigvuldige teller en noemer met $2\,A^2 + 4\,B^2 + 4\,BC \mp 2\,A\sqrt{(A^2 + 4\,BC)}$, dan verkrijgt men voor de waarde van *Cos*. ψ dezelfde uitdrukking als in den text. (DE GELDER).

(*) Men kan deze formule wel gemakkelijker door de Logarithmen berekenen; doch dit is de eisch van soortgelijke kunstige vragen niet, welke de eigenlijke precise wortel-uitdrukkingen vorderen; en een Wiskundige behoort ook in die soort van werk bedreven te zijn. (DE GELDER.)

$\frac{1}{2} \times 130 \times 180 \times \frac{323}{325} \times \frac{12}{13} - \frac{1}{2} \times \frac{20120}{323} \times \frac{20120}{323} \times \frac{323}{325} \times \frac{12}{13} - \frac{1787544}{2261} \times (\frac{323}{325} \times \frac{5}{13} + \frac{12}{13} \times \frac{36}{325})$

$= + \frac{3477869683 2}{7 \times 323 \times 4225}.$

$B = \frac{1}{2} CD^2 \; Cos. \delta \; Sin. \epsilon - \frac{1}{2} EF^2 \; Sin. \delta \; Cos. \epsilon - M \; Cos. \delta \; Cos. \epsilon = \frac{1}{2} \times 130 \times 130 \times \frac{12}{13} \times \frac{36}{325} - \frac{1}{2} \times \frac{20120}{323} \times \frac{20120}{323} \times \frac{323}{325} \times \frac{5}{13} - \frac{1787544}{2261} \times \frac{5}{13} \times \frac{36}{325}$

$= - \frac{6907755520}{7 \times 323 \times 4225}.$

$C = M \; Sin. \delta \; Sin. \epsilon = \frac{1787544}{2261} \times \frac{12}{13} \times \frac{323}{325}$

$= + \frac{6908520544}{7 \times 323 \times 4225}.$

Stelt men nu, dat A, B en C gemeene deelers hebben, te weten $A = na$, $B = nb$ en $C = nc$, dan zal men in de vergelijking (q) voor A, B en C respectivelijk a, b en c kunnen nemen. In geheele getallen is, na de noemers der breuken weggelaten en de tellers door 32, 17 en 19 gedeeld te hebben,

$A = + 3364812 = + 4.9.11.29.293$
$B = - 668320 = - 32.5.4177$
$C = + 670329 = + 27.11.37.61$

en nu zijn A, B en C, als geene gemeene deelers meer hebbende, tot derzelver kleinste evenredige waarden gebragt en deze mag men nu in de formule (q) voor A, B en C zelve nemen. Deze waarden dan alzoo nemende, is

$A^2 = + 11321959795344$
$B^2 = + 446651622400$
$C^2 = + 449340968241$
$BC = - 447994277280$

en dan wordt,

$\frac{1}{4} A^2 + B^2 + BC = + 13.13.33488977768$
$A \sqrt{(\frac{1}{4} A^2 + BC)} = + 13.13.2.3.7.3364812 \sqrt{47289}$
$A^2 + B^2 + C^2 + 2BC = + 5.5.13.13.13.13.5856537.$

Het blijkt hier uit: dat het gebroken, onder het wortel-teeken in de vergelijking (q), door 13

13 × 13 verkleinbaar is: men verkrijgt, na de verkleining, voor de lengte van de deellijn EM' =

$$\pm 130 \sqrt{\left[\frac{33488977768 \pm 141322104\sqrt{47289}}{5 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 15856537}\right]}$$

dan, indien men het getal 130 onder het wortel-teeken brengt, dan verkrijgt men voor de gevraagde deellijn deze meer eenvoudige uitdrukking:

$$EM' = \sqrt{\left[\frac{1339559111072 + 5652884l6\sqrt{47289}}{15856537}\right]}$$

welke wij ten aanzien van de teekens, aldus aannemen, omdat, daar de deellijn EM' behalve dat zij positief zijn moet, natuurlijk kleiner dan de middellijn CE en grooter dan EA is, geen ander dan die wortel met de bijzondere omstandigheden van het werkstuk kan bestaan. In Logarithmen werkende vindt men EM' = 127,2812 nagenoeg.

Aanmerking. In deze oplossing hebben wij van de goniometrische formulen gebruik gemaakt: hoe veel sierlijker en vlugger daardoor de oplossing van de meeste Meetkundige Werkstukken wordt, zullen zij, die onze Meetkundige Analysis bestuderen, bij de ondervinding leeren kennen; echter moet men andere wegen, die tot de oplossing kunnen leiden, niet verzuimen: elke handelwijze heeft, in vele gevallen, haar eigen voordeel. Wij zullen daarom de oplossing van ons ijverig Medelid van verdienste den Heer Zuidhof hier bijvoegen.

Anders, door M. J. Zuidhof.

1°. Zij *Fig.* 96, ABCD de gegeven vierhoek, EF de begeerde deellijn; verklein de gegevene zijden met 2; dan is AB = 60; BC = 33½ CD = 25; DA = 16 en de inhoud wordt dan, ge-

gelijk in de voorgaande oplossing, gevonden = 714 te zijn: deze inhoud in reden van 33 tot 16 verdeelende, verkrijgt men: BCGH = $480\frac{6}{7}$ en ADGH = $233\frac{1}{7}$.

2°. Om de diagonalen AC en BD, die elkander in I snijden, te vinden, zoo stelle men DI = x; dan is, in de gelijkvormige driehoeken ADI en BCI, en in DIC en AIB:

$$AD : DI = BC : CI, \text{ of } 16 : x = 33 : CI = \frac{33x}{16}.$$

$$CD : DI = AB : AI, \text{ of } 25 : x = 60 : AI = \frac{12x}{5}$$

$$AD : AI = BC : BI, \text{ of } 16 : \frac{12x}{5} = 33 : BI = \frac{99x}{20}.$$

Nu is $AC = CI + AI = \frac{33x}{16} + \frac{12x}{5} = \frac{357x}{80}$ en $BD = DI + BI = x + \frac{99x}{20} = \frac{119x}{20}$; wanneer dan x bekend is, zijn de diagonalen bekend: maar nu is (zie DE GELDER'S, *Beg. der Meetk.* XXVIII *St.* V. *B.*) AC × BD = AD × BC + AB × CD, dat is:

$$\frac{375x}{80} \times \frac{119x}{20} = 16 \times 33 + 60 \times 25 = 2028$$

hier uit vindt men $x = 8\frac{88}{119}$, en verder $AC = \frac{357x}{80} = 39$ en $BD = \frac{119x}{20} = 52$.

3°. Om de middellijn des cirkels te vinden, redenere men aldus. Men trekke de loodlijn CK, dan, is in den driehoek ABC, (XVIII *St.* III *B.*)

$$BK = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2\,AB} = \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \frac{60 \times 60 + 33 \times 33 - 39 \times 39}{120} = 26\tfrac{2}{5}$$

$$CK = \sqrt{[BC^2 - BK^2]} = \sqrt{[33 \times 33 - 26\tfrac{2}{5} \times 26\tfrac{2}{5}]} = 9\tfrac{4}{5}.$$

Indien men nu AE trekt, dan is ∠ AEC = ∠

∠ ABC en de regthoekige driehoeken CBK en CEA zijn gelijkvormig; derhalve CK : BC = AC : CE, of $19\frac{4}{5}$: 33 = 39 : CE = 65 = de middellijn.

4°. Men trekke de lijn DL loodregt op AB, voorts BE en DE, dan is wederom in den driehoek ABD,

$$AL = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2\,AB} = 9\tfrac{4}{5};\ DE = \sqrt{(AD^2 - AL^2)} = 12\tfrac{4}{5}$$

en eindelijk, in de regthoekige driehoeken CAE, CDE en CBE, AE $= \sqrt{(CE^2 - AC^2)} = 52$; DE $= \sqrt{(CE^2 - CD^2)} = 60$ en BE $= \sqrt{(CE^2 - BC^2)} = 56$.

5°. Men trekke de lijnen CF en DF, en ftelle de begeerde deellijn EF $= a$, CF $= b$ en FG $= y$; dan is,

$$EF \times CD = EC \times DF + DE \times CF$$

$$25a = \frac{25a - 60b}{65} = \frac{5a - 12b}{13}$$

voorts is, in de gelijkvormige driehoeken, CFG en DGE; en in DFG en CGE:

$$CF : FG = DE : DG,\ \text{of}\ b : y = 60 : DG = \frac{60y}{b}$$

$$FD : FG = CE : GC,\ \text{of}\ \frac{5a - 12b}{13} : y = 65 : GC = \frac{845y}{5a - 12b}$$

$$\text{derh.}\ DG + GC = \frac{(300a + 125b)y}{5ab - 12b^2} = 25 = DC.$$

Deze vergelijking oplosfende, vindt men:

$$y = \frac{5ab - 12b^2}{12a + 5b} = FG$$

$$a - y = \frac{12a^2 + 12b^2}{12a + 5b} = GE$$

$$\frac{60y}{b} = \frac{300a - 720b}{12a + 5b} = DG$$

6°. Men trekke de lijn BF, dan is in den vierhoek BCFC, volgens de reeds aangehaalde eigenfchap:

$$EC \times BF = BE \times CF + EF \times BC$$
$$65 \times BF = 56b + 33a$$
$$BF = \frac{56b + 33a}{65}$$

7°. Men trekke nog de diagonaal AF, dan is in den vierhoek ADFC, als boven:

$$AF \times DE = AD \times EF + DF \times AE$$
$$60 \times AF = 60a + \frac{5a - 12b}{13} \times 52$$
$$AF = \frac{3a - 4b}{5}$$

8°. Men vindt de deelen der diagonalen AB en EF van den vierhoek ABFE op deze wijze. Men stelle FH $= z$; dan geven de gelijkvormige driehoeken BHF en EHA benevens AFH en EBH de volgende evenredigheden:

$$BF : FH = AE : AH = \frac{3380z}{33a + 56b}$$
$$AF : FH = BE : BH = \frac{280z}{3a - 4b}$$
$$BA = BH + AH = \frac{(19380a + 2160b)z}{99a^2 + 36ab - 224b^2} = 60$$

de oplossing dezer vergelijking geeft dan:

$$z = \frac{99a^2 + 36ab - 224b^2}{323a + 36b} = FH$$
$$\frac{3380z}{33a + 56b} = \frac{10140a - 13520b}{323a + 36b} = AH$$
$$FH - FG = \frac{1188a^3 - 688a^2b + 1188ab^2 - 688b^3}{3876a^3 + 2047ab + 180b^2} = GH$$

9°. Men late, uit het punt H, de loodlijn HM op CD vallen; dan zijn, aangezien CDE een regte hoek is, de driehoeken EDG en HMG gelijkvormig en daarom is,

$$GE : DE = GM : HM$$
$$\frac{12a^2 + 12b^2}{12a + 5b} : 60 = \frac{(1188a - 688b) \times (a + b^2)}{(323a + 36b) \times (12a + 5b)} : HM$$

$$HM = \frac{5940a - 3440b}{323a + 36b}$$

10°. Eindelijk is *vierhoek* ADGH = *drieh.* HGD + *drieh.* ADH = $\frac{1}{2}$ HM × GD + $\frac{1}{2}$ DL × HA : dat is, voor HM, GD, DL en AH de waarden, boven gevonden, in plaats stellende en onder het oog houdende, dat *vierh.* ADGH = 1632:7 is,

$$\frac{150a - 360b}{12a + 5b} \times \frac{5940a - 3440b}{323a + 36b} + \ldots\ldots$$

$$\ldots 12\tfrac{4}{5} \times \frac{10140a - 13520b}{323a + 36b} = \frac{1632}{7}.$$

Men ontwikkele deze vergelijking, dan zal men vinden:

$$670329a^2 + 668320b^2 = 3364812ab.$$

Stelt men in deze laatste, omdat $CF^2 = CE^2 - EF^2$ is, $b = \sqrt{(4225 - a^2)}$, dan zal men, na het wortel-teeken weggemaakt, en de termen der eindvergelijking door 714025 gedeeld te hebben, vinden:

$$15856537a^4 - 66977955536a^2 + 111662905600000 = 0$$

Hier uit de waarde van a gezogt en deze met den deeler 2, waarmede de zijden verkleind waren, vermenigvuldigd hebbende, vindt men voor de waarde van de deellijn EF,

$$\sqrt{\left[\frac{133955911072 + \sqrt{15111246920451320669184}}{15856537}\right]}$$

hetwelk met de eerste oplossing overeenkomt.

N°. 113. Door

M. J. Zuidhof, *Moses Lemans*, *N. Bondt*, *P. van Eeghen*, *Chz.*, en *Rehuel Lobatto.*

Zij, *Fig.* 97, ∠ A = 45°, ∠ B = 60°, dan is *Sin.*A = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, *Cos.*A = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; *Sin.*B = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en *Cos.*B = $\frac{1}{2}$ en *Sin.*C = *Sin.*(45° + 60°) = *Sin.*45° × *Cos.*60° +

X 2 *Sin.*

Sin.60° × *Cos*.45° $= \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}) = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6}$. Stel de grootſte zijde AC $= x + 2\sqrt{3} - \sqrt{2}$; dan is de kleinſte zijde BC $= x - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}$, en nu heeft men:

$$Sin.B : Sin.A = AC : BC$$

dat is, in ſtelkundige waarden,

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} : \frac{1}{2}\sqrt{2} = x + 2\sqrt{3} - \sqrt{2} : x - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}$$
$$\sqrt{3} : \sqrt{2} = x + 2\sqrt{3} - \sqrt{2} : x - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}$$
$$x\sqrt{3} - 6 + \sqrt{6} = x\sqrt{2} + 2\sqrt{6} - 2$$
$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})\,x = \sqrt{6} + 4$$
$$x = \frac{\sqrt{6}+4}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}+4)\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{1} = 7\sqrt{2} + 6\sqrt{3}$$

men heeft dan verder:

$$AC = x + 2\sqrt{3} - \sqrt{2} = 6\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$$
$$BC = x - 2\sqrt{3} + \sqrt{2} = 8\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$$

eindelijk is, door de bekende eigenſchap des driehoeks,

$$Sin.A : Sin.C = BC : AB$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6} = 8\sqrt{2} + 4\sqrt{3} : AB$$

of, vermenigvuldigende de termen der eerſte rede met $\sqrt{2}$,

$$1 : \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 8\sqrt{2} + 4\sqrt{3} : AB$$
$$AB = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})(8\sqrt{2}+4\sqrt{3}) = (1+\sqrt{3})(4\sqrt{2}+2\sqrt{3})$$
$$\text{of } AB = 6 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{6}.$$

ANDERS, door *C. Lantz*, *Jr.*, *C. J. van Bruſſel*, *J. C. van Setten*, en *A. van der Swan*.

Indien (*Fig.* 97.) in den driehoek ABC hoek A $= 45°$ en hoek B $= 60°$ is, trekke men de loodlijn CD. Men ſtelle BD $= x$; dan is BC $= 2x$ en CD $=$ AD $= \sqrt{(BC^2 - BD^2)} = \sqrt{(4x^2 - x^2)} = x\sqrt{3}$ en verder AC $= \sqrt{2\,AD^2} = x\sqrt{6}$; nu is AC $-$ BC $= x\sqrt{6} - 2x = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$; derhalve,

$$x = \frac{4\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{6}-2} = \frac{(4\sqrt{3}-2\sqrt{2})\times(\sqrt{6}+2)}{2} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$$

BC

$$BC = 2x = 8\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$$
$$AC = x\sqrt{6} = 6\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$$
$$AB = x + x\sqrt{3} = 6 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{6}$$

N°. 114. Door

M. J. ZUIDHOF, *P. van Eeghen, Chz.*, *Rehuel Lobatto*, *Jan Pauw*, en *Mozes Lemans.*

Stel, dat hij terstond betaalt $2x$ Gl. dan betaalt hij twee maanden later $2x + 100$ Gl. voorts nog twee maanden later, dat is, na vier maanden, $x + 50$ Gl. hij heeft dus in alles $5x + 150$ Gl. betaald en daar de geheele schuld 1200 Gl. is, blijft er nog $1200 - (5x + 150)$, dat is $1050 - 5x$ Gl. te betalen; deze laatste som kan hij nu, wegens het te vroeg betalen der eerste termijnen, $17\frac{1}{6}$ maand boven den bepaalden tijd houden: het is dus even zoo goed, als of hij dezelve in $7\frac{1}{2} + 17\frac{1}{6} = 24\frac{2}{3}$ maand eerst betalen moet. Volgens den algemeenen grondregel voor de Tijdrekening van betaling is dan:

$$\frac{2x \times 0 + (2x+100)2 + (x+50)4 + (1050-5x)24\frac{2}{3}}{1200} = 7\frac{1}{2}$$

$$4x + 200 + 4x + 200 + 25900 - 123\frac{1}{3}x = 9000$$
$$115\frac{1}{3}x = 17300$$
$$x = 150$$

Derh. $2x = 300$ Gl. kontant betaald
$2x + 100 = 400$ Gl. over twee maanden
$x + 50 = 200$ Gl. nog twee maanden later
$1050 - 5x = 300$ Gl. de rest.

N°. 115. Door

C. J. van Brussel, M. J. ZUIDHOF, en *P. van Eeghen, Chz.*

Volgens de noot, door de Wetenschappelijke

 Com-

Commisſie bij de opgave van dit voorſtel geplaatst, is, de wortel x ſtellende, het Tetrahedraal getal $\frac{1}{6}x(x+1)(x+2)$, waar uit volgt: dat, daar het tetrahedraal-getal van de derde afmeting is, de wortel van de eerſte afmeting zal zijn; daar dan de opgegevene formule van de zesde afmeting is, moet de wortel van de tweede afmeting zijn.

Stellen wij dan den wortel $a + bx + cx^2$, dan is het tetrahedraal-getal $\frac{1}{6}(a + bx + cx^2) \times \ldots$ $(a + 1 + bx + cx^2) \times (a + 2 + bx + cx^2)$. Dit product dan ontwikkelende, moet het, term voor term, met de opgegevene formule overeenkomen en wij zullen dan hebben: $a^3 + 3a^2 + 2a = 336$; $3a^2b + 6ab + 2b = 1022$; ... $3a^2c + 3ab^2 + 6ac + 3b^2 + 2c = 1175$; $6abc + 6bc + b^3 = 637$; $3ac^2 + 3b^2c + 3c^2 = 168$ (γ); $3bc^2 = 21$ (β) en $c^3 = 1$ (α).

Wij hebben alzoo zeven vergelijkingen om de grootheden a, b en c te bepalen; drie van dezelve zijn genoegzaam tot ons oogmerk, en de overige moeten met de waarden, welke wij uit deze drie eerſte voor a, b en c vinden, overeenſtemmen; want anders zou hier uit volgen, dat de opgegevene formule geen tetrahedraal getal zou kunnen zijn, waarvan de wortel eenen ſtelkundigen vorm hadde. Bepalen wij ons dan tot de laatſte, welke wij met (α), (β) en (γ) geteekend hebben; dan geeft ons (α) : $c = 1$; deze waarde in (β) gebragt, geeft $b = \frac{21}{3c^2} = 7$, en de waarden van b en c in (γ) gebragt; komt er $a = \frac{168 - 3b^2c - 3c^2}{3c^2} = 6$; daar nu deze waarden van a, b en c, ook aan alle de overige vergelijkingen voldoen, blijkt hier uit: dat $6 + 7x + x^2$ de gevraagde tetrahedraal-wortel is; en in de daad, wanneer wij, volgens den gegevenen regel de-

deze uitdrukking tot de tetrahedraal verheffen, verkrijgen wij volkomen de opgegevene formule.

N°. 116. Door

C. J. van Brusfel, M. J. ZUIDHOF, en *P. van Eeghen, Chz.*

Stel de drie getallen, waar van het product de gevraagde fom goud-guldens moet uitmaken, als volgt: het eerfte $= x$; dan is het tweede $= 5x$ en het derde $= 10x$. Verheft men nu het eerfte tot een vierhoekig pyrgoidaal, het tweede tot een vierhoekig columnaar en het derde tot een vierhoekig pyramidaal-getal, dan verkrijgt men, ingevolge de noot der Wetenfchappelijke Commisfie (*), de volgende uitdrukkingen:

$$x^3 + \tfrac{1}{6}(x - 1)\,x\,(2x - 1)$$
$$(5x)^3 = 125x^3$$
$$\tfrac{1}{6}.20x\,(20x + 1)(40x + 1)$$

daar nu de fom dezer drie formulen $= 2812985$ moet zijn, verkrijgt men, na alles ontwikkeld te hebben:

$$\frac{16758x^3 + 1197x^2 + 21x}{6} = 2812985$$

dat is, na herleiding, de eindvergelijking,

$$16758x^3 + 1197x^2 + 21x - 16877910 = 0$$

hier uit is één der wortels $x = 10$; derhalve

$5x$

(*) In de noot der *Prov. Wet. Comm.* op dit voorftel *Bladz.* 37, heeft, bij verzinning, eene misftelling plaats gehad: er ftaat: „ *een pyrgoidaal-getal is de fom van een Columnaar en Pyramidaal-getal, tot denzelfden wortel behoorende,*" lees: *een Pyrgoidaal-getal is de fom van eenig Columnaar getal en een Pyramidaal-getal, wiens wortel één minder dan die van het Columnaar getal is:* althans blijkt het, dat HALCKEN dit woord in den laatften zin opvat. (*Wet. Comm.*)

$5x = 50$ en $20x = 200$; eindelijk is het product dezer deelen $10 \times 50 \times 200 = 100000$ het begeerde getal goud-guldens. De twee andere wezenlijke wortels der eindvergelijking geven geene voor den aard der vraag geschikte oplossingen.

N°. 117. Door

J. R. Schmidt, *Jacob de Gelder*, en *L. van Heusden*.

Zij ACBFE (*Fig.* 98.) de vijfhoek en EF de zijde, waar aan eene der zijden van het ingeschreven vierkant evenwijdig loopen moet; dan hebben wij de volgende

Constructie. Trek de diagonaal AB, welke klaarblijkelijk evenwijdig aan EF is; stel BD loodregt op AB en maak BD = AB: trekkende dan CD, welke FB in G snijdt; dan zal, na GK evenwijdig aan EF, GH en KI loodregt op GK en eindelijk IH getrokken te hebben, IHGK het begeerde vierkant zijn.

Bewijs. Het zal niet noodig zijn te bewijzen, dat IHGK een regthoekig parallelogram is; zulks is uit de constructie en de regelmatigheid der figuur genoegzaam klaarblijkelijk en wij behoeven dus slechts te bewijzen, dat IH = HG is.

Omdat HG evenwijdig is aan BD, is

$$CH : CB = HG : BD$$

en omdat HI evenwijdig aan AB is, is

$$CH : CB = HI : AB$$

derhalve $HG : BD = HI : AB$

maar BD is, volgens de constructie, = AB; derhalve is ook IH = HG.

1. Aanmerking. Dezelfde constructie (zegt de Heer Schmidt) geldt ook, met eene kleine ver-

verandering, om in eenen regelmatigen veelhoek van een oneven getal zijden, welke dan ook het getal der zijden zijn moge, een vierkant te beschrijven. In *Fig.* 99. is, op deze wijze, een vierkant in eenen regelmatigen zevenhoek beschreven; de constructie, zoo wel als het bewijs, komen, in dit geval, met die van den vijfhoek overeen. In *Fig.* 100. is een vierkant in eenen regelmatigen negenhoek beschreven; maar de constructie wijkt hier eenigermate af; want, na de diagonaal AB getrokken en BD loodregt op AB gesteld en gelijk aan AB gemaakt te hebben, moeten de zijden MA en LB verlengd worden, tot dat zij elkander in C snijden: vervolgens de lijn CD getrokken hebbende, tot zij FN in G snijdt, dan is het vierkant bepaald. Het bewijs loopt hier op dezelfde wijze, als voor den vijfhoek, af. Het is uit deze voorbeelden blijkbaar, dat deze constructie op alle regelmatige onevene veelhoeken toepasselijk is.

2. Aanmerking. Een der Heeren Leden (zegt de Gelder) vermeent, dat dit werkstuk aldus kan geconstrueerd worden. *Deel* (*Fig.* 98.) *FE in Q in twee gelijke deelen; vereenig de punten C en Q; beschrijf met CQ als straal, eenen cirkelboog, welke de zijden AE en BF in de punten K en G snijdt en dan zal* (zegt hij,) *GK de zijde van het begeerde vierkant zijn.* Waarschijnlijk misleid door het geringe onderscheid tusschen de lijnen CQ en CG, heeft hij, het geen bij eene constructie zoo ligtelijk gebeuren kan, de gelijkheid dezer lijnen vermoed en zich in het zoeken naar het bewijs bedrogen: althans zal dit bedrog uit het volgende kunnen blijken.

Men trekke de diagonaal CE. De lijn CQ snijdt AB in twee gelijke deelen AP = BP en regthoekig. Volgens den aard des regelmatigen vijfhoeks

 is

is ∠ ABC $= 36°$ en ∠ CEF $= 72°$; de regthoekige driehoeken BCP en CEQ geven dan (BC $= a$ stellende,) BP $=$ BC $\times$ *Cos*. CBP $=$ $a \times Cos.\,36°$ en AB $=$ CE $= 2a \times Cos.\,36°$. Voorts CQ $=$ CE $\times$ *Sin*. $72° = 2a \times Cos.\,36° \times Sin.\,72° = 4a.\,Sin.\,36° \times Cos^2.\,36°$; of, het geen eenvoudiger is, CQ $=$ EQ *Tang*. $72° = \frac{1}{2}\, a\, Tang.\,72°$.

Deze waarde van CQ moet, ten einde de waarheid of valschheid der opgegevene constructie te beoordeelen, met die van CG vergeleken worden.

Om de waarde van CG te vinden, zoeke men eerst de waarde van HI $=$ GH. In den driehoek CHI is *Sin*. C : *Sin*. I $=$ IH : CH, of *Sin*. $108°$: *Sin*. $36°$ $=$ IH : CH; derhalve is, omdat *Sin*. $108° = Sin.\,72°$ is, CH $=$ IH $\times \frac{Sin.\,36°}{Sin.\,72°}$. In den driehoek BGH is, *Sin*. B : *Sin*. G $=$ HG : BH; dat is, omdat B $= 108°$ en G $= 108° - 90° = 18°$ is, *Sin*. $108°$: *Sin*. $18°$ $=$ HG : BG, diensvolgens BG $=$ HI $\times \frac{Sin.\,18°}{Sin.\,72°}$. Nu is BC $=$ CH $+$ HB $= \ldots .$ $\frac{Sin.\,18° + Sin.\,36°}{Sin.\,72°} = a$, waar uit dan volgt:

$$HI = HG = a \times \frac{Sin.\,72°}{Sin.\,18° + Sin.\,36°}$$

$$CH = HI \times \frac{Sin.\,36°}{Sin.\,72°} = a \times \frac{Sin.\,36°}{Sin.\,18° + Sin.\,36°}$$

Nu is, in den driehoek CGH, volgens de bekende eigenschap,

$$CG^2 = CH^2 + GH^2 - 2\,CH \times GH \times Cos.\,CHG$$

maar CHG $=$ CHI $+$ IHG $= 36° + 90° = 126°$ en $Cos.\,126° = -\,Cos.\,54° = -\,Sin.\,36°$ zijnde, is

$$CG^2 = a^2 \times \frac{Sin^2.\,36° + Sin^2.\,72° + 2\,Sin^2.\,36° \times Sin.\,72°}{[Sin.\,18° + Sin.\,36°]^2}$$

Om-

Omdat nu $Sin^2.72^\circ = Sin^2.36^\circ \times 4\ Cos^2.36^\circ$ en $Sin\ 18^\circ + Sin.36^\circ = 2 \times Sin.27^\circ \times Cos.9^\circ$ is, verandert dit gebroken in

$$CG^2 = a^2.\frac{Sin^2.36^\circ}{4Sin^2.27^\circ.Cos^2.9^\circ}.[1+2Sin.72^\circ+4Cos^2 36^\circ]$$

of, daar $4\ Cos^2.36^\circ = 2 + 2\ Cos.72^\circ$ is, in

$$CG^2 = a^2.\frac{Sin^2.36^\circ}{4Sin^2.27^\circ.Cos^2.9^\circ}.[3+2Sin.18^\circ+2Sin.72^\circ]$$

en hier uit den vierkants-wortel trekkende,

$$CG = a.\frac{Sin.36^\circ}{Sin.27^\circ.Cos.9^\circ}.\sqrt{(\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}Sin.18^\circ+\tfrac{1}{2}Sin.72)}\ (A)$$

Deze waarde van CG zou nu aan die van CQ $= \frac{1}{2}\ a\ Tang.72^\circ$ moeten gelijk, of de waarde van CG in (A) tot $\frac{1}{2}\ a \times Tang.72^\circ$, of tot $4a\ Sin.36^\circ\ Cos^2.36^\circ$, (zie boven) herleidbaar moeten zijn; doch, daar de grootheid onder het wortel-teeken in (A) op geenerlei wijze tot eene rationale functie van eenigen rationalen hoek kan gebragt worden, beſtaat er ook geene volkomene gelijkheid tusſchen CG en CQ. Met dat al kan het mogelijk zijn: dat de waarde van CQ weinig van die van CG verſchille en dit heeft ook in de daad plaats; want ſtelt, men $a = 10000$ deelen, dan vindt men : CQ $= 15388$ en CG $= 15363$ deelen, CQ is derhalve 25 deelen langer dan CG; de lijnen CG en CQ verſchillen dan ſlechts $\frac{1}{400}$ van de zijde van den gegevenen vijfhoek van elkander, en dit geringe verſchil, in eene kleine figuur onmerkbaar, is waarſchijnlijk de oorzaak der misleiding geweest. In eene grootere figuur, zou men, bij eene naauwkeurige conſtructie, den misſlag, ook bij de proef, ontdekken.

ANDERS, door *P. van Eeghen*, *Chz.*

Zij (*Fig.* 101.) ABCDE een regelmatige vijfhoek, verleng de zijden BC en EA tot dat zij el-

elkander in F ontmoeten; trek door de punten D en F de lijn DFG; maak FG = FB = FA; trek de lijn GE en FH evenwijdig aan EG, dan zal HI evenwijdig aan AB, HL evenwijdig aan DF, IK en KL evenwijdig aan HL en HI getrokken hebbende, HIKL het begeerde vierkant zijn. Het welk op de volgende wijze betoogd kan worden.

BEWIJS. Trek de diagonaal EC; dan is, volgens de eigenschap des vijfhoeks, EC = BF = FG en de gelijkvormige driehoeken, door de constructie ontstaan, geven de evenredigheden:

$$HD : HI = ED : EC$$
$$DF : HD = GF : EH$$
$$ED : DF = EH : HL$$

de overeenkomstige termen van deze vermenigvuldigd hebbende, heeft men:

$$ED : HI = ED \times GF : EC \times HL$$

maar volgens de constructie is FG = EC, derhalve is

$$ED : HI = ED : HL$$

en hier uit volgt HI = HL, waar uit het overige blijkbaar is.

N°. 118. Door (*)

J. R. SCHMIDT.

Laat (*Fig.* 102.) A het gegeven punt, PQ de ge-

(*) Er zijn Leden, welke van dit en het volgend voorstel oplossingen hebben ingezonden, die geene oplossingen kunnen genoemd worden; want, wanneer men door het teekenen eener figuur als het ware proefondervindelijk ziet, dat de plaats van de punten in N°. 118. eene regte lijn en die van N°. 119. een cirkel is, en het bewijs in veel woorden niet meer zegt, dan *het is zoo*, kan de Wetenschappelijke Commis-

gegevene lijn, ACLD eene der gelijkvormige figuuren, en D het punt zijn, waar van men de plaats begeert. Zoo dan uit D eene loodlijn DE op AC wordt nedergelaten, zal uit hoofde van de gelijkvormigheid der figuren, op elke lijn AC, AE tot EC in eene beftendige rede moeten zijn, bij voorbeeld als $m : n$. Wanneer wij dan de loodlijn AG zoodanig deelen, dat AF : FG = $m : n$ zij, en door F evenwijdig aan PQ trekken de lijn MN, dan deelt deze lijn alle de lijnen AC in die zelfde reden, en bijgevolg zullen alle de punten E in deze lijn MN liggen.

Nu is uit hoofde van den regten hoek DEA, ∠ DEH het complement van den ∠ AEF, en daarom zijn de driehoeken DEH en AEF gelijkvormig; ftellen wij dan de ftandvastige reden tusfchen AE en ED gelijk $p : q$, en verder AF $= a$, FH $= x$ en HD $= y$, dan is

EH : AF = ED : EA, dat is EH : a = $q : p$, waaruit EH $= \frac{q}{p} a$ en EF : DH = AE : ED, of EF : $y = p : q$, waaruit EF $= \frac{p}{q} y$ en nemende de fom van EH en EF, hebben wij HF $= \frac{q}{p} a + \frac{p}{q} y = x$, waaruit blijkt, dat de gevraagde plaats van het punt D eene regte lijn is, waar van nog alleen de ftand bepaald moet worden; daar het nu genoeg is twee punten

misfie, welke van hare voorgeftelde bedoeling, om de redactie der voorftellen tot nut en bevordering te doen ftrekken, niet zal afgaan, van zulk eenen onvolkomen arbeid geen gebruik maken en gebiedt haar tevens de billijkheid de namen der toezenders van zulke gebrekkige oplosfingen niet te vermelden, ten einde niemand in de toewijzing der prijzen zou mogen benadeeld worden. (*Wet. Comm.*)

ten van dezelve te kennen om haar te conftrueren, zoeken wij de punten, welke met $x = o$ en $y = o$ overeenftemmen; ftellende dan $x = o$ vinden wij $y = - \frac{q^2}{p^2} a$ voor de waarde van FO; en ftellende $y = o$, komt er $x = \frac{q}{p} a$ voor de waarde van FR, en de punten O en R aldus bepaald zijnde, zal de regte lijn DRO de begeerde plaats van het punt D zijn.

VOORBEELDEN. Laat ons dit gezegde toepasfen op die gevallen, waarin de gelijkvormige figuren gelijkzijdige driehoeken en vierkanten zijn.

1°. Voor de gelijkzijdige driehoeken (zie *Fig.* 103.) Hier deelt de loodlijn DE, AC in twee gelijke deelen; AD moet dus midden door worden gedeeld in F, en MN evenwijdig getrokken worden aan PQ: nu is DE : AE $= q : p = \sqrt{3} : 1$, dus FR $= \frac{q}{p} a =$ AF $\sqrt{3} = \frac{1}{2}$ AG $\sqrt{3}$; het punt R wordt bijgevolg gevonden door op AG eenen gelijkzijdigen driehoek ARG te befchrijven, en het is klaar: dat, in ieder geval, dit punt R bepaald wordt, door op AG eene der gelijkvormige figuren te befchrijven. Verder is GO $= - \frac{q^2}{p^2} a = - 3$ AF, waaruit blijkt, dat het punt O gevonden wordt door GO = AG te nemen.

In dit bijzonder geval van ons Theorema, kunnen wij het gevondene ook op de volgende wijze betoogen. Laat CO getrokken worden, dan is, omdat AG = GO is, ook CO = AC = CD, de punten D, A en O liggen bijgevolg in den omtrek van eenen cirkel, waar van C het middelpunt is, en wij hebben ∠ DOG $= \frac{1}{2}$ ∠ DCA $= \frac{1}{3}$R, dewijl dus voor ieder punt D de hoek

hoek DOA standvastig $= \frac{1}{3}$R is, volgt hier uit: dat deze lijn DO de plaats is van alle de punten D, en dat deze lijn DO zoodanig moet worden geconstrueerd, dat GO = GA en ∠ GOD = $\frac{1}{3}$R is, dat is gelijk den halven hoek van den gelijkzijdigen driehoek, en GS zal alzoo de halve basis zijn van den gelijkzijdigen driehoek, welke GO = AG tot hoogte heeft.

2°. Als de gelijkvormige figuren vierkanten zijn, (zie *Fig.* 104.)

Hier valt DE in C en dus F in G en wij hebben, omdat DE = EA is, ook $q = p$, zoo dat $FR = \frac{q}{p} a = AF = AG$ en $FO = -\frac{q^2}{p^2} a = AF = AG$; zoo dat de lijn DO geconstrueerd wordt, door FR en FO beide gelijk AG te nemen.

Zoo wij echter de plaats van de punten D′ begeerden, zouden wij uit de vergelijking geene bepaalde oplossing verkrijgen; want als dan wordt, omdat E′ en F′ beide in A vallen, $p = 0$ en $a = 0$, waar door $AR' = \frac{q}{p} a = \infty \times 0$ en $FO' = -\frac{q^2}{p^2} a = \infty \times 0$; in dit geval wordt echter de stand van de lijn D′O′ gemakkelijk gevonden; want beschrijvende op AG een vierkant, zal AR′ = AG het punt R′ bepalen, en wanneer GU = GR = AG genomen wordt, is AROU het vierkant op AU, en dus R mede een punt van de gevraagde lijn; de plaats van het punt D′ zal dus zijn de lijn D′O′, welke evenwijdig aan AG en door het punt R getrokken is.

Wij kunnen voor dit bijzonder geval, waar in de gelijkvormige figuren vierkanten zijn, het bewijs wederom, op dezelfde wijze, opmaken, als voor

voor de gelijkzijdige driehoeken, en dit zal altoos plaats hebben, wanneer de gelijkvormige figuren regelmatige veelhoeken zijn, en dat men de plaats van de punten D zoekt, welke in de figuur onmiddellijk op de punten C volgen; de lijn DO zal als dan altoos zoodanig moeten getrokken worden, dat GO = GA is, en dat de hoek DOA gelijk aan den halven hoek des veelhoeks zij.

Aanmerking. Wanneer men de oplossing van dit voorstel op eene andere wijze aanvat, schijnt de eindvergelijking, in den eersten opslag, tot den vierden graad te behooren. Hernemen wij, bij voorbeeld, het geval van de gelijkzijdige driehoeken (*Fig.* 103.) en stellen wij $AG = a$, $DI = y$ en $IG = x$, dan is $DB = y - a$; dus $AD = AC = CD = \sqrt{[x^2 + (y - a)^2]}$, $IC = \sqrt{[DC^2 - DI^2]} = \sqrt{[x^2 + a^2 - 2ay]}$ en $CG = \sqrt{(AC^2 - AG^2)} = \sqrt{(x^2 + y^2 - 2ay)}$ en dus omdat $IC + CG = IG = x$ is, is . . . $\sqrt{(x^2 + a^2 - 2ay)} + \sqrt{(x^2 + y^2 - 2ay)} = x$, welke vergelijking, om de wortel-teekens te verdrijven, tweemaal gequadrateerd moet worden, en dan na herleiding geven zal:

$$y^4 - 2(a^2 + x^2)y^2 + 8ax^2y + a^4 - 2a^2x^2 - 3x^4 = 0$$

eene vergelijking, welke tot de vierde magt schijnt te behooren, en dus in den eersten opslag zou kunnen doen denken, dat de begeerde plaats eene kromme lijn van de derde orde zou zijn; dezelve wordt echter gemakkelijk aldus herleid.

Ordenen wij dezelve ten opzigte van x, dan vinden wij:

$$3x^4 + 2x^2(a^2 - 4ay + y^2) = (a^2 - y^2)^2$$

tellende nu, na met drie vermenigvuldigd te hebben, aan beide zijden bij $(a^2 - 4ay + y^2)^2$, komt er:

$$[3x^2 + (a^2 - 4ay + y^2)]^2 = 4(a^2 - ay + y^2)^2$$

waar

waaruit $3x^2 + x^2 - 4ay + y^2 = 2(a^2 - ay + y^2)$ en $3x^2 = a^2 + 2ay + y^2$, zoo dat $x\sqrt{3} = a + y$ is, zijnde deze dezelfde vergelijking, welke wij vinden zouden, door de algemeene vergelijking $x = \frac{q}{p}a + \frac{p}{q}y$ in dit geval tot de as PQ te herleiden. Hetzelfde verſchijnſel zal plaats hebben, wanneer wij ons algemeen voorſtel op deze wijze zouden willen aanvatten.

ANDERS, door *P. van Eeghen, Chz.*, verder aangevuld door *Jacob de Gelder. Fig.* 109.

Wanneer men dit voorſtel oplost met driehoeken op de lijnen, is hetzelve ook algemeen voor de veelhoeken, op die lijnen beſchreven, opgelost; omdat, wanneer men A als het gegeven punt en BCD als de gegevene lijn aanneemt, eenig punt E, als hoekpunt eens veelhoeks aanneemt, het vraagſtuk zich tot de driehoeken ABE bepaalt. Laten dan, behalve de lijn AB, nog de lijnen AC en AD uit het punt A tot aan de lijn BCD getrokken worden: men beſchrijve op AC en AD de driehoeken ACF en ADG, alle gelijkvormig aan den driehoek ABE, dan zeg ik: dat de punten E, F en G in eene regte lijn gelegen zijn; want, vereenig de punten E en F en F en G, dan is de driehoek AEF gelijkvormig aan den driehoek ABC en driehoek AFG gelijkvormig aan driehoek ACD; want, wegens de gelijkvormigheid der driehoeken ABE, ACF en ADG, ∠ EAB = ∠ FAC; hier af ∠ GAF = ∠ GAF, blijft ∠ EAF = ∠ BAC; om dezelfde reden is . . . ∠ FAG = ∠ CAD; en daar nu uit kragte van dezelfde gelijkvormigheid,

AE : AB = AF : AC of AE : AF = AB : AC
AF : AC = AG : AD of AF : AG = AC : AD

is, zoo zijn (X. *Stell.* IV DE GELDERS *Beg.*) de driehoeken AEF en AFG reſpectivelijk gelijk-

 vor-

vormig aan de driehoeken ABC en ACD; dit nu zoo zijnde, is ∠ ACB = ∠ AFE en ∠ ACD = ∠ AFG; derhalve ∠ EFA + ∠ AFG = ∠ ACB + ∠ ACD = 180°; derhalve (V *Stell.* I *B.*) is FG het verlengde van EF en de punten E, F en G liggen in eene en dezelfde regte lijn: en daar dit betoog algemeen voor alle andere lijnen geldt, blijkt het, dat de plaats der gevraagde punten eene regte lijn is.

Stel: dat de lijn EG, die de plaats der begeerde punten is, BD in H snijde, dan is het klaar, dat de gelijkvormige driehoek, op AH beschreven, met de zijde tegen over het punt A liggende, langs EG moet vallen; derhalve moet ∠ AHE = ∠ ABE = ∠ ACF = ∠ ADG zijn; boven dien behoeft niet met vele woorden betoogd te worden, dat de zijde van den driehoek, wiens hoekpunt in A valt, langs AD zal vallen en dat diensvolgens ∠ AHD = ∠ AGD en ∠ AFC = ∠ AEB zal zijn; de lijn EH zal dan de as AD snijden onder eenen hoek BHE, die gelijk is aan den hoek EAB = ∠ FAC = ∠ GAD. Men late nu uit het punt A de loodlijn AKL op BD, welke het verlengde van EG in L snijdt, nedervallen; indien men dan verder AI loodregt op EG laat vallen, dan is driehoek IAK gelijkvormig aan driehoek GAD; daar nu de driehoeken, op AB, AC, AD beschreven in soort gegeven zijn, gelijk ook het punt A in stelling met betrekking tot de lijn BD, is ook AK gegeven. Stel derhalve AK = a, AI = b; ∠ IAK = μ; dan is AL = AI × $Sec.\mu = \frac{b}{Cos.\mu}$ en KL = $\frac{b}{Cos.\mu} - a = \frac{b - a\,Cos.\mu}{Cos.\mu}$ en HK = KL × $Cot.\mu = \frac{b - a\,Cos.\mu}{Sin.\mu}$. Stellen wij dan het punt K voor

den

den oorsprong der coördinaten, dan zal, voor de vergelijking tot de regte lijn $y = px + q$ aannemende, met $y = o$ overeenstemmen $x = -\frac{p}{q} = -KH = -\frac{b - a\,Cos.\mu}{Sin.\mu}$; en met $x = o$, overeenstemmen $y = q = -KL = -\frac{b - a\,Cos.\mu}{Cos.\mu}$, hieruit $p = -Tang.\mu$ en de vergelijking wordt derhalve $y = -Tang.\mu \times x - \frac{b - a\,Cos.\mu}{Cos.\mu}$ de vergelijking van de plaats der begeerde punten.

N°. 119. Door

J. R. Schmidt.

Dit en het 118ste Voorstel zijn slechts bijzondere gevallen van het volgende meer algemeene Voorstel, waar in zij beide zijn opgesloten.

Wanneer men uit eenig punt A (*Fig.* 106.) *buiten of binnen eenen cirkel lijnen AC naar deszelfs omtrek trekt, en op alle deze lijnen AC gelijkvormige figuren beschrijft,* (*doch alle naar den zelfden kant,*) *dan zullen de overeenstemmende punten D dezer gelijkvormige figuren in den omtrek van eenen anderen cirkel liggen.*

Laat, om zulks te betoogen, DE loodregt op AC zijn, dan zal, uit hoofde van de gelijkvormigheid der figuren, in elken stand van AC, AE tot AC in eene standvastige reden, bij voorbeeld als $m : n$ zijn; het punt E zal alzoo, terwijl AC alle standen aanneemt, waar voor zij vatbaar is, eenen cirkel doorloopen, welke bepaald wordt, door $AN : AM = m : n$ en $NO : MP = m : n$ te nemen (DE GELDERS *Grondb. der Meetk.* IV *B.* III *St.*) en wij behoeven dus slechts te bewijzen, dat, wanneer uit eenig punt

A lijnen AE tot den omtrek eens cirkels getrokken worden, en op de uiteinden E loodlijnen ED op dezelve worden opgerigt, zoodanig, dat overal AE : ED = p : q zij, de punten D, in den omtrek van eenen anderen cirkel zullen gelegen zijn: en dit betoogen wij op de volgende wijze.

Laat (*Fig.* 107.) DB loodregt op NA zijn, en laat EN getrokken worden; stel NA $= a$ en NE = NO $= b$; stel verder AB $= x$, BD $= y$, AE : ED $= p : q$, $\angle$ NBD $= \alpha$, $\angle$ DAE $= \beta$ en $\angle$ NAE $= \gamma$, dan is AD $= \surd(AB^2 + BD^2) = \surd(x^2 + y^2)$: nu is AE : ED $= p : q$ en $AE^2 + ED^2 = AD^2 = x^2 + y^2$, dus AE $= \frac{p\surd(x^2+y^2)}{\surd(p^2+q^2)}$ en ED $= \frac{q\surd(x^2+y^2)}{\surd(p^2+q^2)}$; verder is AE : $Cos.\beta = \surd(x^2+y^2)$, of $Cos.\beta = \frac{AE}{\surd(x^2+y^2)} = \frac{p}{\surd(p^2+q^2)}$ en $Sin.\beta = \frac{q}{\surd(p^2+q^2)}$; AB : $Cos.\alpha = \surd(x^2+y^2)$ of $Cos.\alpha = \frac{AB}{\surd(x^2+y^2)} = \frac{x}{\surd(x^2+y^2)}$ en $Sin.\alpha = \frac{y}{\surd(x^2+y^2)}$; maar, $\gamma = \alpha - \beta$ zijnde, is $Cos.\gamma = Cos.\alpha\ Cos.\beta + Sin.\alpha\ Sin.\beta = \frac{px+qy}{\surd(p^2+q^2)(x^2+y^2)}$.

Nu is $NE^2 = AE^2 + NA^2 - 2\,AE.NA\ Cos.\gamma$ en brengende hier in de gestelde en de gevondene waarden, dan heeft men:

$$b^2 = \frac{p^2}{p^2+q^2}(x^2+y^2) + a^2 - \frac{2a(px+qy)p}{p^2+q^2}$$

alles met $p^2 + q^2$ vermenigvuldigd en door p^2 gedeeld hebbende, komt er, na herleiding:

$$\frac{b^2(p^2+q^2)}{p^2} = (a-x)^2 + \left[\frac{q}{p}a - y\right]^2$$

of

$$\text{of}(a-x)^2+\left[\frac{q}{p}a-y\right]^2=\left[\frac{b\sqrt{(p^2+q^2)}}{p}\right]^2,$$

zijnde eene vergelijking tot den cirkel, wiens middelpunt en ſtraal aldus gevonden worden.

Laten uit N, O en R loodlijnen op RA worden opgerigt, en NH $= \frac{q}{p}$ NA genomen worden, trekkende dan AH, tot zij OF en RG ſnijdt in F en G, en beſchrijvende met HG = HF, als ſtraal en H als middelpunt, eenen cirkel, dan zal deze de begeerde plaats van het punt D zijn.

Want, trekkende DI loodregt op NH, dan is DI² + HI² = DH²; maar, volgens de conſtructie, is DI = BN = AN — AB $= a - x$; HI = HN — DB $= \frac{q}{p}a - y$, en omdat AN : AH = ON : HF of $a : \sqrt{\left[a^2+\frac{q^2}{p^2}a^2\right]}$ $= b$: HF, zoo is HD = HF $= \frac{b\sqrt{(p^2+q^2)}}{p}$;

en dus $(a-x)^2+\left[\frac{q}{p}a-y\right]^2=\left[\frac{b\sqrt{(p^2+q^2)}}{p}\right]^2$, zoo als boven.

1. Aanmerking. Is nu, zoo als in de opgave van dit voorſtel, A in den omtrek van den gegevenen cirkel gelegen, dan zijn alle de lijnen AC (*Fig.* 108.) koorden van dien cirkel; de cirkel, waar in de punten E liggen, raakt dan den gegevenen cirkel in A, zoo dat de punten O, P en A in elkander vallen; en de gevraagde cirkel, waar in het punt D zal vallen, wordt hier derhalve gevonden door NH de vierde evenredige tot AE, ED en NA te nemen, en dan uit H, als middelpunt, met HF = HG = HR als ſtraal, eenen cirkel te beſchrijven; het punt F valt hier mede in A; en wanneer dan het gegeven punt A in

den omtrek ligt, gaat de gezochte cirkel altoos door de punten A en R.

2. Aanmerking. Wanneer a en b beide oneindig groot zijn, gaat de gegeven cirkel over in eene regte lijn, en dan zijn wij in het geval van het 118 *Voorstel*. In dit geval nu wordt de straal van den gezochten cirkel, dat is $\frac{b\sqrt{(p^2+q^2)}}{p}$, mede oneindig groot, en dus is de gezochte plaats een cirkel van eene oneindig groote straal, dat is, eene regte lijn, even zoo als wij zulks in het 118 *Voorstel* bevonden hebben, alwaar de stand van deze regte lijn voor alle gevallen bepaald is.

3. Aanmerking. Het voorstel, zoo als het in den text is opgegeven, is ook een bijzonder geval van een ander algemeen voorstel, waar in het 118 niet begrepen is, namelijk van dit: *Wanneer, uit eenig punt, binnen of buiten eenen cirkel, lijnen naar den cirkel getrokken worden, en op de koorden, welke de cirkel van deze lijnen affnijdt, ter wederzijden gelijkvormige figuren worden beschreven, vraagt men de kromme lijn te bepalen, waar in de overeenstemmende punten van deze figuren zullen liggen?* Deze kromme lijn nu is niet altijd een cirkel; maar alleen dan, wanneer het punt in den omtrek van den gezegden cirkel ligt. Wij besparen het voor eene andere gelegenheid, om dit algemeenere voorstel verder te ontwikkelen.

Anders, door Jacob de Gelder, en *P. van Eeghen, Chz.*

Zij, *Fig.* 105. A het gegeven punt, liggende in den omtrek van den cirkel ABCD. Laten op de koorden AB, AC, AD beschreven zijn de gelijkvormige driehoeken ABG, ACF en ACE, dan moet bewezen worden: *dat de punten G, F en E*

E in den omtrek eens cirkels liggen. Het is klaarblijkelijk, dat de zijden BG, CF, DE, tegen over het gegeven punt A staande, elkander in den omtrek des gegevenen cirkels in H moeten doorsnijden; omdat, wegens de gelijkvormigheid der driehoeken, de hoeken B, C en D gelijk zijnde, en bovendien de beenen AB, AC, AD door hetzelfde punt A gaande, ingevolge de bekende eigenschap des cirkels, waar bij gelijke hoeken aan den omtrek op gelijke bogen kunnen staan, de beenen BH, CH, en DH elkander in een en hetzelfde punt H moeten snijden. Trekt men dan de koorde AH, dan staan op dezelfde lijn AH de driehoeken AHG, AHF, AHE, welke, wegens de onderstelde gelijkvormigheid, gelijke tophoeken G, F en E hebben; de tophoeken, dezer driehoeken liggen dan in den omtrek eens cirkels, welke door de punten A en H gaat.

AANMERKING. De 118 en 119 Voorstellen (zegt de Heer DE GELDER) komen, in den grond der zake, met de VI en VII Stellingen van het eerste Boek der vlakke plaatsen van APPOLLONIUS PERGAEUS overeen (zie APPOLL. PERGAEI, *Loc. Plan.*, *rest.* à R. SIMSON, *pag.* 7 *et seq.*) De eerste dezer stellingen is aldus voorgedragen. „ *Indien van een gegeven punt* „ *P*, *Fig.* 113. *twee regte lijnen PA en PB*, *eenen* „ *gegevenen hoek APB bevattende en tot elkander* „ *eene gegevene reden hebbende*, *getrokken wor-* „ *den*, *en het uiteinde A van ééne dezer regte* „ *lijnen AP in eene in stelling gegevene regte* „ *lijn QR gelegen is*, *dan ligt het uiteinde B* „ *van de tweede regte lijn PB in eene andere*, „ *insgelijks in stelling gegevene*, *regte lijn ST.*" En de andere: „ *Indien van een gegeven punt A* „ *Fig.* 105. *twee regte lijnen AB en AG eenen* „ *gegevenen hoek BAG bevattende*, *en tot elkander eene gegevene reden hebbende*; *getrokken*

„ *worden*, *en het uiteinde B van éène dezer lij-*
„ *nen AB in den omtrek van eenen in stelling*
„ *gegevenen cirkel ABCD gelegen is, dan ligt*
„ *ook het uiteinde G der andere lijn AG in*
„ *eenen anderen in stelling gegevenen cirkel*
„ *AHGFE.*"

N°. 120. Door

P. van Eeghen, Chz., en *C. J. van Brussel.*

Wanneer, men van de opgegevene tiendeelige breuk den teller in den noemer, het overschot wederom in den teller deelt, en zoo vervolgens, het overschot van elke deeling in derzelver deeler, dan verkrijgt men de quotienten:

1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, ... 1, 1, 12, 1, 1, 14, 1, 1, 16, *enz.*

welke (zie DE GELDER I *Cursus* §. 609.) de noemers der breuken zijn, waar uit de gedurige breuk is zamengesteld. (*)

N°. 121. Door

J. R. Schmidt.

Laat (*Fig.* 110.) BDHFB de gegeven cirkel,

(*) Ofschoon door deze Oplossing, in den strikten zin, aan den eisch van het vraagstuk voldaan is, zoo is men echter, door deze bewerking zelve, niet verzekerd, dat de merkwaardige wet, welke in noemers der breuken bestaat, bij eene verdere ontwikkeling der tiendeelige breuk, zal blijven stand houden; want hoe zal men verzekerd zijn, dat, *wanneer die wet in de duizend eerste termen is blijven bestaan, dezelve bij de volgende termen niet vervallen zal?* De Heer DE GELDER, door deze bedenking aangespoord, heeft getracht deze zwarigheid te overwinnen, en het geen hij in dezen gedaan heeft, zal, als te uitgebreid voor de gewone stukjes zijnde, in des *Genootschaps Verhandelingen* geplaatst worden. (*Wet. Comm.*)

B het vaste punt, en BRPQP'R'B de kromme zijn, zoo dat overal FE = HB is: laat AC gelijk en evenwijdig aan FE getrokken worden, dan is CE gelijk en evenwijdig AF, en ACEF een parallelogram, waaruit volgt ∠ DCE = ... ∠ AFB = ∠ ABF = ∠ DAB: laat nu uit C, met CD = AD, een cirkel beschreven worden, dan gaat deze door het punt E, en, daar ∠ DCE = ∠ DAB is, zal ook boog DE = boog DB zijn, eene eigenschap welke aantoont, *dat de kromme eene Epicycloïde is*, dat is eene kromme, beschreven door een vast punt E van den omtrek van eenen cirkel, welke op den omtrek van eenen anderen cirkel van gelijke straal voortrolt, en van alle welke soorten van kromme lijnen, de rectificatie en quadratuur in de verhandelingen van LA HIRE en anderen over de *Epicycloïde* zijn opgegeven (*a*). Wij zullen dezelve echter op eene meer gemakkelijke en minder omslachtige wijze trachten te bepalen.

Stellen wij dan ∠ EBG = ϕ, BE = y en AB = a, dan is ook ∠ ABF = ∠ AFB = ϕ en bijgevolg BF = 2 AB *Cos*. ABF = $2a$ *Cos*. ϕ dit afgetrokken van FE = $2a$, is het verschil BE = y = $2a$ — $2a$ *Cos*. ϕ, zoo dat $y = 2a (1 - Cos.\,\phi)$ de pool-vergelijking van onze kromme is.

Om nu den inhoud te berekenen, zoo laat BE' oneindig digt bij BE ondersteld worden, dan is het oneindig kleine driehoekje BE'E de differentiaal van den inhoud; nu is BE' = BE = y en

(*a*) De eigenschap der Epicycloïde, dat FE overal gelijk de middellijn BQ is, of het gene op het zelfde uitkomt, dat eenige lijn P'R, welke door het punt B gaat en de kromme in de punten P' en R snijdt, altoos gelijk zal zijn aan het dubbel van de middellijn BQ, vindt men ook opgeteekend, in de *Dictionnaire Mathématique* van M. OZANAM, *Bladz.* 104. (SCHMIDT.)

en $\angle$ EBE' $= \delta\varphi$, en wij hebben, zoo wij den inhoud van het ſtuk BREB $=$ I ſtellen.

$\delta I = \Delta EBE' = \frac{1}{2} BE.BE'.Sin.EBE' = \frac{1}{2}y^2 \times Sin.\delta\varphi$ dat is; omdat de ſinus van eenen zeer kleinen boog gelijk is aan den boog zelven,

$$\delta I = \tfrac{1}{2}y^2\delta\varphi. \ldots \ldots \ldots (a)$$

en deze is de differentaal van den inhoud van alle kromme lijnen, overgebragt tot hare poolvergelijking.

Nu is in ons geval $y = 2a(1 - Cos.\varphi)$ en dus $\delta I = \frac{1}{2}y^2\delta\varphi = 2a^2(1 - Cos.\varphi)^2\delta\varphi$, zoo dat $I = 2a^2 \int (1 - Cos.\varphi)^2\delta\varphi = \ldots$ $2a^2(\int\delta\varphi - 2\int Cos.\varphi\delta\varphi + \int Cos^2.\varphi\delta\varphi)$, het geen, volgens de bekende regels geïntegreerd zijnde, zal geven,

$I = 2a^2\varphi - 4a^2 Sin.\varphi + 2a^2(\frac{1}{2}Sin.\varphi Cos.\varphi + \frac{1}{2}\varphi)$

of.... $I = 3a^2\varphi - a^2 Sin.\varphi(4 - Cos.\varphi) \ldots (b)$

voor den inhoud van het ſtuk BERB, en welke integraal geene verbetering noodig heeft, omdat zij, in de onderſtelling van $\varphi = 0$ verdwijnt, in welk geval de inhoud uit den aard der zake noodzakelijk verdwijnen moet.

Stellen wij dan, om den inhoud BRPQ, dat is den halven inhoud van de kromme te vinden, $\varphi = 180^o = \pi$; dan is $Sin.\varphi = 0$, en dus $I = 3a^2\varphi$, dat is gelijk aan driemaal den inhoud van den gegevenen cirkel, *zoo dat de geheele begeerde inhoud van de kromme gelijk zal zijn aan zesmaal den inhoud van den gegevenen cirkel.*

Stellen wij $\varphi = 90^o = \frac{1}{2}\pi$, dan is $Sin.\varphi = 1$ en $Cos.\varphi = 0$, en wij hebben alzoo voor den inhoud van het ſtuk BDERB, $I = \frac{3}{2}a^2\pi - 4a^2$, dat is gelijk aan driemaal den inhoud van den halven gegevenen cirkel, min het vierkant op de middellijn.

Om de kromme te rectificeren, zoo laat ES loodregt op BE' onderſteld worden, dan is $SE' = \delta y$ en $SE = BE\ Sin.EBE' = y\delta\varphi$; om-

omdat $Sin.\delta\varphi = \delta\varphi$ is; ſtellende dan den boog BRE $= z$, en is EE′ $= \delta z$, en wij hebben, daar wij het oneindig kleine driehoekige SEE′ als regtlijnig kunnen beſchouwen, $E'E^2 = SE^2 + E'S^2$, dat is . . . . $\delta z^2 = y^2\delta\varphi^2 + \delta y^2$ . . . . . . (γ) en dit is nu wederom de formule, waar door alle kromme lijnen, op derzelver pool-vergelijking overgebragt, moeten gerectificeerd worden.

Daar nu, in onze kromme, $y = 2a(1 - Cos.\varphi)$ is, hebben wij $\delta y = 2a Sin.\varphi\,\delta\varphi$ en $\delta z^2 = 4a^2(1 - Cos.\varphi)^2\delta\varphi^2 + 4a^2 Sin^2.\varphi\,\delta\varphi^2 = 4a^2(2 - 2\,Cos.\varphi)\,\delta\varphi^2 = 16a^2\left[\frac{1 - Cos.\varphi}{2}\right]\delta\varphi^2$; zoo dat $\delta z = 4a\delta\varphi\sqrt{\frac{1 - Cos.\varphi}{2}} = 4a \times Sin.\frac{1}{2}\varphi\,\delta\varphi = 8a\,Sin.\frac{1}{2}\varphi \times \delta\frac{1}{2}\varphi$, waaruit door integreren gevonden wordt, $z = -8a\,Cos.\frac{1}{2}\varphi + Const.$ Daar nu, in de onderſtelling van $\varphi = 0$, ook $z = 0$ moet zijn, is de ſtandvastige $= 8a$, en wij hebben voor de verbeterde integraal, dat is voor de lengte van den boog BRE,

$z = 8a(1 - Cos.\frac{1}{2}\varphi) = 16a\,Sin^2.\frac{1}{4}\varphi$ . . . (δ)

Om hier door de lengte van den halven omtrek der kromme te berekenen, moeten wij $\varphi = 180°$ en dus $Cos.\frac{1}{2}\varphi = 0$ nemen, waar door wij vinden $z = 8a$, *zoo dat de halve kromme gelijk achtmaal de ſtraal en dus de geheele omtrek gelijk achtmaal de middellijn van den gegevenen cirkel is*, en wij zouden dezelfde uitkomst verkregen hebben, door oogenblikkelijk $\varphi = 360°$ en dus $Cos.\frac{1}{2}\varphi = -1$ te nemen; het welk alles volkomen overeenſtemt met het geen La Hire voor den inhoud en omtrek van deze ſoort van kromme lijnen in het algemeen gevonden heeft.

Onze kromme lijn heeft nog verſcheidene merkwaardige eigenſchappen, waar van wij niet kunnen nalaten de volgende kortelijk aan te wijzen.

Laat EG raaklijn zijn aan het punt E, dan is we-

wegens de oneindige kleinheid des boogs EE′, ∠ BEG = ∠ BE′G, maar SE′ = EE′ × Cos. SE′E; dus volgt hier uit,

$$Cos. \angle BEG = \frac{SE'}{EE'} = \frac{\partial y}{\partial z} \ldots \ldots (\epsilon)$$

welke formule wederom in alle gevallen gebruikt kan worden, om de raaklijn eener kromme door middel van hare pool-vergelijking te bepalen.

Daar wij reeds vonden $\partial y = 2a Sin. \varphi \partial \varphi$ en $\partial z = 4a Sin. \frac{1}{2}\varphi \partial \varphi$, zoo hebben wij $Cos. BEG = \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{Sin. \varphi}{2 Sin. \frac{1}{2}\varphi} = \frac{2 Sin. \frac{1}{2}\varphi \, Cos. \frac{1}{2}\varphi}{2 Sin. \frac{1}{2}\varphi} = Cos. \frac{1}{2}\varphi$, waar uit volgt ∠ BEG = $\frac{1}{2}\varphi$, dat is: *de hoek, onder welken de raaklijn de pool-ordinaat snijdt, is gelijk aan den halven hoek, welken die ordinaat met de as QG maakt*, en het is dus zeer gemakkelijk aan eenig gegeven punt der kromme eene raaklijn te trekken (*b*).

Door middel van deze eigenschap kan men ligtelijk de punten R en P bepalen, waarin de raaklijn loodregt op, of evenwijdig aan de as is; want ∠ BGE = 180° — $\frac{3}{2}\varphi$ zijnde, hebben wij, om de punten R te vinden, 180° — $\frac{3}{2}\varphi$ = 90°, dat is φ = 60°; de ∠ RBG = ∠ ABK′ is

(*b*) Wijl ∠ BEG = $\frac{1}{2}$∠ EBG = $\frac{1}{2}$∠ DAB en ∠ DEB = ∠ DBE = ∠ ADB is, hebben wij ∠ DEG = ∠ BEG + ∠ DEB = $\frac{1}{2}$∠ DAB + ∠ ADB = R; (omdat AD = DB is,) zoo dat ∠ DEG en dus ook ∠ DEO = R; het verlengde van de raaklijnen GE moet dus door het punt O gaan, en hierdoor verkrijgen wij eene andere constructie voor die raaklijn; wij trekken namelijk BE, en AO evenwijdig aan BE, zoodanig dat AO = 3 AB zij, trekkende dan OE, zal deze de raaklijn aan het punt E zijn: en dit stemt overeen met de constructie welke OZANAM in zijne *Dict. Mathem. Bladz.* 15, van dit vraagstuk geeft. (SCHMIDT.)

is dus 60° en bij gevolg BK′ = BR = AB en BL = $\frac{1}{2}$BR = $\frac{1}{2}$AB.

Voor de punten P, welker raaklijn evenwijdig aan de as is, moet ∠ BGE = 180° — $\frac{3}{2}\varphi$ = o zijn en dus φ = ∠ PBG = 120°, zoo dat ∠ PBH = 60° en dus BR′ = BK = AB, waar uit volgt: BP = 3 AB en BM = $\frac{3}{2}$AB, zoo dat AM = AH; de punten R en P worden dus gevonden door deze eenvoudige *Constructie*. Beschrijf uit B, met AB als straal, eenen cirkel, snijdende de kromme in R en R′ en den gegevenen cirkel in K en K′, dan zijn R en R′ de punten, waar in de raaklijn loodregt op de as QG is, en trekkende BK en BK′, tot dat zij de kromme in P en P′ snijden; zullen P en P′ de raakpunten zijn, waar in de raaklijn evenwijdig aan de as QG is. (*c*)

De

(*c*) De punten R en P kunnen ook op eene andere wijze worden bepaald; want voor de punten R moet BN, en voor de punten P moet NE een maximum zijn; nu is BN = y *Cos*.φ = $2a$ (*Cos*.φ — *Cos*².φ) en NE = y *Sin*.φ = $2a$ (*Sin*.φ — *Cos* φ *Sin*.φ), en wij hebben dus, door de differentialen gelijk o te stellen, voor de punten R, — *Sin*.$\varphi\,\delta\varphi$ + 2 *Cos*.φ × *Sin*.$\varphi\,\delta\varphi$ = o, waaruit *Cos*.φ = $\frac{1}{2}$ of φ = 60° even als boven; terwijl de andere waarde *Sin*.φ = o, welke wij uit de vergelijking vinden en welke met φ = 180° overeenstemt, het punt aantoont, waar in BN een minimum is, en waaruit volgt BQ = y = $2a$ (1 — *Cos*.φ) = $4a$, het geen ook van zelf blijkbaar is.

Voor de punten P hebben wij nu *Cos*.$\varphi\,\delta\varphi$ — *Cos*².$\varphi\,\delta\varphi$ + *Sin*² $\varphi\,\delta\varphi$ = o, waaruit wij vinden: *Cos*.φ = — $\frac{1}{2}$; dus φ = 120° even als boven, en eindelijk moeten wij nog aanmerken, dat de as QG zelve raaklijn van de kromme is in het dubbele punt B; want wij vonden in het algemeen ∠ BGE = 180° — $\frac{3}{2}\varphi$, stellende dus φ = o, wordt ∠ BGE = 180°, dat is de raaklijk valt op BG. (SCHMIDT.)

De punten P zijn ten uiterste merkwaardig; want zoekende voor deze punten den inhoud en de lengte der kromme, hebben wij, door in de vergelijkingen (β) en (δ), $\phi = 120^\circ$ te stellen,

1°. *Fig.* PERBP $= 2a^2\pi - \frac{9}{4}a^2\sqrt{3}$; maar BM $= \frac{3}{2}a$ en PM $= \frac{3}{2}a\sqrt{3}$ zijnde, is Δ PBM $= \frac{9}{4}a^2$, en bijgevolg *Fig.* PMBEP $= 2a^2\pi$; daar wij nu voor den geheelen inhoud der kromme gevonden hebben $6a^2\pi$, blijkt hier uit: *dat de lijn PP' den inhoud in twee deelen verdeelt, welke tot elkander in reden zijn als twee tot drie.*

2°. Door in (δ) te stellen $\phi = 120^\circ$, vinden wij BEP $= 8a(1 - \frac{1}{2}) = 4a$; maar voor den halven omtrek BPQ vonden wij boven $8a$, waar uit dan volgt: *dat de lijnen PP' en BQ den omtrek in vier gelijke stukken verdeelen;* en wij zouden nog vele merkwaardige zaken kunnen aantoonen, welke wij, om niet te langwijlig te zijn, met stilzwijgen moeten voorbij gaan.

1. Aanmerking. Wanneer wij die Voorstel, door middel van de regthoekige coördinaten, hadden aangevat, zou de oplossing op verre na zoo gemakkelijk niet zijn afgeloopen; want, laat EN loodregt op BG zijn, en BN $= x$ en EN $= u$ gesteld worden; dan is BE $= \sqrt{(x^2 + u^2)}$; trekkende nu HF; dan is BF : HB $=$ BN : BE, dat is $2a - \sqrt{(x^2 + u^2)} : 2a = x : \sqrt{(x^2 + u^2)}$, waar uit $2ax = 2a\sqrt{(x^2 + u^2)} - x^2 - u^2$, en deze vergelijking ten opzigte van u oplossende, verkrijgen wij, na herleiding:

$$u = \pm\sqrt{[-(x^2 + 2ax - 2a^2) \pm 2a\sqrt{(-2ax + a^2)}]}$$

voor de vergelijking van onze kromme, en wij zouden dus, om den inhoud te bepalen, hebben

$$I = \int u\partial x = \pm\int \partial x\sqrt{[-(x^2 + 2ax - a^2) \pm \ldots\ldots\ldots 2a\sqrt{(-2ax + a^2)}]}$$

welke bijzondere kunstgrepen vereischen zou, om tot eenen integrabelen vorm te worden gebragt; en het zou met de rectificatie, waar voor wij

zou-

zouden hebben $\breve{d}z = \sqrt{}(\breve{d}x^2 + \breve{d}y^2)$ niet gemakkelijker afloopen. Dit voorbeeld toont dus ten duidelijkste aan, hoe zeer het gebruik der pool-vergelijking in sommige gevallen te verkiezen zij boven die, welke de regthoekige coördinaten opleveren; want, offchoon de eerste, in ons geval, eene transcendentale vergelijking geeft, daar de laatste volkomen stelkundig is, is het echter zonneklaar gebleken, hoe zeer de integratie van de eerste boven die van de laatste te verkiezen is.

2. Aanmerking. De laatste vergelijking kan ons echter gemakkelijk de punten R (boven bepaald,) aantoonen; want in die punten moet natuurlijk het gedeelte $2a\sqrt{}(-2ax + a^2)$ dat onder het wortel-teeken staat gelijk o wezen, en wij hebben dus $-2ax + a^2 = 0$, waar uit $BL = x = \frac{1}{2}a$, het welk tot eene bevestiging dient van het gene wij boven uit de pool-vergelijking gevonden hebben.

3. Aanmerking. Wanneer FE niet gelijk, maar grooter of kleiner dan de middellijn HB is, en wij dan $FE = 2b$ stellen, dan hebben wij, in het algemeen, voor de pool-vergelijking $y = 2(b - a\ Cos.\ \phi)$; is nu b grooter dan a, dan verkrijgt de kromme den vorm, als in *Fig.* 111; maar is b kleiner dan a, dan heeft de kromme eenen knoop, (zie *Fig.* 112); en de inhoud wordt even gemakkelijk gevonden; want, even als boven werkende, vinden wij, door de formule (a) te integreren, voor den inhoud van eenig stuk BB'REB', $I = (a^2 + 2b^2)\ \phi - a\ Sin.\ \phi\ (4b - a\ Cos.\ \phi)$; stellende nu hier in $\phi = 180^\circ$ en dus $Sin.\ \phi = 0$, vindt men voor den inhoud van de geheele kromme $2(a^2 + 2b^2)\pi$, dat is: *de geheele inhoud is gelijk aan tweemalen den gegevenen cirkel, met viermaal den cirkel op de gegevene constante lijn, als middellijn beschreven;*

ven; en men moet hier vooral opmerken, dat, in *Fig.* 112, waar in de kromme eenen knoop heeft, *door den geheelen inhoud moet worden verstaan, de inhoud van Fig.* BRQR′B + *Fig.* BWB′WB, welk laatste stuk, dat is, de inhoud van den knoop hier moet verstaan worden dubbel te liggen. Stellen wij eindelijk in deze uitdrukkingen $b = a$, dan verkrijgen wij wederom de uitkomst, welke wij boven voor *Fig.* 110 vonden.

Maar, om de lengte der kromme te vinden, hebben wij, door in de formule (γ) onze vergelijking $y = 2\,(b - a\ Cos.\,\phi)$ over te brengen, $\partial z = 2\partial\phi\sqrt{(b^2 + a^2 - 2ab\ Cos.\,\phi)} =$
$$2\sqrt{(b^2 + a^2)}\,\partial\phi\left(1 - \frac{2ab}{a^2 + b^2}Cos.\,\phi\right)^{\frac{1}{2}},$$
welke formule zoo gemakkelijk niet te integreren is; maar waar van de integraal altoos kan worden uitgedrukt in eene reeks, voortgaande volgens de sinusen van de veelvouden van ϕ (*d*); is echter $a = b$, dan herleid zich deze formule wederom tot die, welke wij voor *Fig.* 110 hebben opgegeven.

4.

(*d*) De herleiding van $\int\partial\phi\,(1 \pm n\ Cos.\,\phi)^{\frac{1}{2}}$ in eene reeks van den vorm $A\phi + B\ Sin.\,\phi + C\ Sin.\,2\phi + D\ Sin.\,3\phi +$ enz. vindt men in de *Integraal-Rekening* van EULER I *Deel*, 6de *Hoofdst. probl* 33 en 34: in deze formulen worden A, B, C, *enz.* uitgedrukt door reeksen, welke volgens de magten van n opklimmen, en op dat deze reeksen zouden convergeren, moet n kleiner dan 1 zijn. Zulks heeft nu in ons geval altoos plaats, want, a grooter of kleiner dan b zijnde, is $a^2 - 2ab + b^2$ altoos een volkomen vierkant en dus positief, waaruit volgt; dat $a^2 + b^2$ altoos grooter is dan $2ab$, en dat dus $\frac{2ab}{a^2 + b^2}$ (het geen in ons geval de waarde van n is,) altoos eene eigenlijke breuk, dat is kleiner dan eenheid zal zijn. (SCHMIDT.)

4. AANMERKING. De hoek, welken de raaklijn met de pool-ordinaat maakt, kan hier weder gemakkelijk worden aangewezen; want dezen hoek $= \varphi'$ stellende, hebben wij in de vergelijking (s) gevonden $Cos.\varphi' = \frac{\partial y}{\partial z}$, en hier in de waarde van $y = z\,(b - a\,Cos.\varphi)$ gebragt, geeft

$$Cos.\varphi = \frac{2\,a\,Sin.\varphi\,\partial\varphi}{2\,\partial\varphi\,\sqrt{[(a^2 + b^2) - 2\,a\,b\,Cos.\varphi]}} =$$

$$\ldots\ldots\ldots \frac{a\,Sin.\varphi}{\sqrt{(a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,Cos.\varphi)}}$$

en hier uit vloeijen de twee volgende opmerkingswaardige bijzonderheden voort.

1°. Dat in *Fig.* 111, waar b grooter dan a is, de kromme in B geen keerpunt heeft, zoo als in *Fig.* 110; maar, dat, in dit geval, de raaklijn loodregt op de as QG staat; want voor dit punt is $\varphi = 0$ en dus $Cos.\varphi' = 0$ en $\varphi' = 90°$.

2°. Dat, in *Fig.* 112, waar b kleiner dan a is, de raaklijnen aan het punt B gevonden worden, door in den gegevenen cirkel de koorde $BT = 2\,b$, dat is $=$ FE te nemen; want, in dit dubbele punt, is $y = 0$, en dus door de vergelijking $y = 2\,(b - a\,Cos.\varphi)$, $Cos.\varphi = \frac{b}{a}$ en bijgevolg $Sin.\varphi = \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)} = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$,

$$Cos.\varphi' = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} = 1, \text{ dus } \varphi' = 0,$$

waar uit volgt, dat de raaklijn in dit punt op de ordinaat y valt, en offschoon y in dit punt $= 0$ is, moet zij echter aangemerkt worden, als in de rigting BO te liggen, omdat het punt B geboren wordt, wanneer de bewegende lijn in deze rigting ligt.

De punten R worden in *Fig.* 111 en 112 op dezelfde wijze bepaald, als in *Fig.* 110; want

 stel-

ftellende de differentiaal van BN $= y \, Cos.\varphi = 2 (b - a \, Cos.\varphi) \, Cos.\varphi$ gelijk aan nul, hebben wij $- 2b \, Sin.\varphi \delta\varphi + 4a \, Cos.\varphi \, Sin.\varphi \delta\varphi = 0$; waaruit $Cos.\varphi = \frac{b}{2a}$ en dus $y = 2(b - a \, Cos.\varphi) = 2 (b - \frac{1}{2} b) = b$, zoo dat wij flechts uit B, met b als ftraal, een' cirkel te befchrijven hebben, om door deszelfs fnijpunten met de kromme de punten R te vinden, waaruit dan eindelijk nog volgt: *dat wanneer b grooter dan 2 a is, de kromme geen buigpunten meer hebben zal*; want dan fnijdt deze laatfte cirkel de kromme niet meer, of wel, dan wordt $Cos.\varphi = \frac{b}{2a}$ grooter dan 1 en dus φ imaginair.

5. Aanmerking. Het verder onderzoek dezer lijnen zou te lang zijn, om in deze oplosfing plaats te kunnen vinden; wij laten zulks voor den lezer over, en eindigen met aan te merken: dat de krommen van *Fig.* 111 en 112 niet, zoo als die van *Fig.* 110, tot het geflagt der Epicycloïden behooren, maar tot dat der Conchoïden, welker directrix een cirkel is, en dat zij tot de Conchoïden zouden blijven behooren, wanneer het vaste punt B, in plaats van in den omtrek des gegevenen cirkels te liggen, binnen of buiten dien cirkel gelegen ware, welk algemeener geval alle de voorgaande in zich bevat.

N°. 122. Door

U. Huguenin.

Om de differentiale uitdrukking ....

$$\frac{(3 + z^2)\,\delta z}{(1 + z^2)\sqrt[4]{(1 + 6z^2 + z^4)}}$$ te integreren, ftelle men

$z =$

$z = a \times \frac{p+q}{p-q}$, (men kan ook $z = a \times \frac{p+q}{p-q}$ ftellen,) zoodanig dat p en q veranderlijk zijn en a eene nader te bepalen ftandvastige grootheid is, en dan heeft men:

$$1+z^2 = \frac{(a^2+1)p^2+2(a^2-1)pq+(a^2+1)q^2}{(p-q)^2}$$

$$3+z^2 = \frac{(a^2+3)p^2+2(a^2-3)pq+(a^2+3)q^2}{(p-q)^2}$$

$$1+6z^2+z^4 = [(a^4+6a^2+1)p^4+4(a^4-1)p^3q + 6(a^4-2a^2+1)p^2q^2+4(a^4-1)pq^3 \ldots \ldots\ldots + (a^4+6a^2+1)q^4] : [p-q]^4$$

$$\partial z = 2a \times \frac{p\partial q - q\partial p}{(p-q)^2}$$

Daar het ons nu vrijftaat, om aan a zulk eene waarde te geven, als wij tot ons oogmerk dienftig oordeelen, zoo laat ons $a = 1$ ftellen, wijl hier door de voorgaande uitdrukkingen eene zeer eenvoudige gedaante verkrijgen; want, door deze waarde aan te nemen, hebben wij:

$$z = \frac{p+q}{p-q};\ 1+z^2 = \frac{2(p^2+q^2)}{(p-q)^2};\ 3+z^2 = \frac{4(p^2-pq+q^2)}{(p-q)^2};$$

$$1+6z^2+z^4 = \frac{8(p^4+q^4)}{(p-q)^4};\ \partial z = \frac{2(p\partial q - q\partial p)}{(p-q)^2}$$

$$\frac{(3+z^2)\,\partial z}{(1+z^2)\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)}} = \frac{4(p^2-pq+q^2).(p\partial q-q\partial p)}{(p-q)^2(p^2+q^2)\sqrt[4]{[8(p^4+q^4)]}}$$

$$\ldots\ldots = \frac{4(p^3+q^3).(p\partial q-q\partial p)}{(p^4-q^4)\sqrt[4]{[8(p^4+q^4)]}}$$

Daar nu p en q van elkander onafhankelijk zijn, kan er tusfchen dezelve zulk eene betrekking worden aangenomen, dat de grootheid onder het wortel-teeken rationaal worde, en zulks heeft klaarblijkelijk plaats, wanneer wij $p^4+q^4=2$ ftellen: dit doende, verkrijgt men:

$$\frac{(3+z^2)\,\partial z}{(1+z^2)\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)}} = \frac{2(p^3+q^3).(p\partial q - q\partial p)}{p^4-q^4}$$

$$\ldots = \frac{2p^4\partial q + 2pq^3\partial q - 2qp^3\partial p - 2q^4\partial p}{p^4-q^4}$$

Maar uit $p^4+q^4=2$ vindt men: $p^3\partial p = -q^3\partial q$; $p^4 = 2-q^4$ en $q^4 = 2-p^4$; gevolgelijk is $2p^4\partial q = 2(2-q^4)\partial q$; $2pq^3\partial q = -2p^4\partial p$; $-2qp^3\partial p = 2q^4\partial p$; $-2q^4\partial p = -2(2-p^4)\partial p$ en wanneer men nu deze waardijen in de laatst voorgaande vergelijking overbrengt, dan verkrijgt men:

$$\frac{(3+z^2)\,\partial z}{(1+z^2)\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)}} = \frac{4\partial q}{p^4-q^4} - \frac{4\partial p}{p^4-q^4} = \frac{2\partial q}{1-q^4} - \frac{2\partial p}{1-p^4}$$

Nu vindt men, door de ontbinding der breuken: (*)

$$\frac{2}{1-q^4} = \frac{1}{1-q^2} + \frac{1}{1+q^2} = \frac{1}{2(1-q)} + \frac{1}{2(1+q)} + \frac{1}{1+q^2}$$

$$\frac{2}{1-p^4} = \frac{1}{1-p^2} + \frac{1}{1+p^2} = \frac{1}{2(1-p)} + \frac{1}{2(1+p)} + \frac{1}{1+p^2}$$

Derhalve wordt

$$\int \frac{(3+z^2)\,\partial z}{(1+z^2)\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)}} = \int\left[\frac{\partial q}{2(1-q)} + \frac{\partial q}{2(1+q)} + \frac{\partial q}{1+q^2}\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \int\left[\frac{\partial p}{2(1-p)} + \frac{\partial p}{2(1+p)} + \frac{\partial p}{1+p^2}\right]$$

$$= -\tfrac{1}{2}\,Log.(1-q) + \tfrac{1}{2}\,Log.(1+q) + B.Tang.q$$
$$+ \tfrac{1}{2}\,Log.(1-p) - \tfrac{1}{2}\,Log.(1+p) - B.Tang.p$$

$$= \tfrac{1}{2}\,Log.\frac{1+q}{1-q} + \tfrac{1}{2}\,Log.\frac{1-p}{1+p} + B.Tang.q - B.Tang.p$$

$$\ldots = \tfrac{1}{2}\,Log.\frac{(1+q).(1-p)}{(1-q).(1+p)} - B.Tang.\frac{p-q}{1+pq}.\ (\dagger)$$

Nu

(*) Zie de wijze, waarop breuken in andere kunnen ontleed worden, bij FAS, *Diff. en Integr. Rek.* en bij DE GELDER, II *Curs.* §. 567.

(†) Deze laatste herleiding verdient, daar zij, in de In-

Nu is uit $z = \frac{p+q}{p-q}$ en $\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)}$

$$= \frac{\sqrt[4]{8(p^4+q^4)}}{p-q} = \frac{2}{p-q},$$ vooreerst $p - q$

$$= \frac{2}{\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)}},$$ en verder $p + q = z\,(p-q)$

$$= \frac{2z}{\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)}},$$ waar uit dan volgt: . . .

$$p = \frac{z+1}{\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)}} \text{ en } q = \frac{z-1}{\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)}};$$

$$1 + q = \frac{\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)} + (z-1)}{\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)}};\ 1 - q$$

=

Integraal-Rekening van den Heer FAS, het eenig Hollandsch werk, dat tot nog toe over dit onderwerp bestaat, niet voorkomt, eenige opheldering. De uitdrukking: *B Tang.x*; of, zoo als anderen het schrijven, *Arc. Tang.x*, wil zeggen: *de boog wiens tangens een getal is gelijk aan x*: de boog zelf wordt dus door geene letter of eenig getal uitgedrukt; maar door de geheele uitdrukking *B. Tang.x*. Stellen wij nu *B. Tang.x* $= r$ en *B. Tang.y* $= s$; dan is *Tang.r* $= x$ en *Tang.s* $= y$: nu is (zie IV *Stell.* VIII *B. Reg.*)

$$Tang.(r+s) = \frac{Tang.r + Tang.s}{1 - Tang.r\ Tang.s} = \frac{x+y}{1-xy};$$

de boog wiens Tangens $= \frac{x+y}{1-xy}$ is, is derhalve gelijk $r + s =$ *B. Tang.x* + *B. Tang.y*. Op dezelfde wijze vindt men: dat *B. Tang.q* — *B. Tang.p* =

$$B.\ Tang.\frac{q-p}{1+pq} = -\ B.\ Tang\ \frac{p-q}{1+pq}$$ zal zijn.

(DE GELDER.)

$$= \frac{\sqrt[4]{(1 + 6z^2 + z^4)} - (z - 1)}{\sqrt[4]{(1 + 6z^2 + z^4)}}; \; 1 + p \ldots$$

$$= \frac{\sqrt[4]{(1 + 6z^2 + z^4)} + (z + 1)}{\sqrt[4]{(1 + 6z^2 + z^4)}}; \; 1 - p \ldots$$

$$= \frac{\sqrt[4]{(1 + 6z^2 + z^4)} - (z + 1)}{\sqrt[4]{(1 + 6z^2 + z^4)}}; \; pq \ldots$$

$$= \frac{z^2 - 1}{\sqrt{(1 + 6z^2 + z^4)}}; \; 1 + pq \ldots\ldots$$

$$= \frac{\sqrt{(1 + 6z^2 + z^4)} + (z^2 - 1)}{\sqrt{(1 + 6z^2 + z^4)}};$$ brengt men deze alle in de gevondene integraal over; dan verkrijgt men voor de herleide integraal der voorgestelde functie deze uitdrukking:

$$\tfrac{1}{2} Log. \frac{[\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)}+(z-1)][\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)}-(z+1)]}{[\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)}-(z-1)][\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)}+(z+1)]}$$

$$\ldots - B. Tang. \frac{2\sqrt[4]{(1 + 6z^2 + z^4)}}{\sqrt{(1 + 6z^2 + z^4)} + z^2 - 1}$$

waar bij nog eene standvastige grootheid moet gevoegd worden, welke van de voorwaarden van het voorstel, waar uit de gegevene differentiale uitdrukking gesproten is, afhankelijk zal zijn.

De Heer EULER heeft, (zie *Nova Acta Petrop. Tom.* IX *pag.* 127) langs eenen anderen weg, eene andere waarde voor de Integraal gevonden, welke, door eene rekenfout in de substitutie begaan te hebben, van de onze afwijkt.

N°. 123. Door
U. HUGUENIN.

Ten einde $\dfrac{(1 - z^2)^2\, \delta z}{(1 + z^2)\sqrt[4]{(1 + 6z^2 + z^4)^3}}$ te integreren, zullen wij, gelijk in het voorgaande werkstuk, $z = a \times \dfrac{p - q}{p + q}$ stellen, zijnde p en q veranderlijke en a eene standvastige grootheid, die nader bepaald moet worden. Hier door heeft men dan: $1 + z^2 = \dfrac{(p+q)^2 + a^2(p-q)^2}{(p+q)^2}$; $(1-z^2)^2 = \left[\dfrac{(p+q)^2 - a^2(p-q)^2}{(p+q)^2}\right]$; $1 + 6z^2 + z^4 = 1 + \dfrac{6a^2(p-q)^2}{(p+q)^2} + \dfrac{a^4(p-q)^4}{(p+q)^4} = [(a^4 + 6a^2 + 1)\, p^4 - 4(a^4 - 1)\, p^3 q + 6(a^4 - 2a^2 + 1)\, p^2 q^2 - 4(a^4 - 1)\, p q^3 + (a^4 + 6a^2 + 1)\, q^4] : [p + q]^4$, en eindelijk $\delta z = \dfrac{2a(q\delta p - p\delta q)}{(p + q)^2}$.

Het is zigtbaar, dat de wortel-grootheid, door $a = \pm 1$ te stellen, de eenvoudigste gedaante zal verkrijgen, omdat de drie middelste termen van dezelve, door elk eene van deze twee waarden, nul worden: dan, daar het bij de overige waardijen om het even is, of men a positief of negatief neme, zullen wij $a = +1$ stellen, en dan heeft men;

$$1 + z^2 = \frac{2(p^2 + q^2)}{(p + q)^2};\ (1 - z^2)^2 = \frac{16p^2q^2}{(p+q)^4}$$

$$\sqrt[4]{(1 + 6z^2 + z^4)} = \frac{\sqrt[4]{[8(p^4 + q^4)]}}{p + q};\ \delta z = \frac{2(q\delta p - p\delta q)}{(p^2+q^2)^2}$$

$$\frac{(1 - z^2)^2\, \delta z}{(1+z^2)\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)}} = \frac{16(p-q)(q\delta p - p\delta q)p^2q^2}{(p^4-q^4)\sqrt[4]{[8^3 \times (p^4+q^4)^3]}}$$

 Om

Om nu deze uitdrukking rationaal te maken en tevens eene betrekking tusschen p en q vast te stellen, zullen wij wederom $p^4 + q^4 = 2$ aannemen, waar door $(p^4 + q^4)^3 = 8$, en ....

$\sqrt[4]{[8^3(p^4 + q^4)]} = 8$ wordt en

$$\frac{(1 - z^2)^2 \partial z}{(1+z^2)\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)^3}} = \frac{2p^3q^2\partial p - 2p^4q^2\partial q - 2p^2q^4\partial p + 2p^3q^3\partial q}{p^4 - q^4}$$

Maar uit $p^4 + q^4 = 2$ volgt: $p^4 = 2 - q^4$; $q^4 = 2 - p^4$ en $p^3\partial p = - q^3\partial q$, en men verkrijgt door het overbrengen van deze waardijen:

$$\frac{(1 - z^2)^2 \partial z}{(1+z^2)\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)^3}} = - \frac{2q^2\partial q}{1-q^4} + \frac{2p^2\partial p}{1-p^4}$$

De gebrokens in het tweede lid dezer vergelijking voorkomende, worden aldus ontleed:

$$\frac{2q^2}{1-q^4} = \frac{1}{2(1-q)} + \frac{1}{2(1+q)} - \frac{1}{1+q^2}$$

derhalve is

$$\int \frac{2q^2\partial q}{1-q^4} = -\tfrac{1}{2}Log.(1-q) + \tfrac{1}{2}Log.(1+q) - B.Tang.q$$

of wel:

$$\int \frac{2q^2\partial q}{1-q^4} = \tfrac{1}{2}Log.\frac{1+q}{1-q} - B.Tang.q$$

$$\int \frac{2p^2\partial p}{1-p^4} = \tfrac{1}{2}Log.\frac{1+p}{1-p} - B.Tang.p$$

waar uit dan eindelijk volgt: (zie noot *Bladz.* 354.)

$$\int \frac{(1 - z^2)^2 \partial z}{(1+z^2)\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)^3}} = \tfrac{1}{2}Log.\frac{(1+p)(1-q)}{(1-p)(1+q)} - B.Tang.\frac{p-q}{1+pq}$$

Om nu p en q in functien van z over te brengen, bepale men derzelver waarde met behulp van de vergelijkingen $\sqrt[4]{(1 + 6z^2 + z^4)} = \frac{2}{p+q}$

en

en $z = \frac{p-q}{p+q}$, het geen, op dezelfde wijze, als in het voorgaande werkstuk, geschieden kan, en dan wordt de integraal der gegevene functie . . . . .

$$+\tfrac{1}{8} Log. \frac{[\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)}+(z+1)][\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)}+(z-1)]}{[\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)}-(z+1)][\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)}-(z-1)]}$$

$$-B.Tang. \frac{2z\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)}}{\sqrt{(1+6z^2+z^4)}-(z^2-1)} + Const.$$

welke integraal met die van den Heer EULER (zie *Nova Acta. Petrop. Tom.* IX. *pag.* 118.) overeenstemt.

Uit deze integraal kan men nu, door in plaats van z te stellen $z\sqrt{-1}$, dadelijk de integraal van

$$\frac{(1+z^2)^2 \,\partial z}{(1-z^2)\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)^3}}$$

afleiden; dan, vermits men door deze substitutie op onbestaanbare (*imaginaire*) Logarithmen en Tangenten vervalt, moeten deze, met behulp der twee volgende formulen,

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} \times Log. \frac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}} = B.Tang. \frac{b}{a}. \quad (1)$$

$$Log. \frac{a-c}{a+c} = 2\sqrt{-1} \times B.Tang. \frac{c\sqrt{-1}}{a}. \quad (2)$$

tot bestaanbare formen worden overgebragt. (*) Men

(*) Daar deze twee formulen bij onze Hollandsche Schrijvers over de beginselen niet voorkomen, zal het nodig zijn, dezelve kortelijk te betoogen. Men weet, (zie II *Curs. Pag.* 595) dat

$$Log. \frac{1+z}{1-z} = 2(z+\tfrac{1}{3}z^3+\tfrac{1}{5}z^5+\tfrac{1}{7}z^7+\tfrac{1}{9}z^9+\tfrac{1}{11}z^{11}\ enz.)$$

Men ſtelle dan in onze verkregene integraal, $y\sqrt{-1}$ in plaats van z, dan verkrijgt men, omdat $\partial z = \partial y\sqrt{-1}$ wordt,

. . . . $\int$

Of ſtelt men nu $z = \frac{y}{a}$ dan wordt,

$$\text{Log.}\frac{a+y}{a-y} = 2\left[\frac{y}{a} + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{a}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y}{a}\right)^5 \dots + \frac{1}{7}\left(\frac{y}{a}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{y}{a}\right)^9 + \text{enz.}\right]$$

In deze laatſte $y = b\sqrt{-1}$ ſtellende, dan is $y^2 = -b^2$; $y^3 = -b^3\sqrt{-1}$; $y^4 = +b^4$; $y^5 = +b^5\sqrt{-1}$; $y^6 = -b^6$; $y^7 = -b^7\sqrt{-1}$ enz. en wij hebben derhalve:

$$\text{Log.}\left(\frac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}}\right) = 2\sqrt{-1}\times\left[\frac{b}{a} - \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 \dots + \frac{1}{5}\left(\frac{b}{a}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{b}{a}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{b}{a}\right)^9 - \right]$$

maar (zie II C. §. 620.) de reeks $\frac{b}{a} - \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 \dots + \frac{1}{5}\left(\frac{b}{a}\right)^5 - \text{enz.}$ is $= B.\,Tang.\,\frac{b}{a}$; derhalve wordt de laatſte vergelijking, na dezelve door $2\sqrt{-1}$ gedeeld te hebben,

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\times\text{Log.}\left(\frac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}}\right) = B.\,Tang.\,\frac{b}{a}$$

Stelt men in deze laatſte $b\sqrt{-1} = -c$, dan is $b = \frac{-c}{\sqrt{-1}} = \frac{-c\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}} = \frac{-c\sqrt{-1}}{-1}$. $= +c\sqrt{-1}$, en wij hebben, na alles met $2\sqrt{-1}$ vermenigvuldigd te hebben,

$$\text{Log.}\frac{a-c}{a+c} = 2\sqrt{-1}\times B.\,Tang.\,\frac{c\sqrt{-1}}{a}$$

waaruit de gronden, waarop de aangehaalde formules ſteunen, blijkbaar zijn. (DE GELDER.)

$$\int\frac{(1+z^2)^2\partial z\sqrt{-1}}{(1-z^2)\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)^3}}=\sqrt{-1}.\int\frac{(1+z^2)^2\partial z}{(1-z^2)\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}}=$$

$$\tfrac{1}{4}Log.\frac{[\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}+(1+z\sqrt{-1})][\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}-(1-z\sqrt{-1})]}{[\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}-(1+z\sqrt{-1})][\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}+(1-z\sqrt{-1})]}$$

$$\ldots-B.Tang.\frac{2\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}\times z\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-6z^2+z^4)}+z^2+1}$$

of wel, alles door $\sqrt{-1}$ dêelende:

$$\int\frac{(1+z^2)^2\partial z}{(1+z^2)\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)^3}}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}Log.\frac{\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}+1+z\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}+1-z\sqrt{-1}}$$

$$\ldots+\frac{1}{2\sqrt{-1}}Log.\frac{\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}-1+z\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}-1-z\sqrt{-1}}\ldots$$

$$+\sqrt{-1}\times B.Tang.\frac{\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}\times 2z\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-6z^2+z^4)}+z^2+1}$$

Men stelle nu, in de grondformule (1), $a=\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}+1$ en $b=z$, dan wordt het eerste gedeelte der bovenstaande integraal:

$$B.Tang.\frac{z}{\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}+1}\ldots(p)$$

en het tweede gedeelte van dezelve:

$$B.Tang.\frac{z}{\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}-1}\ldots(q)$$

en stelt men in de grondformule (2) ......
$2z\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}=a$ en $\sqrt{(1-6z^2+z^4)}+z+1=a$, dan wordt het derde gedeelte der gevondene integraal:

$$\tfrac{1}{2}Log.\frac{\sqrt{(1-6z^2+z^4)}-2z\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}+z^2+1}{\sqrt{(1-6z^2+z^4)}+2z\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}+z^2+1}$$

of

of eenvoudiger,

$$\tfrac{1}{2} Log. \frac{[\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}-z]^2+1}{[\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}+z]^2+1}$$

en telt men nu de bogen, in de uitdrukkingen (p) en (q) voorkomende, volgens de noot op *Bladz.* 354. bij elkander, vindt men voor de fom van dezelve,

$$-B.Tang.\frac{2z\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}}{1+z^2-\sqrt{(1-6z^2+z^4)}}$$

en wij hebben dan eindelijk

$$\int\frac{(1+z^2)\partial z}{(1-z^2)\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)^3}}=\tfrac{1}{2}Log.\frac{[\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}-z]^2+1}{[\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}+z]^2+1}$$

$$-B.Tang.\frac{2z\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}}{1+z^2-\sqrt{(1-6z^2+z^4)}}+Conft.$$

AANMERKING. Wij hadden deze differentiaal uitdrukking ook, zonder hulp van de eerfte integraal, regtftreeks kunnen integreren, door $z = a \times \frac{p-q}{p+q}$ aan te nemen; doch als dan zou men, om aan de uitdrukkingen de eenvoudigfte gedaante te geven, $a = \sqrt{-1}$ hebben moeten ftellen, waar door men dan imaginaire integralen zou verkregen hebben, welke, met behulp der formulen (1) en (2), tot beftaanbare vormen kunnen overgebragt worden.

De Heer EULER acht deze laatfte integraal deswegens merkwaardig, wijl het hem toefchijnt, onmogelijk te zijn, dezelve, zonder hulp der imaginaire grootheden, te integreren.

N°. 124.

N°. 124. Door

U. Huguenin.

Om in de voorgestelde differentiaal ...... $\frac{\delta x}{(1+x)\sqrt[4]{(2x^2-1)}}$ de grootheid onder het wortel-teeken tot eene functie van de vierde magt te doen opklimmen en tevens rationaal te maken, is het noodig x door eene algemeene functie van den tweeden graad uit te drukken: wij zullen daarom $x = \frac{a(p^2+bpq+q^2)}{(p+q)^2}$ stellen, zoodanig dat p en q veranderlijke en a en b nader te bepalen standvastige grootheden zijn. Hier door vindt men:

$$2x^2-1 = [(2a^2-1)p^4 + 4(a^2b-1)p^3q \ldots$$
$$\ldots + (2a^2b^2+4a^2-6)p^2q^2 + 4(a^2b-1)pq^3$$
$$\ldots\ldots\ldots + (2a^2-1)q^4] : (p+q)^4$$
$$1+x = \frac{(a+1)p^2+(ab+2)pq+(a+1)q^2}{(p+q)^2}$$

Wanneer men in de eerste dezer uitdrukkingen $a = \pm 1$ en $b = +1$ stelt, dan verdwijnen de drie middelste termen van den teller en $2x^2-1$ wordt $\frac{p^4+q^4}{(p+q)^4}$; om echter de tweede uitdrukking tevens tot den eenvoudigsten vorm te brengen, is het noodig, dat men $a = -1$ en $b = +1$ stelle; dit doende heeft men:

$$x = -\frac{p^2+pq+q^2}{(p+q)^2};\ (1+x) = \frac{pq}{(p+q)^2};\ 2x^2-1 = \frac{p^4+q^4}{(p+q)^4}$$

$$\delta x = \frac{q^2\delta p - pq\delta p + p^2\delta q - pq\delta q}{(p+q)^3}$$

$$\frac{\delta x}{(1+x)\sqrt[4]{(2x^2-1)}} = \frac{q^2\delta p - pq\delta p + p^2\delta q - pq\delta q}{pq\sqrt[4]{(p^4+q^4)}}$$

Daar

Daar wij nu de vrijheid hebben, om tusschen p en q eenige betrekking aan te nemen, zoo kunnen wij de laatste differentiaal uitdrukking dadelijk rationaal maken, indien wij aannemen, dat $p^4 + q_4 = 1$ zij; dit stellende, wordt

$$\frac{\partial x}{(1+x)\sqrt[4]{(2x^2-1)}} = \frac{q\partial p}{p} - \partial p + \frac{p\partial q}{q} - \partial q.$$

voorts volgt uit $p^4 + q^4 = 1$ (door differentieren,) $p^3\partial p + q^3\partial q = 0$, of $\partial p = -\frac{q^3\partial q}{p^3}$

en $\partial q = -\frac{p^3\partial p}{q^3}$; derhalve is $\frac{\partial p}{p} = -\frac{q^3\partial q}{p^4}$,

$= -\frac{q^3\partial q}{1-q^4}$, en even zoo $\frac{\partial q}{q} = -\frac{p^3\partial p}{1-p^4}$.

Deze waarden in de laatste differentiaal vergelijking overgebragt hebbende, heeft men:

$$\frac{\partial x}{(1+x)\sqrt[4]{(2x^2-1)}} = -\frac{q^4\partial q}{1-q^4} - \partial q - \frac{p^4\partial p}{1-p^4} - \partial p = -\frac{\partial q}{1-q^4} - \frac{\partial p}{1-p}$$

Maar nu is $\frac{\partial q}{1-q^4} = \frac{1}{4}\,\frac{\partial q}{1-q} + \frac{1}{4}\,\frac{\partial q}{1+q}$ $+ \frac{1}{2}\,\frac{\partial q}{1+q^2}$; derhalve heeft men:

$$\int \frac{\partial q}{1-q^4} = \frac{1}{4}\, Log.\frac{1+q}{1-q} + \frac{1}{2}\, B.Tang.q$$

$$\int \frac{\partial p}{1-p^4} = \frac{1}{4}\, Log.\frac{1+p}{1-p} + \frac{1}{2}\, B.Tang.p$$

en diens volgens wordt

$$\frac{\partial x}{(1+x)\sqrt[4]{(2x^2-1)}} = -\left[\tfrac{1}{4}Log.\frac{1+q}{1-q} + \tfrac{1}{4}Log.\frac{1+p}{1-p} + \tfrac{1}{2}B.Tang.q + \tfrac{1}{2}B.Tang.p\right]$$

eindelijk wordt, door de logarithmen tot één te brengen, de geheele integraal gelijk aan

$$-\left[\tfrac{1}{4}Log.\frac{(1+q)(1+p)}{(1-q)(1-p)} + \tfrac{1}{2}B.Tang.\frac{p+q}{1-pq}\right]$$

Nu

(1) Nu is $2x^2 - 1 = \frac{p^4 + q^4}{(p+q)^4} = \frac{1}{(p+q)^4}$; dus $\sqrt[4]{(2x^2 - 1)} = \frac{1}{p+q}$ en $p + q = \frac{1}{\sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}$; voorts $1 + x = \frac{pq}{(p+q)^2} = pq\sqrt{(2x^2 - 1)}$, of $pq = \frac{1 + x}{\sqrt{(2x^2 - 1)}}$; hier uit $\frac{p+q}{1 - pq} = \frac{\sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}{\sqrt{(2x^2 - 1)} - (x + 1)}$, wijders $(1 + q)(1 + p) = 1 + (p + q) + pq = \frac{1 + x + \sqrt{(2x^2 - 1)} + \sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}{\sqrt{(2x^2 - 1)}}$ en $(1 - p)(1 - q) = 1 - (p + q) + pq = \frac{1 + x + \sqrt{(2x^2 - 1)} - \sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}{\sqrt{(2x^2 - 1)}}$.

De integraal der gegevene differentiaal functie wordt dan, na het overbrengen van alle deze waarden:

$$-\tfrac{1}{4} Log.\frac{1 + x + \sqrt{(2x^2 - 1)} + \sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}{1 + x + \sqrt{(2x^2 - 1)} - \sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}$$

$$\ldots\ldots - \tfrac{1}{2} B.Tang.\frac{\sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}{\sqrt{(2x^2 - 1)} - (x + 1)}$$

of wel, door de teekens om te keeren. (*)

$\tfrac{1}{4} Log.$

(*) Het omkeeren der teekens van deze integraal steunt hier op, dat $Log.\frac{t + u}{t - u} = - Log.\frac{t - u}{t + u}$; [illegible] wint daar

$Log.$

$$\tfrac{1}{4} Log. \frac{1 + x + \sqrt{(2x^2 - 1)} - \sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}{1 + x + \sqrt{(2x^2 - 1)} + \sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}$$

$$\ldots\ldots + \tfrac{1}{2} B. Tang. \frac{\sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}{(1+x) - \sqrt{(2x^2 - 1)}}$$

zoo als de Heer EULER (zie *Nov. Act. Petrop. Tom.* IX *pag.* 98 *et seq.*) langs eenen geheel anderen weg gevonden heeft.

AANMERKING. Uit de gevondene integraal laat de integraal van $\frac{-\partial x}{(1 - x)\sqrt[4]{(2x^2 - 1)}} = \frac{\partial x}{(x - 1)\sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}$ zich dadelijk afleiden; door in de gevondene integraal $-x$ voor x en $-\partial x$ voor ∂x te stellen, waardoor $\frac{\partial x}{1 + x} = -\frac{\partial x}{1 - x} = \frac{\partial x}{x - 1}$ wordt en men verkrijgt als dan:

$$Log. \frac{t+u}{t-u} = 2 \times \left[\frac{u}{t} + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{u^3}{t^3} + \tfrac{1}{5} \cdot \frac{u^5}{t^5} + enz.\right]$$

is; wordt, door u negatief te nemen,

$$Log. \frac{t-u}{t+u} = -2 \times \left[\frac{u}{t} + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{u^3}{t^3} + \tfrac{1}{5} \cdot \frac{u^5}{t^5} + enz.\right]$$

waar uit het gestelde blijkbaar is; stellende nu $t = 1 + x + \sqrt{(2x^2 - 1)}$ en $u = \sqrt[4]{(2x^2 - 1)}$, ziet men, hoe in het logarithmische deel het teeken $-$ in $+$ kan veranderd worden. Voor den cirkelboog is de tangens, door de teekens van den teller om te keeren, van positief tot negatief overgegaan; daar nu de tangens van eenen negativen boog negatief wordt, en omgekeerd, wordt hier door de grond van het omkeeren van het teeken in den cirkelboog klaarblijkelijk. (DE GELDER.)

$$\int \frac{\partial x}{(x-1)\sqrt[4]{(2x^2-1)}} = \tfrac{1}{4} Log. \frac{1-x+\sqrt{(2x^2-1)}-\sqrt[4]{(2x^2-1)}}{1-x+\sqrt{(2x^2-1)}+\sqrt[4]{(2x^2-1)}}$$

$$\ldots\ldots + \tfrac{1}{2} B.Tang. \frac{\sqrt{(2x^2-1)}}{1-x-\sqrt{(2x^2-1)}}.$$

No. 125. Door

U. HUGUENIN.

Om $\frac{\partial z}{(3-z^2)\sqrt[3]{(1+z^2)}}$ te integreren, zullen wij $z = a \times \frac{p-q}{p+q}$ stellen en daar bij aannemen, dat a eene nader te bepalen standvastige grootheid zij. Hier door wordt dan:

$$1+z^2 = \frac{(a^2+1)p^2 - 2(a^2-1)pq + (a^2+1)q^2}{(p+q)^2} =$$

$$\frac{(a^2+1)p^3 - (a^2-3)p^2q - (a^2-3)pq^2 + (a^2+1)q^3}{(p+q)^3}$$

$$3 - z^2 = \frac{(3-a^2)p^2 + 2(a^2+3)pq + (3-a^2)q^2}{(p+q)^2},$$

$$\partial z = 2a \times \frac{q\partial p - p\partial q}{(p+q)^2}.$$

De twee eerste dezer uitdrukkingen verkrijgen den eenvoudigsten vorm, wanneer men $a^2 = 3$ of $a = \sqrt{3}$ stelt; want hier door heeft men:

$$z = \frac{(p-q)\sqrt{3}}{(p+q)};\ 1+z^2 = \frac{4(p^3+q^3)}{(p+q)^3};\ 3-z^2 = \frac{12pq}{(p+q)^2}$$

$$\partial z = \frac{(q\partial p - p\partial q)2\sqrt{3}}{(p+q)^2}$$

en brengt men deze waarden in de gegevene differentiaal over, dan wordt:

$$\frac{\partial z}{(3-z^2)\sqrt[3]{(1+z^2)}} = \frac{2\sqrt{3}}{12\sqrt[3]{4}} \times \frac{(p+q)(q\partial p - p\partial q)}{pq\sqrt[3]{(p^3+q^3)}} =$$

$$\ldots \frac{(pq+q^2)\delta p-(p^2+pq)\delta q}{pq\sqrt[3]{(p^3+q^3)}} \times \frac{3\sqrt[3]{2}}{4\sqrt{3}}$$

ſtelt men nu, ten einde de uitdrukking rationaal te maken, $p^3+q^3=1$, zoo is $p^3=1-q^3$; $q^3=1-p^3$, $p^2\delta p+q^2\delta q=0$; $\delta p=-\frac{q^2\delta q}{p^2}$ en $\delta q=-\frac{p^2\delta p}{q^2}$, en men heeft derhalve:

$$\frac{\delta z}{(3-z^2)\sqrt[3]{(1+z^2)}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{4\sqrt{3}}\left[\delta p+\frac{q\delta p}{p}-\frac{p\delta q}{q}-\delta q\right]=$$

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{4\sqrt{3}}\left[\delta p-\frac{q^3\delta q}{p^3}+\frac{p^3\delta p}{q^3}-\delta q\right]=\frac{\sqrt[3]{2}}{4\sqrt{3}}\left[\frac{\delta p}{1-p^3}-\frac{\delta q}{1-q^3}\right]$$

Maar door het verdeelen der breuken vindt men:

$$\frac{\delta p}{1-p^3}=\frac{1}{3}\left[\frac{\delta p}{1-p}+\frac{p\delta p+2\delta p}{p^2+p+1}\right]=\ldots$$

$$\ldots\frac{1}{3}\left[\frac{\delta p}{1-p}+\frac{1}{2}\times\frac{2p\delta p+\delta p}{p^2+p+1}+\frac{3}{2}\times\frac{\delta p}{p^2+p+1}\right]$$

en het gebroken $\frac{\delta q}{1-q^3}$ wordt op dezelfde wijze in breuken, aan dezen gelijkvormig zijnde, verdeeld. Door integreren vindt men nu:

$$\int\frac{\delta p}{1-p^3}=\frac{1}{3}\left[-Log.(1-p)+\frac{1}{2}Log.(1+p+p^2)+\sqrt{3}\times B.Tang.\frac{2p+1}{\sqrt{3}}\right]$$

$$\ldots=\frac{1}{3}Log.\frac{\sqrt{(1+p+p^2)}}{1-p}+\frac{1}{\sqrt{3}}\times B.Tang.\frac{2p+1}{\sqrt{3}}$$

Doch deze uitdrukking kan vereenvoudigd worden; want $\frac{1}{3}\,Log.\frac{\sqrt{(1+p+p^2)}}{1-p}=\ldots$

$$\frac{1}{3}Log.\frac{\sqrt{(1+p+p^2)(1-p)}}{(1-p)\sqrt{(1-p)}}=\frac{1}{3}Log.\frac{(1-p^3)^{\frac{1}{2}}}{(1-p)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$\frac{1}{2}Log.\frac{\sqrt[3]{(1-p^3)}}{1-p}=\frac{1}{2}Log.\frac{q}{1-p}.$$ Derhalve is

$\int$

$$\int \frac{\partial p}{1-p^3} = \tfrac{1}{2} Log.\frac{q}{1-p} + \frac{1}{\sqrt{3}}.B.Tang.\frac{2p+1}{\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{\partial q}{1-q^3} = \tfrac{1}{2} Log.\frac{p}{1-p} + \frac{1}{\sqrt{3}}.B.Tang.\frac{2q+1}{\sqrt{3}}$$

en nu is:

$$\int \frac{\partial z}{(3-z^2)\sqrt[3]{(1+z^2)}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{8\sqrt{3}} \times \left[Log.\frac{q}{1-p} - Log.\frac{p}{1-q}\right]$$

$$+ \frac{\sqrt[3]{2}}{12} \times \left[B.Tang.\frac{2p+1}{\sqrt{3}} - B.Tang.\frac{2q+1}{\sqrt{3}}\right] =$$

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{8\sqrt{3}} Log\frac{q(1-q)}{p(1-p)} + \frac{\sqrt[3]{2}}{12}\left[B.Tang.\frac{2p+1}{\sqrt{3}} - B.Tang.\frac{2q+1}{\sqrt{3}}\right]$$

Om nu p en q in functien van z te verkrijgen, merke men aan: dat $z = \frac{p-q}{p+q}\sqrt{3}$ en . . . . .

$\sqrt[3]{(1+z^2)} = \frac{\sqrt[3]{4}}{p+q}$ is, en hier uit volgt dan:

$$p+q = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{(1+z^2)}};\ p-q = \frac{(p+q)z}{\sqrt{3}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}} \times \frac{z}{\sqrt[3]{(1+z^2)}};\ p = \frac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}+z}{\sqrt[3]{(1+z^2)}};\ q =$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}-z}{\sqrt[3]{(1+z^2)}};\ 1-p = \frac{[\sqrt[3]{2(1+z^2)}-1]\sqrt{3}-z}{2\sqrt{3}\times\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{(1+z^2)}}$$

en $1-q = \frac{[\sqrt[3]{2(1+z^2)}-1]\sqrt{3}+z}{2\sqrt{3}\times\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{(1+z^2)}}$, en

dan wordt eindelijk:

$$\frac{q(1-q)}{p(1-p)} = \frac{[(\sqrt[3]{2(1+z^2)}-1)\sqrt{3}+z]\times[\sqrt{3}-z]}{[(\sqrt[3]{2(1+z^2)}-1)\sqrt{3}-z]\times[\sqrt{3}+z]}$$

$$\frac{2p+1}{\sqrt{3}} = \frac{[2+\sqrt[3]{2(1+z^2)}]\sqrt{3}+2z}{3\sqrt[3]{2(1+z^2)}}$$

$$\frac{2q+1}{\sqrt{3}} = \frac{[2+\sqrt[3]{2(1+z^2)}]\sqrt{3}-2z}{3\sqrt[3]{2(1+z^2)}}$$

en (zie noot op *Bladz.* 354.) $B.Tang.\frac{2p+1}{\sqrt{3}}$ $- B.Tang.\frac{2q+1}{\sqrt{3}}$ wordt gelijk aan

$$B.Tang.\frac{3z\sqrt[3]{2(1+z^2)}}{3[\sqrt[3]{4(1+z^2)^2}+\sqrt[3]{2(1+z^2)}+1]-z^2}$$

en men verkrijgt dan ten laatste voor ......

$\int\frac{\partial z}{(3-z^2)\sqrt[3]{(1+z^2)}}$ deze uitdrukking:

$$+\frac{\sqrt[3]{2}}{8\sqrt{3}}Log.\frac{[(\sqrt[3]{2(1+z^2)}-1)\sqrt{3}+z]\times[\sqrt{3}-z]}{[(\sqrt[3]{2(1+z^2)}-1)\sqrt{3}-z]\times[\sqrt{3}+z]}$$

$$+\frac{\sqrt[3]{2}}{12}B.Tang.\frac{3z\sqrt[3]{2(1+z^2)}}{3[\sqrt[3]{4(1+z^2)^2}+\sqrt[3]{2(1+z^3)}+1-z^2}+Const.$$

AANMERKING. De Heer RUMOWSKI heeft deze differentiaal uitdrukking, in de *Nova Acta Petrop. Tom.* X, op eene geheel andere wijze geïntegreerd: zijne integraal verschilt van de onze; eensdeels, wijl eenige misslagen in zijne berekening zijn ingeslopen, anderdeels, wijl hij in zijne oplossingswijze zijne integraal op eene wijze,

ze, die van de onze verschilt, ontleed heeft; wanneer men echter zijne misrekening verbetert en de logarithmen en cirkelbogen, welke hij verkrijgt, te zamen vereenigt, dan stemmen onze integralen met elkander overeen.

N°. 126. Door

U. HUGUENIN.

Stellen wij, ten einde de integraal van . . . .

$$\frac{\delta z}{(3+z^2)\sqrt[3]{(1+3z^2)}}$$ te vinden, $z = a \times \frac{p-q}{p+q}$, in welke a eene nader te bepalen standvastige grootheid is, dan wordt:

$$1+3z^2 = \frac{(3a^2+1)p^2 - 2(3a^2-1)pq + (2a^2+1)q^2}{(p+q)^2} =$$

$$\frac{(3a^2+1)p^3 - 3(a^2-1)p^2q - 3(a^2-1)pq^2 + (3a^2+1)q^3}{(p+q)^3}$$

$$3+z^2 = \frac{(a^2+3)p^2 - 2(a^2-3)pq + (a^2+3)q^2}{(p+q)^2}$$

$$\delta z = 2a \times \frac{q\delta p - p\delta q}{(p+q)^2}$$

Door $a = 1$ te stellen, verkrijgen deze uitdrukkingen de eenvoudigste gedaante; men heeft namelijk:

$$z = \frac{p-q}{p+q};\ 1=3z^2 = \frac{4(p^3+q^3)}{(p+q)^3};\ 3+z^2 = \frac{4(p^2+pq+q^2)}{(p+q)^2}$$

$$\delta z = \frac{2(p\delta q - p\delta q)}{(p+q)^2}$$

en de gegevene differentiaal wordt als dan:

$$\frac{\delta z}{(3+z^2)\sqrt[3]{(1+3z^2)}} = \frac{(p+q)(q\delta p - p\delta q)}{2(p^2+pq+q^2)\sqrt[3]{4(p^3+q^3)}} =$$

$$\ldots\ldots \frac{p^2q\delta p - p^3\delta q - q^3\delta p + pq^2\delta q}{4(p^3-q^3)}$$

wanneer men namelijk $p^3 + q^3 = 2$ stelt.

 Vol-

Volgens deze veronderstelling heeft men $p^3 = 2 - q^3$; $q^3 = 2 - p^3$; $p^2 \delta p = - q^2 \delta q$, en, deze waarden in de laatste differentiaal vergelijking overbrengende, wordt:

$$\frac{\delta z}{(3+z^2)\sqrt[3]{(1+3z^2)}} = \tfrac{1}{4} \times \left[\frac{\delta p}{1-p^3} - \frac{\delta q}{1-q^3}\right]$$

Maar volgens de oplossing van het 125 *Voorstel* is:

$$\int \frac{\delta p}{1-p^3} = \tfrac{1}{2} Log. \frac{\sqrt[3]{(1-p^3)}}{1-p} + \frac{1}{\sqrt{3}} B.Tang. \frac{2p+1}{\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{\delta q}{1-q^3} = \tfrac{1}{2} Log. \frac{\sqrt[3]{(1-q^3)}}{1-q} + \frac{1}{\sqrt{3}} B.Tang. \frac{2q+1}{\sqrt{3}}$$

en men heeft derhalve voor de geheele integraal

$\int \frac{\delta z}{(3+z^2)\sqrt[3]{(1+3z^2)}}$, door namelijk de logarithmen en cirkelbogen te vereenigen:

$$\tfrac{1}{8} Log. \frac{(1-q)\sqrt[3]{(1-p^3)}}{(1-p)\sqrt[3]{(1-q^3)}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} B.Tang. \frac{(p-q)\sqrt{3}}{2+p+q+2pq}$$

waar van echter het logarithmische gedeelte nog kan vereenvoudigd worden; want, aangezien $p^3 + q^3 = 2$ is, zoo is $-1 + q^3 = -(1-q^3) = 1 - p^3$; derhalve $\frac{1-p^3}{1-q^3} = -1$, en

$\frac{\sqrt[3]{(1-p^3)}}{\sqrt[3]{(1-p^3)}} = -1$, waar uit dan eindelijk volgt:

$$\int \frac{\delta z}{(3+z^2)\sqrt[3]{(1+3z^2)}} = \tfrac{1}{8} Log. \frac{q-1}{1-p} \ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{1}{4\sqrt{3}} B.Tang. \frac{(p-q)\sqrt{3}}{2+p+q+2pq}$$

Nu

Nu is $1 + 3z^2 = 4 \times \frac{p^3 + q^3}{(p + q)^3} = \frac{8}{(p+q)^3}$; derhalve $p + q = \frac{2}{\sqrt[3]{(1 + 3z^2)}}$. Voorts is uit $z = \frac{p - q}{p + q}$, $p - q = z\,(p + q) = \frac{2z}{\sqrt[3]{(1 + 3z^2)}}$ en hier door vindt men dan: $p = \frac{1 + z}{\sqrt[3]{(1 + 3z^2)}}$; $q = \frac{1 - z}{\sqrt[3]{(1 + 3z^2)}}$; $pq = \frac{1 - z^2}{\sqrt[3]{(1 + 3z^2)^2}}$; $q - 1 = \frac{1 - z - \sqrt[3]{(1 + 3z^2)}}{\sqrt[3]{(1 + 3z^2)}}$; $1 - p = \frac{\sqrt[3]{(1 + 3z^2)} - 1 - z}{\sqrt[3]{(1 + 3z^2)}}$; $\frac{q - 1}{1 - p} = \frac{z - 1 + \sqrt[3]{(1 + 3z^2)}}{z + 1 - \sqrt[3]{(1 + 3z^2)}}$. De gezochte integraal wordt derhalve:

$$\int \frac{\partial z}{(3 + z^2)\sqrt[3]{(1 + 3z)^2}} = \tfrac{1}{4}\,Log.\,\frac{z - 1 + \sqrt[3]{(1 + 3z^2)}}{z + 1 - \sqrt[3]{(1 + 3z^2)}}$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{3}}\,B.Tang.\,\frac{z\sqrt{3} \times \sqrt[3]{(1 + 3z^2)}}{\sqrt[3]{(1 + 3z^2)} + \sqrt[3]{(1 + 3z^2)} + 1 - z^2} + Const.$$

AANMERKING. Deze integraal verschilt met de beide integralen, welke de Heer EULER voor onze differentiaal gevonden heeft; echter zijn ook deze zijne integralen van elkander onderscheiden.

Het verschil van ééne zijner oplossingen met de on-

onze wordt door eene vierkants worteltrekking geboren. De Heer EULER stelt, om aan de differentiaal eene andere gedaante te geven, . . .

$\sqrt[3]{(1 + 3z^2)} = 2x$ en $x = \frac{\sqrt[3]{(1 - 3y + 3y^2)}}{\sqrt[3]{2}}$;

dus doende, wordt $x^3 = \frac{1 - 3y + 3y^2}{2}$, . . .

$8x^3 - 1 = 3(1 - 4y + 4y^2)$ en . . . . . .

$\sqrt{(8x^3 - 1)} = \pm (2y - 1)\sqrt{3}$. Nu heeft de Heer EULER zich van den wortel . . . . .

$\sqrt{(8x^3 - 1)} = -(2y - 1)\sqrt{3} = (1 - 2y)\sqrt{3}$ bediend, waar door hij voor het logarithmische

gedeelte $\frac{1}{6} Log. \frac{z + 1 - \sqrt[3]{(1 + 3z^2)}}{z - 1 + \sqrt[3]{(1 + 3z^2)}}$ en voor

de tangens dezelfde grootheid als wij, doch met één tegengesteld teeken gevonden heeft. Had hij van den wortel $\sqrt{(8x^3 - 1)} = (2y - 1)\sqrt{3}$ gebruik gemaakt, zou hij dezelfde integraal als wij verkregen hebben, welke, daar zij zonder hulp eener vierkants worteltrekking gevonden is, aan geen twijfel kan onderworpen zijn; waar uit men dan leeren mag, dat men zoo veel mogelijk is, de vierkants of evene magts worteltrekkingen, bij substitutien, moet trachten te vermijden.

Ten opzigte van EULERS tweede integraal, waar bij zijne substitutien te zamen in het wezen der zake met onze enkele substitutie overeenkomen en derhalve ook in alle deelen dezelfde integraal moesten opleveren, valt aan te merken: dat de Heer EULER, bij de herleiding der logarithmische functien, eene imaginaire grootheid doet ontstaan, welke hij, dezelve als eene standvastige grootheid beschouwende, weglaat: namelijk zijne beide logarithmische integralen zijn $\frac{1}{6}. Log. \frac{1 - p^3}{(1 - p)^3}$

$- \frac{1}{6}$

$-\frac{1}{6}.Log.\frac{(1-q)^3}{1-q^3}$, welke hij tot $\frac{1}{6}.Log.\frac{1-p^3}{1-q^3}$
$+\frac{1}{6}.Log.\left(\frac{1-q}{1-p}\right)^3 = \frac{1}{6}.Log.\frac{1-p^3}{1-q^3}\ldots$
$+\frac{1}{2}Log.\frac{1-q}{1-p}$ herleidt; maar $1-p^3 = -$
$(1-q^3)$ zijnde, zoo is $Log.\frac{1-p^3}{1-q^3} = \ldots$
$Log.-1$, of $\frac{1}{6}Log.\frac{1-p^3}{1-q^3} = \frac{1}{6}Log.-1$ en deze onbestaanbare logarithmus heeft de Heer EULER, als eene standvastige grootheid, uit de integraal weggelaten, en alleen het logarithmische gedeelte $\frac{1}{2}Log.\frac{1-q}{1-p}$ behouden, voor welk laatste wij echter $\frac{1}{2}Log.\frac{q-1}{1-p}$ gevonden hebben. Zijne integraal komt dus geheel met de onze overeen; uitgenomen, dat de teller zijner logarithmische grootheid een tegengesteld teeken heeft. Zie verder *Nova Acta Petrop. Tom.* X.

N°. 127. Door

U. HUGUENIN.

De differentiaale uitdrukking $\frac{\partial z}{(3-z^2)\sqrt{(1+3z^2)}}$ laat zich niet op gelijke wijze, als bij de vijf voorgaande differentialen geschied is, tot eenen rationalen vorm brengen. Wij kunnen echter dezelve dadelijk in twee andere differentialen ontleden; want, daar $3-z^2$ kan aangemerkt worden als uit het product der factoren $(\sqrt{3}+z)\times(\sqrt{3}-z)$ te bestaan, zal men door de leerwijze van het verdeelen der breuken vinden.

$$\frac{1}{3-z^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}+z} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}-z}$$

en de functie $\frac{\partial z}{(3 - z^2)\sqrt[3]{(1 - 3z^2)}}$ kan dan aangemerkt worden als gelijk te zijn aan

$$\frac{\partial z}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+z)\sqrt[3]{(1-3z^2)}} + \frac{\partial z}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-z)\sqrt[3]{(1-3z^2)}}$$

Wij zullen, om de grootheid onder het wortel-teeken van deze beide differentialen onder eene bekwamere gedaante te brengen, den coefficient van $3z^2$, door $z = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \left[1 - a \times \frac{p-1}{p+1}\right]$ te stellen, doen verdwijnen en tevens aannemen dat a eene nader te bepalen standvastige grootheid zij; hier door zal men dan hebben:

$$1 - 3z^2 = 2a \times \frac{p-1}{p+1} - a^2 \times \left(\frac{p-1}{p+1}\right)^2 = \frac{(2a-a^2)p^3 + (2a+a^2)p^2 - (2a-a^2)p - (2a+a^2)}{(p+1)^3}$$

$$\sqrt{3}-z = \frac{(2+a)p+(2-a)}{(p+1)\sqrt{3}}; \sqrt{3}+z = \frac{(4-a)p+4+a}{(p+1)\sqrt{3}}$$

$$\partial z = -\frac{2a\partial p}{(p+1)^2\sqrt{3}}$$

Het is zigtbaar, dat alle deze uitdrukkingen de eenvoudigste gedaante zullen verkrijgen, wanneer men $a = 2$ stelt, want, zoo doende, heeft men:

$$z = -\frac{p-3}{(p+1)\sqrt{3}}; \sqrt[3]{(1-3z^2)} = \frac{\sqrt[3]{8(p^2-1)}}{p+1} = \frac{2\sqrt[3]{(p^2-1)}}{p+1};$$

$$\sqrt{3}-z = \frac{4p}{(p+1)\sqrt{3}}; \sqrt{3}+z = \frac{2p+6}{(p+1)\sqrt{3}}; \partial z = \frac{-4\partial p}{(p+1)^2\sqrt{3}}$$

diensvolgens wordt dan ook:

$$\frac{\partial z}{(3-z^2)\sqrt[3]{(1-3z^2)}} = \frac{-1}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{\partial p}{p\sqrt[3]{(p^2-1)}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\partial p}{(p+3)\sqrt[3]{(p^2-1)}}$$

De

De differentiaal $\frac{\partial p}{p\sqrt{(p^2-1)}}$ wordt rationaal als men $\sqrt[3]{(p^2-1)} = q$ ſtelt; wijl hier door $p^2 = q^3 + 1$; $2p\partial p = 3q^2\partial q$; $\frac{\partial p}{p} = \frac{3}{2}.\frac{q^2\partial q}{p^2} = \frac{3}{2}\times\frac{q^2\partial q}{q^3+1}$ en $-\frac{1}{4\sqrt{3}}\times\frac{\partial p}{p\sqrt[3]{(p^2+1)}} = \dots - \frac{\sqrt{3}}{8}\times\frac{q\partial q}{q^3+1}$ wordt, eene uitdrukking, welke kan geïntegreerd worden.

Het tweede gedeelte der differentiaal, te weten $-\frac{1}{2\sqrt{3}}\times\frac{\partial p}{(p+3)\sqrt[3]{(p^2-1)}}$, verkrijgt, door onze aangenomene ſubſtitutie, geenen integreerbaren vorm; doch men kan hetzelve tot den vorm van het eerſte gedeelte brengen, door $p = \frac{u+3}{u-1}$ te ſtellen; als dan wordt $p + 3 = \frac{4u}{u-1}$; $p^2 - 1 = \frac{8(u+1)}{(u-1)^2} = \frac{8(u^2-1)}{(u-1)^3}$; $\partial p = -\frac{4\partial u}{(u-1)^2}$ en $-\frac{1}{2\sqrt{3}}\times \dots \frac{\partial p}{(p+3)\sqrt[3]{(p^2-1)}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\times\frac{\partial u}{u\sqrt[3]{(u^2-1)}}$.

Men ſtelle nu $\sqrt[3]{(u^2-1)} = y$, zoo heeft men, even als bij het eerst gedeelte der differentiaal:

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}}\times\frac{\partial p}{(p+3)\sqrt[3]{(p^2-1)}} = \frac{\sqrt{3}}{8}\times\frac{y\partial y}{y^3+1}$$

Maar $q^3 + 1 = (q+1)(q^2 - q + 1)$ zijn-

zijnde, zoo heeft men door de verdeeling der breuken:

$$\frac{q\delta q}{q^3+1} = \frac{1}{3}\times\left[\frac{-\delta q}{q+1} + \frac{q\delta q+\delta q}{q^2-q+1}\right] = \ldots$$

$$\frac{1}{3}\times\left[\frac{\delta q}{q+1} - \frac{1}{2}\times\frac{2q\delta q-\delta q}{q^2-q+1} - \frac{3}{2}\times\frac{\delta q}{q^2-q+1}\right]$$

en diens volgens wordt:

$$\int\frac{-\sqrt{3}}{8}\times\frac{q\delta q}{q^3+1} = \frac{1}{8\sqrt{3}}\times\left[Log.(q+1) - \right.$$

$$\left.\frac{1}{2}Log.(q^2-q+1) - \sqrt{3}.B.Tang.\frac{2q-1}{\sqrt{3}}\right]$$

$$= \frac{1}{16\sqrt{3}}\,Log.\frac{(q+1)^2}{q^2-q+1} - \frac{1}{8}B.Tang.\frac{2q-1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{16\sqrt{3}}\,Log.\frac{(1+q)^3}{1+q^3} - \frac{1}{8}B.Tang.\frac{2q-1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{16}\,Log.\frac{1+q}{\sqrt[3]{(1+q^3)}} - \frac{1}{8}B.Tang.\frac{2q-1}{\sqrt{3}}\ldots$$

en op gelijke wijze heeft men:

$$\int\frac{\sqrt{3}}{8}\times\frac{v\delta v}{v^3+1} = -\frac{\sqrt{3}}{16}Log.\frac{1+v}{\sqrt[3]{(1+v^3)}} + \frac{1}{8}B.Tang.\frac{2v-1}{\sqrt{3}}$$

Nu is in de integraal van het eerste gedeelte

$$p^2 = q^3+1,\ z = \frac{-p+3}{(p+1)\sqrt{3}},\ \text{of}\ p = \frac{3-z\sqrt{3}}{1+z\sqrt{3}};$$

derhalve $\sqrt[3]{(q^3+1)} = \sqrt[3]{p^2} = \frac{\sqrt[3]{(3-z\sqrt{3})^2}}{\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})^2}};$

$$p^2 - 1 = \frac{8(1-z\sqrt{3})}{(1+z\sqrt{3})^2};\ q = \sqrt[3]{(p^2-1)} =$$

$$\frac{2\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})}}{(1+z\sqrt{3})^2};\ 1+q = \frac{\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})^2} + 2\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})}}{\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})^2}};$$

$$2q - 1 = \frac{4\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})} - \sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})^2}}{\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})^2}}$$

en

en $\dfrac{1+q}{\sqrt[3]{(q^3+1)}} = \dfrac{\sqrt[3]{(1+2\sqrt{3})^2} + 2\sqrt[3]{(1-2\sqrt{3})}}{\sqrt[3]{(3-2\sqrt{3})^2}}$

en alzoo wordt $\dfrac{\sqrt{3}}{16}\, Log.\, \dfrac{1+q}{\sqrt[3]{(1+q^3)}} - \ldots$

$\frac{1}{8}\, B.Tang.\, \dfrac{2q-1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{16}\, Log. \ldots$

$\dfrac{\sqrt[3]{(1+2\sqrt{3})^2} + 2\sqrt[3]{(1-2\sqrt{3})}}{\sqrt[3]{(3-2\sqrt{3})^2}} - \ldots$

$\frac{1}{8}\, B.Tang.\, \dfrac{4\sqrt[3]{(1-2\sqrt{3})} - \sqrt[3]{(1+2\sqrt{3})^2}}{\sqrt{3} \times \sqrt[3]{(1+2\sqrt{3})^2}}.$

In het tweede gedeelte der integraal is ...

$v = \sqrt[3]{(u^2-1)}$; of $u^2 = 1 + v^3$; $p = \dfrac{u+3}{u-1}$;

$u = \dfrac{p+3}{p-1}$; $u^2 - 1 = \dfrac{8(p+1)}{(p-1)^2}$ en $v = \ldots$

$\sqrt[3]{(u^2-1)} = \dfrac{2\sqrt[3]{(p+1)}}{\sqrt[3]{(p-1)^2}}.$

Voorts is, even als bij het eerste geïntegreerde gedeelte, $p = \dfrac{3-2\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}$; $\sqrt[3]{(p^2-1)} = \ldots$

$\dfrac{2\sqrt[3]{(1-2\sqrt{3})}}{\sqrt[3]{(1+2\sqrt{3})^2}}$ en $p - 1 = \dfrac{2(1-2\sqrt{3})}{1+2\sqrt{3}}$;

derhalve $v = \dfrac{2\sqrt[3]{(p+1)}}{\sqrt[3]{(p-1)^2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{(p^2-1)}}{p-1}$

$= \dfrac{2\sqrt[3]{(1+2\sqrt{3})}}{\sqrt[3]{(1-2\sqrt{3})^2}}$; $v^3+1 = \dfrac{8(1+2\sqrt{3})+(1-2\sqrt{3})^2}{(1-2\sqrt{3})^2} =$

$\frac{9+6z\sqrt{3}+3z^2}{(1-z\sqrt{3})^2}$; $\sqrt[3]{(y^3+1)} = \frac{\sqrt[3]{(3+z\sqrt{3})^2}}{\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})^2}}$,

$$1+y = \frac{\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})^2} + 2\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})}}{\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})^2}};$$

$$\frac{1+y}{\sqrt[3]{(y^3+1)}} = \frac{\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})^2} + 2\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})}}{\sqrt[3]{(3+z\sqrt{3})^2}}$$

en $2y-1 = \frac{4\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})} - \sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})^2}}{\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})^2}}$.

Hier door wordt nu het tweede gedeelte van de integraal, namelijk $-\frac{\sqrt{3}}{16}\, Log. \frac{1+y}{\sqrt[3]{(1+y^3)}} + \frac{1}{8}\, B.Tang. \frac{\sqrt{3}}{2y-1}$ gelijk aan deze uitdrukking:

$$-\frac{\sqrt{3}}{16}\, Log. \frac{\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})^2} + 2\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})}}{\sqrt[3]{(3+z\sqrt{3})^2}} +$$

$$\frac{1}{8}\, B.Tang. \frac{4\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})} - \sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})^2}}{\sqrt{3} \times \sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})^2}}$$

Dit laatste gedeelte van de integraal bij het eerste voegende, verkrijgt men voor . . . . $\int \frac{\partial z}{(3-z^2)\sqrt[3]{(1-3z^2)}}$ deze uitdrukking:

$$\frac{\sqrt{3}}{16} Log. \frac{[\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})^2} + 2\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})}]}{[\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})^2} + 2\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})}]} \times \frac{\sqrt[3]{(3+z\sqrt{3})^2}}{\sqrt[3]{(3-z\sqrt{3})^2}}$$

$$+\frac{1}{8} B.Tang. \frac{4\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})} - \sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})^2}}{\sqrt{3} \times \sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})^2}}$$

4

$$-\tfrac{1}{3} B.Tang. \frac{4\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})}-\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})^2}}{\sqrt{3}\times\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})^2}} + Const.$$

AANMERKING. De Heer EULER heeft deze differentiaal, door meer fubftitutien, in de door ons gevondene rationale deelen ontleed, zonder de integrering verder uit te voeren; daar en tegen heeft hij eene integraal voor die differentiaal uit zijne in het 126 Voorftel gemelde tweede integraal van $\frac{\delta z}{(3+z^2)\sqrt[3]{(1+3z^2)}}$, af-geleid, door in dezelve $z\sqrt{-1}$ in plaats van z te ftellen, het welk van het hier gevondene veel verfchilt en ook niet anders zijn kan, aangezien de Heer EULER, door in het 126 *Voorftel* den factor $\tfrac{1}{6} Log. -1$ uit de integraal weg te laten, den aard van dezelve zoodanig veranderd heeft, dat hij, zoo doende, voor . . . .

$$\tfrac{1}{4} Log. \frac{1-\sqrt[3]{(1+3z^2)}-z}{1-\sqrt[3]{(1+3z^2)}+z}$$ verkregen heeft

$$\tfrac{1}{4} Log. \frac{\sqrt[3]{(1+3z^2)}-1+z}{\sqrt[3]{(1+3z^2)}-1-z},$$ welke aan de in het 123 Voorftel gegevene formule (z) beantwoordt, wanneer men in dezelve $z\sqrt{-1}$ in plaats van z neemt, wijl teller en noemer gelijk zijn, uitgenomen, dat z in dezelve tegengeftelde teekens heeft; dit echter heeft ten aanzien van het logarithmifche gedeelte $\tfrac{1}{4} Log. \frac{z-1+\sqrt[3]{(1+3z^2)}}{z+1-\sqrt[3]{(1+3z^2)}}$, in *Voorftel* 126 gevonden, geen plaats, het welk door $z\sqrt{-1}$ in plaats van z te ftellen, de eerfte

ste formule in de vereischte gedaante niet kan doen overgaan. Zie verder *Nova Acta Petrop. Tom.* X.

N°. 128. Door

J. R. Schmidt, *U. Huguenin*, en *Jacob de Gelder*.

Zij *Fig.* 114, A het gegeven punt, PQ en DE de gegevene evenwijdige lijnen: men trekke dan eenige lijn AR, van A tot aan de lijn PQ, welke DE in S snijdt; door S trekke men eene onbepaalde lijn Mm loodregt op PQ, en gevolgelijk ook op DE en men neme dan van het punt N, alwaar deze lijn Mm de lijn PQ snijdt, NM = AR, dan is M, volgens de opgave, een punt der kromme lijn; maar, daar men den afstand NM = AR zoo wel ter regter als ter linkerhand van het punt N nemen kan, zoo zal, indien Nm = NM = AR genomen wordt, het punt m insgelijks tot hetzelfde stelsel van punten behooren. Men zal nu, zoo als in de figuur genoegzaam aangewezen is, zoo vele punten M en m der kromme lijn, als men goedvindt, kunnen bepalen. Er blijft nu te onderzoeken, tot welke soort van kromme lijn de punten M en m behooren?

Men trekke door het punt A de lijn ABa evenwijdig aan Mm (en dus ook loodregt op PQ,) dan is ook, volgens de wet, bij het voorstel voorgeschreven, bij welke, in dit geval, de lijnen AR en Mm op elkander vallen, het punt A zelf een punt der kromme lijn; indien men nu, MQ evenwijdig aan PQ trekt en het punt B voor den oorsprong der coördinaten en bijgevolg Aa en PQ voor derzelver assen aannemende, BO = NM = x; MO = CS = y; de standvastige lijnen AB = a, AC = b stelt, dan hebben wij, aangezien, volgens de constructie, AR = MN =

OB

OB $=x$ is, in den regthoekigen driehoek ABR, $BR^2 = AR^2 - AB^2 = x^2 - a^2$; daarenboven geven de gelijkvormige driehoeken ABR en ACS de evenredigheid:

$$AB^2 : AC^2 = BR^2 : CS^2$$

dat is, omdat CS $=$ MO $= y$ en $BR^2 = x^2 - a^2$ is,

$$a^2 : b^2 = x^2 - a^2 : y^2$$

waaruit dan volgt de vergelijking

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (x^2 - a^2)$$

welke, gelijk bekend is, de vergelijking van de gewone Hijperbola is, genomen op derzelver assen: er is derhalve geen twijfel aan, dat de punten M tot deze kromme lijn behooren.

Aanmerking. 1°. Het blijkt uit deze vergelijking, dat de punten m, ter linkerhand van PQ, ook tot de vergelijking $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (x^2 - a^2)$ behooren; want, aangezien mN $=$ Bo $=$ MN en mo $=$ MO is, zoo zal, daar B de oorsprong der coördinaten is, Bo $=$ Nm $= -$ BO $= -x$ en mo $=$ MO $= y$ zijn; daar nu de vergelijking door x negatief te nemen, niet verandert, behooren de punten m, als klaarblijkelijk in dezelve opgesloten zijnde, mede tot de kromme lijn.

2°. Wanneer men in de gevondene vergelijking $x = \pm a$ stelt, wordt, zoo als ook uit de constructie volgt, $y = 0$: en x positievelijk of negatievelijk kleiner dan a stellende, wordt $x^2 - a^2$ negatief en $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)} \times \sqrt{-1}$ onbestaanbaar; dat is, er liggen, tusschen de lijnen, welke door de punten A en a evenwijdig aan PQ getrokken worden, geene punten van de kromme lijn; daar en tegen zal, daar voor elke waarde van x, grooter dan $+a$ en kleiner dan $-a$, y bestaanbaar is, de kromme lijn zich in

 twee

twee takken onbepaaldelijk uitstrekken, de eerste van welke ter regterhand van de evenwijdige lijn door A en de tweede ter linkerhand van de evenwijdige lijn door *a* gaande, zal gelegen zijn.

3°. In de figuur is de lijn DE tusschen het punt A en de lijn PQ gelegen. Merken wij nu het punt A en de lijn PQ aan als in stelling gegeven zijnde; maar laten wij de lijn DE in haren evenwijdigen stand aan PQ van afstand veranderen, dan hebben wij behalve het geval van *fig.* 114. in hetwelke DE tusschen A en PQ ligt en $a > b$ is, nog de volgende gevallen.

a). Wanneer DE op PQ valt, alsdan vereenigen zich de punten R, S en N in één; AC = AB of $a = b$ zijnde, wordt de vergelijking $y^2 = x^2 - a^2$ en de hijperbola is in dit geval gelijkzijdig.

b). Wanneer de lijn DE ter linkerhand van PQ valt. In dit geval verandert de constructie en de vergelijking uit dezelve afgeleid, in het minste niet; alleenlijk, daar in het geval van *fig.* 114, $a > b$ is, en hier $a < b$; is in *fig.* 114 de voorname as de grootste en hier de voorname as de kleinste der toegevoegde assen.

c). Hoe nader het punt C ter regter zijde van PQ bij A komt, des te kleiner worden de ordinaten in de vergelijking van de abscissen; en als het punt C in A valt, verandert de hijperbola in een stelsel van twee regte lijnen AX en *ax*.

d). Wanneer het punt C, ter linkerhand van de lijn PQ vallende, op eenen grooteren afstand van A gebragt wordt, verkrijgen de takken der hijperbola eene mindere buiging en veranderen, zoodra C oneindig ver van A afstaat, in een stelsel van twee aan PQ evenwijdig loopende lijnen, door de punten A en *a* gaande.

e). Wanneer het punt C ter regterhand van A valt, dan wordt CA = *b* negatief, en men ver-

verkrijgt, de voorschrevene constructie opvolgende, wederom eene hijperbola; want laat *fig.* 114 het punt C in C′ verplaatst zijn en DE in D′E′; dan snijdt het verlengde AR van de lijn D′E′ in S′; door S′ trekke men de lijn S′M′N′m' regthoekig op PQ en neme N′M′ = N′m' = AR; dan zullen (AC = AC′ zijnde) M′ en m' punten zijn van dezelfde hijperbola, welke op de eerste wijze beschreven is; hetwelk, behalve dat zulks uit den regthoekigen driehoek ABR en de gelijkvormige driehoeken ABR en AS′C′, op dezelfde wijze als boven, blijkt, ook nog daardoor bevestigd wordt, dat de vergelijking $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (x^2 - a^2)$ niet verandert, wanneer b in dezelve negatief genomen wordt.

4°. Dit werkstuk levert eene fraaije en misschien wel de eenvoudigste wijze op, om, *wanneer de assen eener hijperbola gegeven zijn, de hijperbola door punten te beschrijven?* Want, men neme de halve eerste as = AB, de halve tweede as = AC, trekke PQ en DE loodregt op AB, en men ga voorts te werk, als in het vraagstuk is voorgeschreven.

5°. In het voorstel is aangenomen, dat de lijnen MSNm de lijnen PQ en DE, onder eenen regten hoek snijden: men kan nu vragen: *welke de kromme lijn zijn zal, indien deze lijnen MSNm de lijnen PQ en DE niet onder eenen regten; maar onder eenen scheven hoek doorsnijden?* Laat in *fig.* 115, welke in alles met *fig.* 114 overeenkomt, behalve dat de hoek ABP een scheve hoek is, ∠ ABP = λ gesteld worden; dan is AB = a, AR = MN = OB = x; MO = CS = y, AC = b. Nu is AR : AB of $x : a = Sin. \lambda : Sin. ARB$; derhalve $Sin. ARB = \frac{a\, Sin. \lambda}{x}$, $Cos^2. ARB = \frac{x^2 - a^2\, Sin^2. \lambda}{x^2}$; $Sin. RAB = Sin. (\lambda + ARB) = \ldots\ldots$

$$\frac{a\,Sin.\lambda}{x} \times Cos.\lambda \pm Sin.\lambda \times \sqrt{\left[\frac{x^2 - a^2 Sin^2.\lambda}{x^2}\right]}$$

$$Sin.RAB = \frac{a Sin.\lambda\, Cos.\lambda \pm Sin.\lambda \sqrt{(x^2 - a^2 Sin^2.\lambda)}}{x}$$

Voorts is $Sin.\lambda : Sin.BAR = x : BR$ en hieruit wordt

$$BR = a\,Cos.\lambda \pm \sqrt{(x^2 - a^2 Sin^2.\lambda)}$$

eindelijk geven de gelijkvormige driehoeken ABR en ACS, AB : AC = BR : CS

$$a : b = a\,Cos.\lambda \pm \sqrt{(x^2 - a^2 Sin^2.\lambda)} : y$$

$$y = b\,Cos.\lambda \pm \frac{b}{a} \sqrt{(x^2 - a^2 Sin^2.\lambda)}$$

Om nu uit deze vergelijking het wortelteeken weg te maken, ſtel ik dezelve onder deze gedaante:

$$\pm \frac{b}{a} \sqrt{(x^2 - a^2.Sin^2.\lambda)} = y - b\,Cos.\lambda$$

en verhef beide leden tot de tweede magt, dan is

$$\frac{b^2}{a^2} \times (x^2 - a^2 Sin^2.\lambda) = y^2 - 2yb\,Cos.\lambda + b^2 Cos^2.\lambda$$

of wel

$$\frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2 Sin^2.\lambda = y^2 - 2yb\,Cos.\lambda + b^2 Cos^2.\lambda$$

$$\frac{b^2 x^2}{a^2} = y^2 - 2yb\,Cos.\lambda + b^2 (Sin^2.\lambda + Cos^2.\lambda)$$

of eindelijk, wijl $Sin^2.\lambda + Cos^2.\lambda = 1$ is,

$$\frac{b^2 x^2}{a^2} = y^2 - 2by\,Cos.\lambda + b^2$$

Zijnde deze eene vergelijking, klaarblijkelijk tot eene der kegelſneden behoorende.

De vergelijking met betrekking tot y oplosſende, heeft men

$$y = +b\,Cos.\lambda \pm \sqrt{\left(\frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2 Sin^2.\lambda\right)}.(g)$$

Deze waarde van y beſtaat uit twee deelen, uit het ſtandvastig gedeelte $+ b\,Cos.\lambda$, hetwelk

voor

voor alle waarden van x hetzelfde blijft en uit de wortelgrootheid $\pm\sqrt{\left[\frac{b^2 x^2 - a^2 b^2 Sin^2 . \lambda}{a^2}\right]}$.
Men late AFL, *fig.* 115, loodregt op PQ vallen; dan is CF $=$ AC $\times$ *Cos* . ACF $=$ AC $\times$ *Cos* . ABP $= b$ *Cos* . λ. De lijn HI, welke door F, evenwijdig aan AB, getrokken wordt, is dan eene middellijn, op welke de waarden van $\pm\sqrt{\left[\frac{b^2 x^2 - a^2 b^2 Sin^2 . \lambda}{a^2}\right]}$ moeten overgebragt worden, terwijl H en I de toppunten dezer middellijn zijn. Om nu de plaats dezer laatste te vinden, moet de grootheid onder het worteltecken gelijk nul gesteld worden: dit doende, vindt men $x = \pm a\ Sin . \lambda$; maar in den driehoek ABL is AL $=$ AB $\times$ *Sin* . B $= a\ Sin . \lambda$; bijaldien men dan GI $=$ GH $=$ AL neemt, zijn de punten H en I de toppunten der middellijn, en daar x grooter dan $\pm a\ Sin . \lambda$ moet genomen worden, ten einde y eene bestaanbare waarde hebbe, blijkt het, dat de kromme lijn, door onze constructie gevonden, eene hijperbola is. Stelt men nu $y - b\ Cos . \lambda = t$, dan verandert de vergelijking (g) in deze:

$$t = \pm \frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - a^2\ Sin^2 . \lambda)}$$

of wel teller en noemer van het gebroken $\frac{b}{a}$ met *Sin* . λ vermenigvuldigende, in

$$t^2 = \frac{b^2\ Sin^2\ \lambda}{a^2\ Sin^2\ \lambda} \times (x^2 - a^2\ Sin^2\ \lambda)$$

zijnde deze de gewone vergelijking tot de hijperbola.

In deze is, zie *fig.* 115, GU $=$ BO $= x$; MU $= + t$ en UM′ $= - t$. Nu is, zie boven, GI $=$ AL $= a\ Sin . \lambda$ de halve eerste as en om dat AF $=$ AC $\times$ *Sin* . $\lambda = b\ Sin . \lambda$ is, is AF de halve tweede as; doch daar de coördi-

 naten

naten elkander onder den scheven hoek ABP = λ snijden, zijn deze assen middellijnen, en hieruit volgt dan deze CONSTRUCTIE: *om wanneer twee zamengevoegde middellijnen met den hoek, dien zij met elkander maken, gegeven zijn, de hijperbola, op de volgende wijze, door punten te beschrijven?* Trek, *fig.* 115, eene onbepaalde lijn PQ; stel op dezelve in eenig punt L eene loodlijn AL; maak LA = de halve eerste en AF = de halve tweede as; trek door F de lijn DE evenwijdig aan PQ; trek uit A de lijn AB met PQ eenen hoek ABP = λ makende gelijk aan den hoek, onder welken de toegevoegde middellijnen elkander snijden, dan zal de hijperbola, PQ en DE als evenwijdige lijnen en A als het vaste punt aannemende, op de wijze als in het voorstel is voorgedragen, door punten beschreven worden.

N°. 129. Door

J. R. SCHMIDT, en *U. Huguenin.*

Stellen wij dat O (*Fig.* 116) een van die punten zij, waarvan wij de meetkundige plaats begeren, en dat alzoo AOM en ON loodregt op PQ getrokken hebbende, MN altoos eene constante waarde behoude. Laat nu AB loodregt op PQ, en BC = MN zijn, zoo dan RCS loodregt op PQ getrokken wordt, zal de snijding van RS en AB een punt van de kromme moeten zijn. Daar nu RS evenwijdig aan AB is, volgt hieruit dat RS eene Asijmptote van de begeerde kromme is.

Stellen wij nu AB = a, MN = BC = b, CN = x en ON = y, dan is ook BM = CN = x, en wij hebben MN : MB = NO : BA, of $b : x = y : a$, gevolgelijk $xy = ab$, vergelijking der Hijperbool op hare Asijmptote; onze kromme is dus eene Hijperbool.

Stel-

Stellende nu $x = o$, zoo wordt y oneindig, en ſtellende $y = o$, zoo wordt x oneindig, waaruit volgt, dat PQ en RS de Aſijmptoten zijn van onze Hijperbool, en daar deze lijnen regthoekig op elkander ſtaan, zoo volgt hieruit, dat onze conſtructie altijd eene gelijkzijdige Hijperbool zal voortbrengen.

Onze conſtructie geeft ons beide de takken; want voor alle punten M, welke ter linkerhand van B liggen, valt het punt O boven PQ; maar ligt het punt M′ ter regter zijde van B, dan ſnijdt N′O′ niet AM′, maar het verlengde van AM′, in O′, en dit punt valt alzoo beneden de lijn PQ.

Het maakt geene verandering, of wij de conſtante lijn MN ter linker zijde, of wel ter regter zijde van het punt M nemen, wanneer wij dezelve ſlechts, in dezelfde conſtructie, altijd naar denzelfden kant nemen; in de bijgevoegde figuur is MN ter regterzijde van M genomen, maar hadden wij dezelve ter linkerzijde genomen, dan zouden de takken van de Hijperbool in de regte hoeken PCS en RCQ gevallen zijn, daar zij nu in de hoeken PCR en SCQ vallen.

Deelen wij nu den hoek der Aſijmptoten PCR midden door, dan verkrijgen wij de toppen G en G′ van de Hijperbool, en wij hebben voor die punten $GF = FC = \sqrt{ab}$ en dus $GC = \sqrt{2ab}$ voor den halven as; zijnde FC hetgeen men de magt of potens van de Hijperbool noemt.

I Gevolg. Wij kunnen door dit middel gemakkelijk iedere gelijkzijdige Hijperbool op hare Aſijmptoten beſchrijven, wanneer de magt van dezelve $= a$ gegeven is; want wij behoeven de lijnen AB en MN of BC ſlechts zoodanig te nemen, dat $ab = a^2$ zij, en dan onze gegevene conſtructie te volgen: gemakkelijk is het dan a en b beide $= a$ te nemen, en dan wordt het

 punt

punt A te gelijker tijd de top van de Hijperbool; want dit punt valt alsdan in G.

II Gevolg. Hieruit blijkt dan nu ook, dat, welk punt A wij in den omtrek van eene gelijkzijdige Hijperbool nemen, en uit hetzelve lijnen naar de Asijmptote trekken, welke de kromme in O snijden, het stuk MN, begrepen tusschen M en de perpendiculair ON, voor eenzelfde punt A, bij ieder punt M even groot zal zijn.

Aanmerking. Onze constructie heeft ons eene gelijkzijdige Hijperbool verschaft; het is ondertusschen gemakkelijk, dezelve op alle andere Hijperbolen toe te passen, wanneer de magt benevens de hoek der Asijmptoten gegeven is; want wij behoeven ten dien einde de lijnen NO, in plaats van dezelve regthoekig op PQ te trekken, slechts met PQ eenen hoek te laten maken, gelijk aan den gegevenen hoek der Asijmptoten, en dan is het zeer gemakkelijk, om al wat wij hier gezegd hebben, ook op dit geval toe te passen.

N°. 130. Door

U. Huguenin.

NB. In de opgaaf van dit Voorstel staat verkeerdelijk, op de agtste regel, S in plaats van M; en op de vierde regel van onderen, PS in plaats van PM.

Zij KLM (*Fig.* 117) de beweegbare hoek, aan welken de draad, die de lengte van ML heeft, is vastgemaakt, met het eene einde in M en met het andere in een gegeven punt F, zoodanig, dat, als men de draad in eenig punt P tegen het been LM van den beweegbaren hoek KLM uitspant, MP + FP = MP + LP, of FP = LP is. Laat voorts door het punt F eene lijn FD even-

evenwijdig met LM en door P eene lijn pQP evenwijdig met RS of KL getrokken zijn, zoo is EQ = LP = FP. Men ſtelle nu, dat de hoek KLM naar ED bewogen worde, alsdan nadert het punt P de lijnen KL en ED, en FP = LP wordt ſteeds kleiner, zoo dat, als LM in ED komt, het punt P ergens in A en het punt L in E valt; maar daar altijd FP = LP is, zoo zal in dit geval FA = AE zijn, en deze waardij kunnen wij als eene gegevene grootheid beſchouwen.

Zij dus AE = AF = a en ∠ KLM = α gegeven, en ſtel voorts AQ = x en PQ = y, dan is FP = EQ = $x + a$ en FQ = $x - a$. Daar wijders ∠ EQP = ∠ KLM = α is, heeft men $FP^2 = QP^2 + FQ^2 - 2\ QP \cdot FQ \cdot Cos.\alpha$; dat is: $(x + a)^2 = (x - a)^2 + y^2 - 2\,(x - a)\,y\,Cos.\alpha$; of $y^2 - 2\,(x - a)\,y\,Cos.\alpha = 4\,a\,x$; waaruit volgt:

$$y = (x - a)\,Cos.\alpha \pm \sqrt{[4\,a\,x + (x - a)^2\,Cos.\alpha^2]}$$

De ordinaat y heeft dus twee ongelijke waarden; de grootſte $PQ = (x - a)\,Cos.\alpha + \sqrt{(4\,a\,x + (x - a)^2\,Cos.\alpha^2)}$ is poſitief, en de kleinſte $pQ = (x - a)\,Cos.\alpha - \sqrt{(4\,a\,x + (x - a)^2\,Cos.\alpha^2)}$ negatief; diensvolgens heeft de aldus beſchrevene kromme lijn twee takken APP′ en App, en daar de vergelijking van den tweeden graad is, moet dezelve tot de kegelſneden behooren.

Men ſtelle $z = y - (x - a)\,Cos.\alpha = \pm \sqrt{(4\,a\,x + (x - a)^2\,Cos.\alpha^2)}$, dan heeft z twee gelijke, doch in teeken verſchillende waarden, welke door PO en pO worden uitgedrukt, als men namelijk Pp in O midden door deelt; zoo dat $PO = PQ - QO = y - QO = y - (x - a)\,Cos.\alpha = z$ en $QO = (x - a)\,Cos.\alpha$ zijn zal; maar FQ = $x - a$ en ∠ FQO = α zijnde, is $QO = (x - a)\,Cos.\alpha = FQ \cdot Cos.\alpha$; derhalve is FQO eene regthoekige driehoek, dat is: FO ſtaat loodregt op pP; en daar voor elke andere dubbele or-

ordinaat $P'p'$, op gelijke wijze $Q'O' = F'Q' \, Cos.\alpha$ is, zoo volgt hieruit, dat FOO' eene regte lijn is, die de dubbele ordinaten Pp en $P'p'$ regthoekig midden door deelt, en diensvolgens de as dezer kromme lijn zijn zal, die verlengd zijnde, deze kromme lijn in U snijden en de kruin van dezelve bepalen zal.

Om nu te onderzoeken, welke soort van kegelsnede onze kromme lijn zij, stelle men in de vergelijking voor z, $x = +$ en $-\infty$, zoo bekomt men in beide gevallen $z = \pm \infty$; alzoo breidt zich onze kromme met vier takken, van welke twee en twee eene tegengestelde rigting hebben, tot in het oneindige uit; waaruit volgt, dat zij eene Hijperbola is, welke echter in eene Parabel verandert, als men den hoek $KLM = \alpha = 90^o$ stelt, wijl hierdoor $Cos.\alpha$, en alzoo ook $(x-a)^2 \, Cos.\alpha^2 = 0$ wordt; wordende derhalve in dit geval de vergelijking $z = \pm \sqrt{4ax}$, of $z^2 = 4ax$, hetwelk de vergelijking van de parabool is, hebbende $4a$ tot parameter. Daar nu in dit geval AQQ' op UOO' valt, zoo valt A in U, en $AF = FU = a$ is het vierde gedeelte van den parameter; waaruit blijkt, dat F het brandpunt dezer parabool is, gelijk in de kegelsneden bewezen wordt. Dit geval komt ook overeen met de bekende mechanische constructie van de Parabool, door middel van eenen regten hoek.

Het zal nu nog noodig zijn de assen van onze Hijperbool te bepalen: tot dit einde trekke men Aa evenwijdig aan Pp, welke den as UO in q snijdt, dan is $\angle qAF = \angle FQO = \alpha$ en $qA = AF \,.\, Cos.\alpha = a \, Cos.\alpha$, welke waarde men ook bekomt als men in de vergelijking van z, $x = 0$ stelt; dewijl in het punt A, $x = 0$ is. Voorts is $Fq = FA \times Sin.\alpha = a \, Sin.\alpha$ en $FO = FQ \,.\, Sin.\alpha = (x-a) \, Sin.\alpha$; derhalve is $qO = qF + FO = x \, Sin.\alpha$.

Als men door U eene lijn UN evenwijdig aan

Aa

Aa trekt, ligt het punt N boven A, en AN $= x$ moet voor het punt U eene negatieve waarde hebben; om deze te vinden, stelle men $z = \pm \sqrt{(4ax + (x-a)^2 \, Cos.\alpha^2)} = 0$; hierdoor bekomt men de vergelijking $x^2 + 2a.\frac{2-Cos.\alpha^2}{Cos.\alpha^2}x = -a^2$, en als men het eerste lid dezer vergelijking tot een quadraat maakt, zoo heeft men

$$x^2 + 2a\left(\frac{2-Cos.\alpha^2}{Cos.\alpha^2}\right)x + a^2\left(2-Cos.\alpha^2\right)^2 =$$

$$.. 4a^2\left(\frac{1-Cos.\alpha^2}{Cos.\alpha^4}\right) = 4a^2.\frac{Sin.\alpha^2}{Cos.\alpha^4}$$

derhalve is $x = -a\left(\frac{2-Cos.\alpha^2}{Cos.\alpha^2}\right) \pm 2a.\frac{Sin.\alpha}{Cos.\alpha^2}$

$$= \frac{-a(1+Sin.\alpha^2) \pm 2aSin.\alpha}{Cos.\alpha^2} = -a\frac{1 \mp 2Sin.\alpha + Sin.\alpha^2}{Cos.\alpha^2}$$

en alzoo $x = \frac{-a(1-Sin.\alpha)^2}{1-Sin.\alpha^2} = -a\frac{1-Sin.\alpha}{1+Sin.\alpha}$

en $x = \frac{-a(1+Sin.\alpha)^2}{1-Sin.\alpha^2} = -a\frac{1+Sin.\alpha}{1-Sin.\alpha}$

gevolgelijk is de kleinste waarde van x, AN $= ...$ $-a.\frac{1-Sin.\alpha}{1+Sin.\alpha}$, en de grootste is AN$'$ $= -a\frac{1+Sin.\alpha}{1-Sin.\alpha}$; zijnde N$'$ het tegenoverliggende punt van N, aan de tegengestelde Hijperbool, uit het welk eene met RS evenwijdig getrokkene lijn N$'$U$'$, tot den verlengden as, het punt U$'$, of den kruin der tegengestelde Hijperbool, bepaalt.

Daar nu Uq = AN $Sin.\alpha$ is, zoo is UO = qO + Uq = $x\, Sin.\alpha + a.\left(\frac{1-Sin.\alpha}{1+Sin.\alpha}\right)Sin.\alpha$; voorts is NN$'$ = AN$'$ − AN = $a.\frac{1+Sin.\alpha}{1-Sin.\alpha}$ $- a.\frac{1-Sin.\alpha}{1+Sin.\alpha} = \frac{4a\,Sin.\alpha}{1-Sin.\alpha^2}$; derhalve

U$'$U

$U'U = NN' \, Sin.\alpha = \frac{4\,a\,Sin.\alpha^2}{1 - Sin.\alpha^2} = 4\,a\,Tang.\alpha^2$; hetwelk de eerste as der Hijperbool is. Deelt men nu UU' midden door in C, zoo is C het middelpunt der tegengestelde Hijperbolen, en de halve eerste as CU $= 2\,a\,Tang.\alpha^2$: waaruit volgt, dat $CO = UO + CU = x\,Sin.\alpha + a\left(\frac{1 - Sin.\alpha}{1 + Sin.\alpha}\right) Sin.\alpha + 2\,a\,Tang.\alpha^2$ wezen zal.

Men stelle nu de veranderlijke $CO = x\,Sin.\alpha + \ldots a\left(\frac{1 - Sin.\alpha}{1 + Sin.\alpha}\right) Sin.\alpha + 2\,a.\,Tang.\alpha^2 = x.\,Sin.\alpha + a.\left(\frac{1 + Sin.\alpha^2}{Cos.\alpha^2}\right) Sin.\alpha = u$, zoo is $x = \frac{u}{Sin.\alpha} - a.\,\frac{1 + Sin.\alpha^2}{Cos.\alpha^2}$ en $x - a = \frac{u}{Sin.\alpha} - \ldots a\,\frac{1 + Sin.\alpha^2}{Cos.\alpha^2} - a.\,\frac{Cos.\alpha^2}{Cos.\alpha^2} = \frac{u}{Sin.\alpha} - \frac{2\,a}{Cos.\alpha^2}$. Substitueert men deze waarden van x en $x - a$ in de waarde van z, zoo bekomt men

$$z = \pm \frac{Cos.\alpha}{Sin.\alpha} \sqrt{\left(u^2 - 4\,a^2.\,\frac{Sin.\alpha^4}{Cos.\alpha^4}\right)}$$

$= \pm\, Cot.\alpha \sqrt{(u^2 - 4\,a^2.\,Tang.\alpha^4)}$ voor de vergelijking aan den eersten as, in welke alzoo $2\,a\,Tang.\alpha^2$ de halve eerste as is. Voorts vindt men uit deze vergelijking, $u = \pm\, Tang.\alpha \sqrt{(z^2 + 4\,a^2\,Tang.\alpha^2)}$, voor de vergelijking aan den tweeden as, waarin alzoo $4\,a^2\,Tang.\alpha^2$ het quadraat van den halven tweeden as beteekent; derhalve is de tweede door den eersten halven as gedeeld $= \frac{2\,a\,Tang.\alpha}{2\,a\,Tang.\alpha^2} = Cot.\alpha$, zoo als ook werkelijk voor dit geval in de vergelijking $z = \pm\, Cot.\alpha \sqrt{(u^2 - 4\,a^2\,Tang.\alpha^4)}$ voorkomt.

Daar nu verder de parameter p, bij de Hijperbool, de derde evenredige tot den eersten en twee-

tweeden as is, zoo heeft men $2\,a\,Tang.\alpha^2 : 2\,a\,Tang.\alpha = 2\,a\,Tang.\alpha : p$; dus is de parameter voor den grooten as, $p = \frac{4\,a^2\,Tang.\alpha^2}{2\,a\,Tang.\alpha^2} = 2\,a$.

Stelt men nu den afstand van het middelpunt C der Hijperbolen tot het brandpunt $= c$, den halven eersten as $= m$ en den halven tweeden as $= n$, zoo weet men dat bij de Hijperbool, $c^2 = m^2 + n^2$ is; maar voor ons geval is $m = 2\,a\,Tang.\alpha^2$ en $n = 2\,a\,Tang.\alpha$; dus $c^2 = 4\,a^2\,Tang.\alpha^4 + 4\,a^2\,Tang.\alpha^2 = 4\,a^2\,Sec.\alpha^2.\,Tang.\alpha^2$, en $c = 2\,a\,Sec.\alpha.\,Tang.\alpha$; maar $CU + Uq = 2\,a\,Tang.\alpha^2 + a.\left(\frac{1 - Sin.\alpha}{1 + Sin.\alpha}\right) Sin.\alpha = 2\,a.\frac{Sin.\alpha^2}{Cos.\alpha^2} + a.\frac{(1 - Sin.\alpha)^2}{Cos.\alpha^2} Sin.\alpha = a.\frac{1 + Sin.\alpha^2}{Cos.\alpha^2} Sin.\alpha$;

hierbij adderende $qF = a\,Sin.\alpha = a.\frac{Sin.\alpha.\,Cos.\alpha^2}{Cos.\alpha^2}$,

geeft $CF = \frac{a\,(1 + Sin.\alpha^2)\,Sin.\alpha}{Cos.\alpha^2} + \frac{a\,Cos.\alpha^2\,Sin.\alpha}{Cos.\alpha^2} = \frac{2\,a\,Sin.\alpha}{Cos.\alpha^2} = 2\,a\,Sec.\alpha.\,Tang.\alpha = c$;

dus is F het brandpunt van den Hijperbool, en de afstand van dit brandpunt tot den top U is $= 2\,a\,Sec.\alpha.\,Tang.\alpha - 2\,a\,Tang.\alpha^2 = 2\,a\,Tang.\alpha\,(Sec.\alpha - Tang.\alpha) = 2\,a\left(\frac{1 - Sin.\alpha}{Cos.\alpha^2}\right) Sin.\alpha = 2\,a.\frac{Sin.\alpha}{1 + Sin.\alpha}$.

N°. 131. Door

J. R. SCHMIDT. (*Zie Fig.* 118.)

§. 1. Laat de betrekking der snelheden, waarmede AB om het punt A en AC evenwijdig aan zich zelf bewogen wordt, zoodanig zijn, dat AB in den stand AP, dat is: loodregt op AC gekomen

men zijnde, AC in den ſtand DC gekomen is, dan is D eén punt van de kromme. Laat nu met AD als radius een cirkel beſchreven worden, dan is het uit de gelijkmatige beweging, waarin ieder der lijnen op zich zelve voortgaat, klaar, dat voor ieder punt M van de kromme, AQ : AD = *boog* . BR : *quadrant* BD zal zijn.

§. 2. Niets is dus gemakkelijker, dan onze kromme door punten te beſchrijven, en alzoo derzelver loop na te gaan: want laat de lijn AD en het quadrant BD ieder in een zelfde getal gelijke deelen verdeeld worden (*in de Figuur zijn er* 4), zoo wij dan de radien A1, A2, A3, A4 enz. trekken, en de lijnen 1C, 2C, 3C enz. evenwijdig aan AC maken, zullen hierdoor zoo veel punten 1, 2, 3 enz. van de kromme gevonden worden, en wij zullen alzoo het gedeelte ED van de kromme verkrijgen; het punt *E* echter uitgezonderd, om dat de lijnen aldaar op elkander liggende, geen ſnijpunt aantoonen.

§. 3. Zoo nu AB voortgaat, met rondom A te bewegen, en door de punten 5, 6, 7, van het tweede quadrant loopt, zal AC te gelijker tijd in 5C, 6C en 7C komen, en hierdoor worden de punten 5, 6 en 7, van de kromme bekend; doch AB in A8 komende, en dus eene halve omwenteling volbragt hebbende, zal zij, evenwijdig aan 8C zijnde, dezelve niet meer kunnen ſnijden, en C′FC zal bijgevolg eene Aſsijmptote van de tak EX zijn, waarvan alzoo den geheelen loop is bepaald.

§. 4. Laten wij nu AB door de punten 9, 10 en 11, van het derde quadrant loopen, dan komt AC agtervolgens in 9C, 10C en 11C, en wordt dan door het verlengde van A9, A10 en A11, geſneden in de punten 9, 10 en 11 van de kromme, tot dat de ſnijding van A12 met 12C het punt D′ geeft, waar de kromme voor de tweede keer AP ſnijdt: en AB op dezelfde

wij-

wijze door het vierde quadrant doende loopen, verkrijgen wij de punten 13, 14 en 15 van de kromme, tot dat A16; wederom evenwijdig met 16 C zijnde, eene tweede Asfijmptote C'GC aanwijst. Hierdoor is dan den loop van de geheele tak ZD'Y bepaald, welke geheel tusschen de Asfijmptoten C'FC en C'GC besloten ligt.

§. 5. Het geen tot nu toe gezegd is, zal reeds genoegzaam zijn om den verderen loop van onze kromme te doen opmaken. Bij de voortzetting van deze constructie bespeurt men namelijk ten duidelijkste, dat iedere halve omwenteling van AB eene nieuwe tak zal opleveren, welke tusschen twee Asfijmptoten besloten ligt; daar nu, bij elke halve omwenteling, AC eene ruimte doorloopt, zoo groot als tweemaal AD, blijkt hieruit dat deze Asfijmptoten alle op eenen gelijken afstand van elkander liggen, en welke afstand gelijk is aan tweemaal AD. En daar, bij elke vierde gedeelte van eene omwenteling, de lijn AC eene ruimte, gelijk aan AD, doorloopt, volgt hieruit, dat de punten 4, 12, 20 enz., waarin de kromme lijn AP snijdt, op gelijke afstanden van elkander liggen, en de lijnen AF, FG, GH enz. midden door deelen. Daar nu niets verhindert, om beide bewegende lijnen tot in het oneindige te doen voortloopen, zoo is het klaar, dat er een oneindig aantal zulke takken boven AC bestaan.

§. 6. Offchoon wij nu de beweging verondersteld hebben, begonnen te zijn, toen de twee lijnen AB en AC op elkander lagen, kan deze toestand echter niet anders begrepen worden, dan een gevolg van eene voorgaande beweging geweest te zijn; want even zoo duidelijk als het is, dat de beide lijnen hare beweging tot in het oneindige voortzetten, even klaar is het ook, dat men dezelve begrijpen moet, als bij deszelfs op elkander ligging, reeds eenen oneindigen tijd in beweging geweest te zijn. Om nu de takken, door

deze

deze voorgaande beweging te bepalen, moeten wij noodzakelijk onze conſtructie achterwaards voortzetten, en alzoo AC naar beneden in plaats van naar boven, en AB mede in eene tegenovergeſtelde rigting doen bewegen, en dan is het zonneklaar, dat er beneden AC eene figuur moet ontſtaan, volkomen Sijmetrisch met de figuur, welke wij boven AC gevonden hebben: en hierdoor verkrijgt dan de kromme, in haar geheel genomen, den vorm, welke in de figuur is aangewezen.

§. 7. Laat nu door A eene willekeurige lijn getrokken worden, welke de takken der kromme ſnijdt in M, M′, M″ enz. en m, m', m'' enz.; om dat er nu tusſchen de wording, van elke twee dezer punten, eene halve omwenteling verloopen is, volgt hieruit, dat $q''q'$, $q'q$, qQ, QQ′ enz. alle gelijk tweemaal AD, en dus gelijk aan elkander zijn. Maar dit zoo zijnde, moeten ook $m''m'$, $m'm$, mM, MM′ enz. gelijk aan elkander zijn; waaruit volgt, *dat elke lijn, welke door het punt A gaat, door de takken der kromme, in een oneindig aantal gelijke deelen gedeeld wordt*, en dit geeft een zeer gemakkelijk middel aan de hand, om alle de oneindige takken te conſtrueeren, wanneer ſlechts de middelſte tak X′EX geconſtrueerd is.

§. 8. Deze middelſte tak eens geconſtrueerd zijnde, is het ook zeer gemakkelijk, door derzelver behulp eenen gegevenen hoek in zoo veel gelijke deelen te verdeelen, als men begeert: want laat NAB de gegevene hoek zijn, dan is AQ : AO = *boog* BR : *boog* BRDR′; zoo nu AQ $= \frac{1}{n}$ AO genomen wordt, zal ook *boog* BR $= \frac{1}{n}$ *boog* BRDR′ en bijgevolg $\angle$ RAB $= \frac{1}{n} \angle$ NAB zijn.

§. 9.

§. 9. Laat ons nu overgaan, om de vergelijking van onze kromme te bepalen: Stellen wij ten dien einde $AD = 1$, en voor eenig punt M, $AQ = x$, $QM = y$ en BR of $\angle RAB = \phi$; dan is $AQ : AD =$ *boog* BR : *boog* BD (1), dat is $x : 1 = \phi : \frac{1}{2}\pi$, waaruit $\phi = \frac{1}{2}\pi x$; nu is in den regthoekigen driehoek AQM, $QM = AQ\ Tang.\ QAM$, of $QM = AQ.\ Cot.\ RAB = AQ.\ Cot.\ \phi$; zoo dat $y = x\ Cot.\ \frac{1}{2}\pi x$ de begeerde vergelijking is.

§. 10. Deze vergelijking bevestigt nu, al wat over den loop van onze kromme gezegd is; want uit dezelve blijkt:

1°. Dat x positief of negatief nemende, y dezelfde waarde behoudt, en dat dus de kromme aan beide zijden van AC denzelfden vorm heeft.

2°. Dat y, voor elke waarde van x, slechts eene waarde heeft, en dat x tusschen o en 1 nemende, dat is tusschen A en D, y positief, maar x tusschen 1 en 2, dat is tusschen D en F nemende, y negatief wordt, tot dat $x = 2$, y oneindig maakt, en dus de Assijmptote C′FC geeft.

3°. Dat x tusschen 2 en 3, dat is tusschen F en D′ nemende, y positief, maar x tusschen 3 en 4, dat is tusschen D′ en G nemende, y negatief wordt, tot dat $x = 4$ wederom y oneindig maakt, en dus de Assijmptote C′GC verschaft, en zoo voorts voor de volgende takken.

§. 11. Stellen wij $x = 0$, dan hebben wij $y = AE = 0 \times Cot.\ 0 = 0 \times \infty$; om de waarde van deze onbepaalde uitdrukking te vinden, schrijven wij de vergelijking aldus: $y = \dfrac{x\ Cos.\ \frac{1}{2}\pi x}{Sin.\ \frac{1}{2}\pi x}$; nemende nu de differentiaal van den teller en den noemer, zoo hebben wij

$$\frac{\delta x.\ Cos.\ \frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi x \delta x\ Sin.\ \frac{1}{2}\pi x}{\frac{1}{2}\pi \delta x.\ Cos.\ \frac{1}{2}\pi x}$$

dat is $\dfrac{Cos.\ \frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi x\ Sin.\ \frac{1}{2}\pi x}{\frac{1}{2}\pi.\ Cos.\ \frac{1}{2}\pi x}$, en stellende

 hier-

hierin $x = 0$, komt er $AE = \frac{2}{\pi}$. Wanneer dus het punt E door constructie kon bepaald worden, zou ook de quadratuur des cirkels gevonden zijn, en hierom is het, dat deze middelste tak den naam van *Quadratrix* draagt.

§. 12. Om nu de tangens van eenig punt M te bepalen, differentiëren wij onze vergelijking, en vinden na herleiding $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{Sin.\frac{1}{2}\pi x.Cos.\frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi x}{Sin^2.\frac{1}{2}\pi x}$; nemende nu de subtangens ST op den as der ordinaten, is $ST = x\frac{\partial y}{\partial x}$, dat is $ST = \frac{x\,Sin.\frac{1}{2}\pi x.Cos.\frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi x^2}{Sin^2.\frac{1}{2}\pi x} = x\,Cot.\frac{1}{2}\pi x -$ $\frac{\frac{1}{2}\pi x^2}{Sin^2.\frac{1}{2}\pi x} = y - \frac{\frac{1}{2}\pi x^2}{Sin^2.\frac{1}{2}\pi x}$. Wijl nu in de onderstelling van $ST = \frac{x\partial y}{\partial x}$, $AT = ST - y$ is, is $AT = -\frac{\frac{1}{2}\pi x^2}{Sin^2.\frac{1}{2}\pi x}$, welke negatieve waarde alleen aanduidt, dat AT hier in *dezelfde* rigting van de ordinaat y moet genomen worden.

Wij hebben dan $AT = \frac{\frac{1}{2}\pi x^2}{Sin^2.\frac{1}{2}\pi x}$; maar $MS = AM.Sin.MAS = MA.Sin.\frac{1}{2}\pi x = x$ zijnde, is $\frac{x}{Sin.\frac{1}{2}\pi x} = MA$, waardoor $AT =$ $\frac{1}{2}\pi\,AM^2$; maar $AE = \frac{2}{\pi}$ zijnde, is $\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{AE}$ en dus $AT = \frac{MA^2}{AE}$, en de tangens wordt dus gevonden door deze eenvoudige evenredigheid: $AE : MA = MA : AT$; welke eenvoudige constructie, zoo wel voor de oneindige takken, als voor de quadratrix, doorgaat.

§. 13. Het is klaar, dat ieder der oneindige tak-

takken, bij v. YD'Z, een buigpunt moet hebben, wijl zij, om beide lijnen C'GC en C'FC tot Asijmptoten te hebben, eerst met de holle en dan met de bolle zijde naar dezelve moet zijn gekeerd. Daar wij nu, om deze buigpunten te bepalen, de tweede differentiaal gelijk nul moeten stellen, differentieeren wij $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{Cos\frac{1}{2}\pi x . Sin\frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi x}{Sin^2 . \frac{1}{2}\pi x}$ op nieuw, en vinden, na herleiding . . . . . . $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\pi . (-1 + Cot . \frac{1}{2}\pi x \times \frac{1}{2}\pi x)}{Sin^2 . \frac{1}{2}\pi x}$; stellende dan $-1 + Cot . \frac{1}{2}\pi x \times \frac{1}{2}\pi x = 0$, komt er $\frac{1}{2}\pi x = \frac{1}{Cot . \frac{1}{2}\pi x}$, dat is: $\frac{1}{2}\pi x = Tang . \frac{1}{2}\pi x$. Om hierdoor de waarde van x, voor de buigpunten, te vinden, zouden wij dus het volgend voorstel moeten oplossen: *een boog te vinden, welke gelijk is aan deszelfs Tangens*. Men vindt de oplossing van dit voorstel bij EULER (*Introd. in An. Inf. Lib. 2. Cap. 26. §. 539*); hetzelve heeft een oneindig aantal oplossingen, welke de waarde van x, voor het oneindig aantal buigpunten aanduiden. De eerste waarde bij voorbeeld is $\frac{1}{2}\pi x = 0$ of $x = 0$, en dit geeft het punt D, hetwelk klaarblijkelijk in verband met onze buigpunten staat. De tweede oplossing is $\frac{1}{2}\pi x = 257^\circ\ 27'\ 12''$, hetwelk in deelen van den radius geeft, $x = 2, 86$ ten naaste bij; nemende dus $AA' = 2, 86$ AD, vinden wij hierdoor het buigpunt E'. En zoo voor de overige takken.

§. 14. Wij kunnen echter deze buigpunten gemakkelijker vinden; want stellende in $\frac{1}{2}\pi x\ Cot . \frac{1}{2}\pi x = 1$, y in plaats van $x\ Cot . \frac{1}{2}\pi x$, dan hebben wij $\frac{1}{2}\pi y = 1$ of $y = \frac{2}{\pi} =$ AE, waaruit wij leeren, dat door E eene loodlijn KK' op AC trekkende, deze alle de takken der kromme juist in de buigpunten zal doorsnijden: en hieruit

volgt verder, dat, de quadratrix met derzelfs takken, eens geconstrueerd zijnde, door middel van deze buigpunten, het voorstel in §. 13. vermeld, door constructie kan worden opgelost.

§. 15. Stellen wij AM $= u$, hebben wij $AM = \frac{MS}{Sin.\,MAS}$, dat is $u = \frac{x}{Sin.\,\varphi}$; daar nu $x = \frac{2\varphi}{\pi}$ (§. 9.), zoo is $u = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\varphi}{Sin.\,\varphi}$ de Pool-vergelijking van onze kromme, welke vergelijking de eigenschap, in §. 7. aangewezen, volkomen bevestigt; waarvan men zich kan overtuigen, door voor φ achtervolgens te schrijven $\varphi + \pi$, $\varphi + 2\pi$ enz.; want men zal dan zien, dat u hier bij ieder keer met $\frac{2}{Sin.\,\varphi}$ vermeerdert, beurtelings + en — wordende, dan op de bewegende lijn, en dan op derzelver verlengde moet genomen worden.

§. 16. Wij zullen deze oplossing besluiten met aan te merken, dat, wijl $Tang.\,\angle\,AMT = \frac{u\partial\varphi}{\partial u}$ is (*Opl. van het* 121 *Voorst.*) wij hier zullen hebben $Tang.\,\angle\,AMT = \frac{\varphi}{1 - \varphi\,Cot.\,\varphi}$; nu is voor de buigpunten $Tang.\,\varphi = \varphi$ of $Cot.\,\varphi = \frac{1}{\varphi}$ (§. 13.), zoo dat in de buigpunten $Tang.\,\angle\,AMT = \frac{\varphi}{1 - 1} = \infty$, dus $\angle\,AMT = 90^\circ$ is; waaruit volgt, dat de voerstralen van alle de buigpunten loodregt op de kromme staan.

N°. 132. Door

U. Huguenin.

Dit voorstel onthoudt twee gevallen:

1°. Als de kleinste, der in γ concentrische cirkels $D\alpha\beta$ (*Fig.* 119), met zijnen omtrek over eene regte lijn DE voortgerold wordt, terwijl het punt *H* des grootsten concentrischen cirkels $H\alpha b$ eene kromme lijn HXZX'K beschrijft.

2°. Wanneer de grootste dezer concentrische cirkels $D\alpha\beta$ (*Fig.* 120), op eene regte lijn DE voortgerold, en door het punt H des kleinsten cirkels $H\alpha b$ eene kromme lijn HXZX'K beschreven wordt.

Men stelle (*Fig.* 119 *en* 120) dat de voortrollende cirkel $D\alpha\beta$ de lijn DE in D raakt, en dat door D en het middelpunt γ eene onbepaalde regte lijn getrokken zij, welke op DE loodregt wezen zal, doordien, uit den aard van het voorstel, deze laatste lijn tangent aan den cirkel $D\alpha\beta$ in D is. Stel dat zich het punt H des grootsten cirkels in *fig.* 119 onder, en des kleinsten cirkels in *fig.* 120 boven het punt D, in deze loodlijn bevindt; laat voorts in de beide figuren HK evenwijdig aan DE zijn, dan zal, wanneer de cirkel $D\alpha\beta$ op DE voortrolt, de cirkel $H\alpha b$ zich met zijnen omtrek op de lijn HK bewegen; waarom dan ook deze lijn tangent aan dezen cirkel zijn zal.

Het is bekend, dat, bij de voortrolling van den cirkel $D\alpha\beta$ op DE, het punt D eene cijcloïde DAE beschrijft, zoodanig, dat, als het punt D in E gekomen is, de regte DE gelijk den omtrek des cirkels $D\alpha\beta$ wezen zal, en wanneer zich het punt D in A bevindt, in de op DE loodregte diameter ACB, dat alsdan DB = BE = den halven omtrek des teelenden cirkels $D\alpha\beta$ is. Het punt H des tweeden cirkels beschrijft te ge-

 lijker

lijker tijd eene kromme lijn van eene geheel andere natuur, welke echter eene naauwe betrekking op de cijcloïde heeft, en het punt H zal zich in Z, in den verlengden diameter BA (*Fig.* 119), of in dezen diameter zelve (*Fig.* 120) bevinden, als het punt D in A aangekomen is; terwijl voorts het punt H in K zal zijn, als het punt D in E komt.

Laten de beide concentrische cirkels zoo verre zijn voortgerold, dat hun gemeen middelpunt γ zich in O, en het punt D zich in M bevindt; dan zal het punt H zich in de verlengde MO (*Fig.* 119), of in MO (*Fig.* 120) zelf, in het punt F bevinden, zoodanig, dat FM = DH zijn zal. Zij voorts door het punt O, de op DE loodregte LN getrokken, zoo is N het raakpunt des cirkels $D\alpha\beta$ aan DE; wijders deele men de loodregte AB = $D\beta$ midden door in C, en beschrijve met CB als radius eenen cirkel BQA, welke gelijk aan den cirkel $D\alpha\beta$ zijn zal. Men trekke FG en MP evenwijdig aan DE, zoo zal de laatste den omtrek des cirkels AB in Q, en de loodregte LN in R snijden; en als men de radiën MO en QC, benevens de lijnen MN en QB, getrokken heeft, ziet men ligtelijk, dat de regthoekige driehoeken MRO en QPC, als mede MRN en QPB, gelijk en gelijkvormig zijn; waaruit volgt dat MNBQ een paralellogram is, en dus is MQ = NB = RP = LG.

Zij de radius des cirkels $D\alpha\beta$, $\gamma D = MO = QC = r$, en $DH = FM = a$, zoo is voor *fig.* 119, $\gamma H = FO = r + a$, en voor *fig.* 120, $\gamma H = FO = r - a$; laat voorts de verhouding van de radius tot den halven omtrek als 1 tot π zijn, en zij, voor de radius = 1, de boog, welke met den hoek QCA = MOR overeenkomt, = ϕ, dan is *boog* QA = $r\phi$; maar bij de cijcloïde is de lijn DN gelijk den afgerolden *boog* MN = *boog* BQ; derhalve moet de

boog

boog. QA, of $r\varphi$, gelijk BN $=$ MQ $=$ PR $=$ LG zijn, en doordien FL $=$ FO *Sin*. $\varphi = (r \pm a)$ *Sin*. φ is, heeft men FG $= (r \pm a)$ *Sin*. $\varphi + r\varphi =$ UI, als men FU loodregt op HK ftelt; waarin het teeken $+$ tot *fig*. 119, en het teeken $-$ tot *fig*. 120 behoort. Daar voorts ZC $= r \pm a$ en GC $=$ LO $= (r \pm a)$ *Cos*. φ is, zoo heeft men ZG $=$ ZC $-$ GC $= (r \pm a)(1 - Cos.\varphi)$.

Neemt men wijders den as, of middellijn ZI, als absoisfen-lijn aan, en ftelt men de abscis ZG $= x$ en de ordinaat FG $= y$, zoo heeft men (*Fig*. 119 en 120) $x = (r \pm a)(1 - Cos.\varphi)$ en $y = (r \pm a)$ *Sin*. $\varphi + r\varphi$. De vergelijkingen voor deze beide figuren alleen in het teeken van a verfchillende, zoo kunnen de vergelijkingen: $x = (r + a)(1 - Cos.\varphi)$ en $y = (r + a) Sin.\varphi + r\varphi$ voor figuur 119, ook voor figuur 120 dienen, en omgekeerd; als men a het tegengeftelde teeken geeft, waarom wij dan ook, het dubbele teeken, des goedvindende, kunnen weglaten.

Wij hebben langs dezen weg, voor de coördinaten x en y, twee bijzondere vergelijkingen gevonden, in welke eene derde veranderlijke grootheid φ voorkomt, en hoe zeer wij van dezelve, bij onze onderzoekingen, veel gebruik zullen maken, wegens hare gemakkelijkheid in de berekeningen, zoo zullen wij echter, uit dezelve, ook nog de vergelijking tusfchen x en y afleiden. Uit de waarde van x vindt men $Cos.\varphi = \frac{r \pm a - x}{r \pm a}$;

dus is $Sin.\varphi = \sqrt{(1 - Cos.\varphi^2)} = \sqrt{\frac{2(r \pm a)x - x^2}{(r \pm a)^2}}$

en $y = \sqrt{(2(r \pm a)x - x^2)} + r\, Arc.\, Cos.$ $\left(\frac{r \pm a - x}{r \pm a}\right)$ de vergelijking tusfchen de coördinaten.

Hernemen wij wederom onze eerst gevondene vergelijkingen $x = (r \pm a)(1 - Cos.\varphi)$ en

 $y =$

$y = (r \pm a)\ Sin.\ \varphi + r\varphi$, en stellen wij in dezelve $\varphi = o$, zoo is $Sin.\ \varphi = o$, $Cos\ \varphi = 1$ en $1 - Cos.\ \varphi = o$, waardoor x en y tevens $= o$ worden, hetwelk aantoont, dat in dit geval het punt F zich in den oorsprong der ordinaten en abscisfen bevindt, dat is in het punt Z.

Zij nu $\varphi = \pi$, dat is $= 180^o$, zoo is $Sin.\ \varphi = o$ en $Cos = -1$, gevolgelijk $x = 2\ (r \pm a) = ZI$ en $y = r\pi = HI = DB$, namelijk gelijk aan den halven omtrek des cirkels, welke de cijcloïde beschrijft: het punt F is alzoo voor dit geval in H.

Laat voorts $\varphi = \frac{1}{2}\pi = 90^o$ zijn, dan is $Cos.\ \varphi = o$ en $Sin.\ \varphi = 1$, derhalve $x = r \pm a$ en $y = r \pm a + \frac{1}{2} r\pi$. Het punt G bevindt zich dus voor dit geval in het middelpunt des cirkels C, en het punt F in f, als fC loodregt in C op ZI is. Voorts is $fC = y = (r \pm a) + \frac{1}{2} r\pi = ZC + \frac{1}{2} DB = \frac{1}{2}\ (ZI + DB)$; waaruit blijkt, dat in *fig.* 119 het punt f buiten de loodlijn H b zal gelegen zijn, als ZI > DB is; wijl alsdan $\frac{1}{2}$(ZI + DB) > DB wezen zal; in welk geval zich dan ook een gedeelte der kromme lijn HXfS buiten de loodlijn Hb bevindt.

In *fig.* 120 daarentegen, is ZI < AB en dus ook kleiner dan den halven omtrek DB, dienvolgens bevindt zich, bij deze figuur, het punt f steeds tusfchen y en C.

Doordien (*Fig.* 119 en 120) $mG^2 = ZG \times GI = ZC^2 - CG^2 = (r \pm a)^2\ (1 - Cos.\ \varphi^2) = (r \pm a)^2 .\ Sin.\ \varphi^2$ is, zoo is $mG = (r \pm a)\ Sin.\ \varphi$ en $Fm = FG - mG = r\varphi = boog.\ QA$; voorts is HI = DB = *boog*. BQA, en daar volgens de eigenschap des cirkels QC : mC = *boog*. QA : *boog*. mZ = *boog*. BQA ; *boog*. ImZ is, zoo is ook *boog*. QA : *boog*. BQA = *boog*. mZ : *boog*. ImZ; dat is Fm : HI = *boog*. mZ : *boog*. ImZ.

Ingevolge hiervan kan men ook Hab, of ImZI, als teelende cirkel beschouwen, welke over HK voort-

voortgaande en draaijende bewogen wordt, zoodanig, dat, als de cirkel in I komt, het punt H zich in Z beyindt, in dier voege, dat voor elk punt F der kromme lijn, de zoo even gevondene evenredigheid plaats heeft, zoo beschrijft het punt H onze reeds beschrevene kromme lijnen *fig.* 119 en 120; te weten: *fig.* 119, als HI $<$ *boog*. ImZ, en *fig.* 120, als HI $>$ *boog*. ImZ is; waarom dan ook de Wiskundigen, *fig.* 119 de *verkorte*, en *fig.* 120 de *verlengde* cijcloïde noemen, alzoo bij de gewone cijcloïde HI $=$ *boog*. ImZ is.

Om te onderzoeken, of er bij deze kromme lijnen, *fig.* 119 en 120, ook een maximum der ordinaten plaats heeft, differentiere men de waarden van x en y, waardoor men bekomt $\delta x = (r \pm a)\, Sin.\, \varphi . \delta\varphi$ en $\delta y = (r \pm a)\, Cos.\, \varphi . \delta\varphi + r\delta\varphi$, dus moet $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{(r \pm a)\, Cos.\, \varphi + r}{(r \pm a)\, Sin.\, \varphi} = 0$ zijn; waaruit men vindt, $Cos.\, \varphi = \frac{-r}{r \pm a}$ en $Sin.\, \varphi = \surd\left(1 - \frac{r^2}{(r \pm a)^2}\right)$; van deze waarden zijn alleen $Cos.\, \varphi = \frac{-r}{r+a}$ en $Sin.\, \varphi = \surd\left(1 - \frac{r^2}{(r+a)^2}\right)$ voor *fig.* 119 mogelijk; daarentegen zijn $Cos.\, \varphi = \frac{-r}{r-a}$ en $Sin.\, \varphi = \surd\left(1 - \frac{r^2}{(r-a)^2}\right)$ voor *fig.* 120 onmogelijke waarden, doordien $\frac{-r}{r-a} > -1$ en $\surd\left(1 - \frac{r^2}{(r-a)^2}\right)$ imaginair zijn; waaruit blijkt, dat bij de kromme lijn *fig.* 120 geen maximum der ordinaten plaats heeft; bij *fig.* 119 daarentegen, heeft men voor het maximum, daar $Sin.\, \varphi = \surd\left(1 - \frac{r^2}{(r+a)^2}\right) = \frac{\surd(2ra + a^2)}{r+a}$ is,

 $x =$

$$x = (r + a)\left(1 + \frac{r}{r + a}\right) = 2r + a = ZB, \text{ en}$$

$$y = \sqrt{(2ra + a^2)} + r\ Arc.\ Cos.\ \frac{-r}{r + a} = BX;$$

alzoo, uit de waarde van x blijkt, dat de grootste ordinaat zich op de basis DE der cijcloïde bevindt; dat is op den afstand HD $= a$ van de basis HK der kromme lijn. Wij dienen nu nog aan te toonen, dat de gevondene waarde van BX, grooter dan BD is (*).

De $Cos.\ \varphi = \frac{-r}{r + a}$, negatief zijnde, behoort tot eenen boog, die grooter dan het vierde gedeelte des omtreks is; om dezen boog te bepalen, rigte men in δ eene loodlijn op $\gamma\delta$, welke den grootsten cirkel in d snijdt; voorts trekke men uit d, door het middelpunt γ, tot den omtrek des kleinsten cirkels in ε, de lijn $d\varepsilon$; zoo is $\delta d = \sqrt{(\gamma d^2 - \gamma\delta^2)} = \sqrt{[(r + a)^2 - r^2]} = \sqrt{(2ar + a^2)}$; en daar $\gamma d : \gamma\delta = 1 : Cos.\ d\gamma\delta$ en alzoo $Cos.\ d\gamma\delta = \frac{\gamma\delta}{\gamma d} = \frac{r}{r + a}$ is, zoo behoort $\angle\ d\gamma\delta = \angle\ \alpha\gamma\varepsilon$ tot eenen boog, wiens cosinus is $\frac{r}{r + a}$; derhalve behoort $\angle\ \alpha\gamma d = \angle\ \varepsilon\gamma\delta$ tot eenen boog, welke $\frac{-r}{r + a}$ tot cosinus heeft; dus is $boog\ \varepsilon D\delta = r\ Arc.\ Cos.\ \frac{-r}{r + a}$; waar-

(*) Dat de gevondene waarde van y een wezenlijk maximum is, zou uit de verkennings-vergelijking $\frac{\partial\partial y}{\partial x^2} =$ enz. kunnen blijken, als men niet, uit de voortbrenging dezer figuur, oogenschijnlijk daarvan overtuigd was.

waaruit dan volgt, dat de lijn $BX = \delta d + boog.\,\delta D\delta$ zijn zal; maar $\delta d > boog.\,\delta\lambda$, derhalve $BX = \delta d + boog.\,\delta D\delta > boog.\,\delta D\delta\lambda$; dat is BX > dan den halven omtrek des cirkels $D\alpha\beta\delta$, en dus ook grooter dan DB. Voorts volgt hieruit, dat $XD = BX - BD = \delta d + boog.\,\delta D\delta - boog.\,\delta D\delta\lambda = \delta d - boog.\,\delta\lambda$ is.

Daar het punt H, hetwelk bij *fig.* 119 de kromme beschrijft, zich van H, door X, naar Z beweegt, zal hetzelve de lijn Hb ergens in een punt S snijden: het is opmerkingswaardig, dat, hoe zeer ook de ordinaat voor dit punt gelijk aan de bekende lengte DB is, hetzelve zich echter niet, dan door eene transcendentische vergelijking laat bepalen; want voor dit punt, $y = (r + a)\,Sin.\,\varphi + r\varphi = BD = r\pi$ zijnde, zoo volgt hieruit, dat $Sin.\,\varphi = \frac{r}{r+a}(\pi - \varphi)$ wezen moet, en deze vergelijking laat zich niet anders dan door eene oneindige reeks oplossen: want zoo men den *boog*. φ begeert te vinden, moet men in dezelve

$$Sin.\,\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{2 \cdot 3} + \frac{\varphi^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \text{enz.}$$ substitueren; begeert men echter de Sinus van dezen boog te vinden, zoo substituere men in deze vergelijking,

$$\varphi = Sin.\,\varphi + \frac{Sin^3.\,\varphi}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 3\,Sin^5.\,\varphi}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7\,Sin^7.\,\varphi}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \text{enz.};$$ in beide gevallen echter moet de waarde van φ, of van $Sin.\,\varphi$, door omkeering van de gebruikte reeks, bepaald worden; doch, dewijl zulks niets belangrijks kan opleveren, zullen wij ons hiermede niet ophouden.

Ten einde een tangent Ft aan eenig punt F der kromme lijnen, *fig.* 119 en 120, te trekken, zullen wij ons van de bekende formule voor de

sub-

ſubtangent $tG = \frac{y \partial x}{\partial y}$ bedienen, en hierin de gevondene waarden van $\partial x = (r \pm a) \, Sin.\varphi \partial \varphi$ en $\partial y = (r \pm a) \, Cos.\varphi . \partial \varphi + r \partial \varphi$ ſubſtitueren, waardoor wij bekomen

$$tG = \frac{[(r \pm a) \, Sin.\varphi + r\varphi] \, (r \pm a) \, Sin.\varphi}{(r \pm a) \, Cos.\varphi + r}$$

Maar $FG = (r \pm a) \, Sin.\varphi + r\varphi$, $mG = (r \pm a) \, Sin.\varphi$ en $GB = (r \pm a) \, Cos.\varphi + r$; derhalve is $tG = \frac{FG \times mG}{GB}$, de vierde evenredige tot GB, FG en mG; daarentegen is bij de gewone cijcloïde de tangent Mt' evenwijdig met de koorde QA; want zoo men in onze gevondene waarden, $a = 0$ ſtelt, valt F in M, Z in A, t in t', en G in P, en men heeft $MP = r \, Sin.\varphi + r\varphi$, $QP = r \, Sin.\varphi$, $AP = r \, (1 - Cos.\varphi)$ en

$$t'P = \frac{(r \, Sin.\varphi + r\varphi) \, r \, Sin.\varphi}{r \, Cos.\varphi + r} = \frac{(r \, Sin.\varphi + r\varphi) \, Sin.\varphi}{1 + Cos.\varphi};$$

dus is $MP : t'P = r \, Sin.\varphi + r\varphi : \frac{(r \, Sin.\varphi + r\varphi) \, Sin.\varphi}{1 + Cos.\varphi}$ $= 1 + Cos.\varphi : Sin.\varphi = 1 - Cos.\varphi^2 : Sin.\varphi \, (1 - Cos.\varphi) = Sin.\varphi^2 : Sin.\varphi \, (1 - Cos.\varphi) = Sin.\varphi : 1 - Cos.\varphi = r \, Sin.\varphi : r \, (1 - Cos.\varphi)$; waaruit blijkt, dat bij de cijcloïde $MP : t'P = QP : AP$ is, en dat alzoo Mt' en QA evenwijdige lijnen zijn.

De formule voor de ſubtangent tG wordt $= 0$, als men in dezelve $\varphi = 0$, of $\varphi = \pi$ ſtelt, wijl in deze beide gevallen $Sin.\varphi = 0$ wordt; en hieruit blijkt, daar in het eerſte geval het punt F in Z valt, dat de tangent aan dit punt loodregt op de lijn der abſciſſen ZI ſtaat, doordien er geen ſubtangent bij plaats heeft; hetwelk ook voor $\varphi = \pi$ het geval is, waardoor het punt F in H is, en de tangent aan dit punt op YHI valt, en alzoo ook regthoekig op de lijn der abſciſſen ZI ſtaat,

Als

Als men den hoek FOL of $\phi = \angle fCZ = 90^o$ ſtelt, valt F in f, en men heeft $\phi = 90^o = \frac{1}{2}\pi$, $Sin.\phi = 1$ en $Cos.\phi = 0$, dus is de ſubtangent voor het punt f gelijk $\frac{(r \pm a)^2}{r} + \frac{1}{2}(r \pm a).\pi$.

Om de ſubtangent voor het punt X, *fig.* 119, te bepalen, heeft men ingevolge het hier vóór gevondene: $Cos.\phi = \frac{-r}{r+a}$, $Sin\phi = \frac{\sqrt{(2ra+a^2)}}{r+a}$ en $\phi = Arc.Cos\frac{-r}{r+a}$; derhalve is de ſubtangent voor dit punt,

$$\frac{\left(\sqrt{(2ra+a^2)} + r\,Arc.Cos\frac{-r}{r+a}\right)\sqrt{(2ra+a^2)}}{(r+a).\frac{-r}{r+a}+r} = \infty$$

wijl de noemer $-r + r = 0$ is, derhalve is de ſubtangent voor het punt X oneindig groot, waaruit volgt, dat de tangent aan dit punt evenwijdig met de lijn der abſciſſen ZI is, en dat alzoo het punt X geen keerpunt wezen zal, wijl bij een zoodanig punt de ſubtangent *nul* is, doordien de tangent van een zoodanig punt loodregt op de lijn der abſciſſen ſtaat. Voorts blijkt ook nog hieruit, dat de kromme lijn HXS met hare holle zijde naar de lijn Hb gekeerd zij, wijl het tegengeſtelde bij een keerpunt plaats heeft. Uit dien hoofde, en dewijl BX, *fig.* 119, het eenigſte gevonden *maximum* der ordinaten is, volgt hieruit, dat bij deze kromme lijn geen keerpunten plaats hebben, gelijk er ook geene bij *fig.* 120 kunnen voorkomen, alzoo bij deze figuur, gelijk wij gezien hebben, geen maximum der ordinaten mogelijk is.

Het zal nu nog noodig zijn te onderzoeken, of deze kromme lijnen, *fig.* 119 en 120, ook buigpunten hebben, waartoe ons de bekende vergelij-

king

king $\frac{\partial\partial y}{\partial x^2} = 0$ dienen moet, (*zie* 4de *Stukje der Verz. van Voorst. pag.* 245) daar echter in de tweede differentiaal van $y = (r \pm a) Sin. \phi + r\phi$, de differentiale uitdrukking van den *boog* $r\phi$ uit de vergelijking verdwijnt, als men $\partial\phi$ als standvastig aanneemt, zoo zullen wij ons bij deze onderzoeking, van de hier voor gevondene vergelijking tusschen x en y, namelijk van

$$y = \sqrt{(2(r \pm a)x - x^2)} + r\, Arc.\, Cos.\left(\frac{r \pm a - x}{r \pm a}\right)$$

bedienen, bij welke deze zwarigheid geen plaats heeft.

Om de differentiaal van $Arc.\, Cos.\, \frac{r \pm a - x}{r \pm a}$ te vinden, merke men op, daar $\partial\, Cos.\, \phi = -Sin.\, \phi \partial\phi$ is, dat $\partial\phi = -\frac{\partial\, Cos.\, \phi}{Sin.\, \phi}$ zijn moet; maar $Cos.\, \phi = \frac{r \pm a - x}{r \pm a}$; dus $\partial\, Cos.\, \phi = \frac{-\partial x}{r \pm a}$; en daar wijders $Sin.\, \phi = \sqrt{(1 - Cos.\, \phi^2)} = \frac{\sqrt{(2(r \pm a)x - x^2)}}{r \pm a}$ is, zoo is $\partial\phi$, of $\partial\, Arc.\, Cos.\, \frac{r \pm a - x}{r \pm a} = \frac{\partial x}{\sqrt{(2(r \pm a)x - x^2)}}$, en $\partial y = \frac{(r \pm a)\partial x - x\partial x}{\sqrt{(2(r \pm a)x - x^2)}} + \frac{r\partial x}{\sqrt{(2(r \pm a)x - x^2)}}$ $= \frac{(2r \pm a - x)\partial x}{\sqrt{(2(r \pm a)x - x^2)}}$; derhalve is $\partial\partial y =$ $\frac{-\partial x^2}{\sqrt{(2(r \pm a)x - x^2)}} - \frac{(2r \pm a - x).(r \pm a - x)\partial x^2}{(2(r \pm a)x - x^2)^{\frac{3}{2}}} =$ $-\frac{[(2r \pm a)(r \pm a) - rx]\partial x^2}{(2(r \pm a)x - x^2)^{\frac{3}{2}}}$, als men ∂x als standvastig beschouwt. Diensvolgens is $\frac{\partial\partial y}{\partial x^2} = -\frac{[(2r \pm a)(r \pm a) - rx]}{(2(r \pm a)x - x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$; en hier-

doot

door vindt men $x = \frac{(2r \pm a)(r \pm a)}{r} = 2r \pm 3a + \frac{a^2}{r}$; namelijk voor *fig.* 119 is $x = 2r + 3a + \frac{a^2}{r} =$ $ZI + a + \frac{a^2}{r}$; hetwelk aantoont, dat, zoo deze kromme lijn een buigpunt heeft, de ordinaat van dit punt onder de lijn HK valt, op eenen afstand, welke $= a + \frac{a^2}{r}$ is, hetwelk niet zijn kan, doordien er geen gedeelte der kromme lijn onder HK bestaat, zoo als ook uit de vergelijking $y = \sqrt{(2(r+a)x - x^2)} + r\,Arc.Cos.\left(\frac{r+a-x}{r+a}\right)$ blijkt; want zoo men hierin $x = 2(r+a) + a + \frac{a^2}{r}$ substitueert, wordt $\sqrt{(2(r+a)x - x^2)}$ *imaginair* en men bekomt voor de cosinus: $\frac{r+a-x}{r+a}$, eene negatieve waarde, welke grooter dan -1 is; derhalve is zulk eene ordinaat onmogelijk, en deze kromme lijn heeft geen buigpunt. Geheel anders is het met de kromme lijn *fig.* 120 gelegen, voor welke wij de abscis: $x = 2r - 3a + \frac{a^2}{r} =$ $ZI - a + \frac{a^2}{r} = ZI - \frac{a(r-a)}{r} = ZI - \frac{a \, . \, CI}{r}$ hebben gevonden; want doordien $\frac{a \, . \, CI}{r} < CI$ is, zoó zal, als $IV = \frac{a \, . \, CI}{r}$ gemaakt wordt, $x =$ $ZI - IV = ZV$ zijn, en de tot het punt V behoorende ordinaat VX, zal die voor het buigpunt X zijn; als men nu $x = \frac{(2r-a)(r-a)}{r}$ in de waarde van de ordinaat substitueert, bekomt men

met VX, of y, $= \sqrt{\left[\frac{a(r-a)^2(2r-a)}{r_2}\right]}$ $+ r\,Arc.Cos.\frac{-(r-a)}{r} = \frac{r-a}{r}\sqrt{a(2r-a)} +$ $r\,Arc.Cos.\frac{-(r-a)}{r}$, hetwelk eene mogelijke waarde is.

Ten einde de kromteſtraal K, van eenig punt P aan deze kromme lijnen, *fig.* 119 en 120, te bepalen, zullen wij ons van de daartoe dienende bekende formule: $K = \frac{(\delta x^2 + \delta y^2)^{\frac{3}{2}}}{-\delta x\,\delta\delta y}$ bedienen, welke voor regthoekige coördinaten ingerigt is. Het bewijs van deze formule, te wijdloopig zijnde, hier bij te voegen, kan men vinden in VEGA, *Vorlesungen über die Mathematick, zweyter Band*, § 698, 2te *Auflage*.

Volgens onze laatst gevondene waarden van δy en $\delta\delta y$ heeft men:

$$\delta x^2 + \delta y^2 = \delta x^2 + \frac{(2r \pm a - x)^2\,\delta x^2}{2(r \pm a)x - x^2}$$

$$= \frac{[(2r \pm a)^2 - 2rx]\,\delta x^2}{2(r \pm a)x - x^2}$$

$$(\delta x^2 + \delta y^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{[(2r \pm a)^2 - 2rx]^{\frac{3}{2}}\,\delta x^3}{[2(r \pm a)x - x^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{en } K = -\frac{(\delta x^2 + \delta y^2)^{\frac{3}{2}}}{\delta x\,\delta\delta x} = \frac{[(2r \pm a)^2 - 2rx]^{\frac{3}{2}}}{(2r \pm a)(r \pm a) - rx}$$

Deze vergelijking verandert in de bekende uitdrukking voor de kromteſtraal der gewone cijcloïde, als men in dezelve $a = 0$ ſtelt, wijl men hierdoor bekomt

$$K = \frac{(4r^2 - 2rx)^{\frac{3}{2}}}{2r^2 - rx} = 2\sqrt{2r(2r - x)}$$

Subſtitueert men in onze gevondene uitdrukking, $x = (r \pm a)(1 - Cos.\phi)$, zoo bekomt men eene uitdrukking voor de kromteſtraal, waarin de veranderlijke boog ϕ voorkomt, namelijk

K =

$$K = \frac{[a^2 + 2r(r \pm a)(1 + Cos.\varphi)]^{\frac{3}{2}}}{(r \pm a)(r \pm a + r\,Cos.\varphi)}$$

welke, voor $a = 0$, in die voor de cijcloïde,

$$\frac{[2r^2(1 + Cos.\varphi)]^{\frac{3}{2}}}{r^2(1 + Cos.\varphi)} = 2r\sqrt{2(1 + Cos.\varphi)} =$$

$4r\,Cos.\frac{1}{2}\varphi$, verandert.

Stelt men in onze formule $\varphi = 0$, zoo is $Cos.\varphi = 1$, en daar voor dit geval het punt F in Z valt, zoo is de kromteſtraal voor dit punt

$$K = \frac{[a^2 + 4r(r \pm a)]^{\frac{3}{2}}}{(r \pm a)(2r \pm a)} = \frac{(2r \pm a)^3}{(r \pm a)(2r \pm a)} = \frac{(2r \pm a)^2}{(r \pm a)}$$

Stelt men daarentegen $\varphi = \pi$, zoo valt F in H, en de kromteſtraal voor dit punt is $=$

$$\frac{(a^2)^{\frac{3}{2}}}{\pm a(r \pm a)} = \frac{\pm a^2}{r \pm a};$$ namelijk, voor *fig.* 119 is dezelve $= \frac{a^2}{r \pm a}$ en voor *fig.* 120, $= \frac{-a^2}{r - a}$; hetwelk aantoont, dat deze kromteſtraal (*Fig.* 120) voor het punt H, niet binnenwaarts, maar van H naar *b*, buiten de kromme lijn valt; daar bij *fig.* 119, voor het punt H, deze kromteſtraal zich ook wel van H naar *b* uitſtrekt, doch geenzins eene tegenovergeſtelde kromming aantoont, zoo als bij *fig.* 120 plaats heeft. Voorts blijkt uit de tegengeſtelde teekens van de kromteſtralen der punten Z en H bij deze figuur, dat dezelve noodzakelijk een buigpunt hebben moet, gelijk wij ook voor het punt X, *fig.* 120, gevonden hebben.

Om de lengte der kromteſtraal voor dit buigpunt te vinden, ſubſtituere men de voor dit punt gevondene waarde der abscis $x = \frac{(2r - a)(r - a)}{r}$ in de uitdrukking der kromteſtraal, zoo bekomt men

$$K = \frac{[(2r - a)^2 - 2(2r - a)(r - a)]^{\frac{3}{2}}}{(2r - a)(r - a) - (2r - a)(r - a)} = \infty$$

hetwelk aantoont, dat de kromtestraal voor het buigpunt X oneindig groot is, zoo als ook inderdaad behoort te zijn; want doordien de kromme lijn in het buigpunt, zich niet naar de eene of andere zijde kromt, zoo heeft dezelve in dit punt hoegenaamd geene kromming, en is dienvolgens aldaar als eene regte lijn, of eenen cirkel te beschouwen, welke eenen radius van eene oneindige lengte heeft, zoo als wij ook werkelijk gevonden hebben.

De kromme lijn *fig.* 119, welke geen buigpunt heeft, gelijk *fig.* 120, heeft daarentegen eene andere eigenschap, die *fig.* 120 niet bezit: namelijk, wanneer de rollende cirkels voortgaan, met twee dusdanige kromme lijnen nevens elkander te beschrijven, zoo vormen dezelve een knoop; want als de cirkel H*ab*, *fig.* 119, met zijn middelpunt in γ' aangekomen is, waardoor de punten D en H zich in E en K zullen bevinden, en van daar voortgaat, met het schrijvende punt, in K beginnende, eene nieuwe kromme lijn KG'T te beschrijven, zoo zal (daar deze kromme lijn volmaakt gelijk de eerste HXS is) het punt G' met het punt X der eerste kromme *lijn* overeenkomen, en dienvolgens zal dit punt tusschen B en E gelegen zijn, in diervoege, dat G'E = XD zijn zal; voorts zal het schrijvende punt ook de loodregte op de basis in K, ergens in een punt T, welk punt met het punt S overeenkomt, zoo dat ook KT = HS zijn zal, snijden; en daar het overigens zigtbaar is, dat de tweede helft der eerste kromme lijn ZTX'K, even zoo als de eerste helft derzelve, ZSXH, kan worden beschreven, en hier bij alles plaats vindt, wat van de eerste helft gezegd is, zoo zal ook deze tweede helft der kromme lijn, de loodregte in K, op eenen afstand van K, welke gelijk HS is, dat is, in het reeds gemelde punt T snijden, en voorts de verlengde ordinaat XB in X' ontmoeten, zoodanig

danig, dat EX′ = DX zij, alvorens in het punt K aan te komen; waaruit dan zigtbaar is, dat bij de tweede ronddraaijing des cirkels, door het fchrijvende punt, de knoop TX′KG′T befchreven wordt, van welke de breedte G′X′ = 2 XD = 2 (δd — *boog*. $\delta\lambda$) is, en de hoogte KT = HS van de oplosfing der vergelijking $Sin.\varphi = \frac{r}{r+x}(x-\varphi)$ afhangt, zoo als wij hier voren reeds hebben aangemerkt; en daar wij deze vergelijking niet anders, dan door omkeering van eene oneindige reeks kunnen oplosfen, en de bepaling der fubtangent en kromteftraal voor dit knooppunt T mede van φ, $Sin.\varphi$ en $Cos.\varphi$, en alzoo ook van deze vergelijking afhangen, zoo zullen wij, om niet wijdloopig te zijn, zulks aan de beöefening der jonge liefhebbers overlaten.

Tot het bepalen van den inhoud der kromlijnige vlakte GFZ, *fig.* 119 en 120, fubftituere men in de differentiaal uitdrukking van alle vlakken met regtftandige coördinaten, $y\delta x$, de waarde van $y = (r \pm a) Sin.\varphi + r\varphi$ en $\delta x = (r \pm a) Sin.\varphi\delta\varphi$, waardoor wij voor ons geval hebben,

$$y\delta x = (r \pm a)^2 Sin.\varphi^2\delta\varphi + r(r \pm a)\varphi Sin.\varphi\delta\varphi$$

of integrerende

$$\int y\delta x = (r \pm a)^2 \int Sin.\varphi^2\delta\varphi + r(r \pm a)\int\varphi Sin.\varphi\delta\varphi$$

Nu is (*zie bijvoegfel B*), $\int Sin.\varphi^2\delta\varphi = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2} Sin.\varphi\, Cos.\varphi$; en daar $\delta(\varphi\, Cos.\varphi) = -\varphi\, Sin.\varphi\delta\varphi + Cos.\varphi\delta\varphi$ is, zoo is $\varphi\, Sin.\varphi\delta\varphi = Cos.\varphi\delta\varphi - \delta(\varphi\, Cos.\varphi)$; dus $\int\varphi\, Sin.\varphi\delta\varphi = Sin.\varphi - \varphi\, Cos.\varphi$. Subftitueert men voorts deze waarden in onze integraal, zoo heeft men den inhoud der vlakte ZFG, of

$$\int y\delta x = \tfrac{1}{2}(r \pm a)^2\varphi - \tfrac{1}{2}(r \pm a)^2 Sin.\varphi\, Cos.\varphi + r(r \pm a) Sin.\varphi - r(r \pm a)\varphi\, Cos.\varphi;$$

waarbij geen ftandvastige grootheid behoeft gevoegd te worden, wijl voor $\varphi = 0$ alle de leden van deze integraal nul worden.

Om den inhoud van de geheele kromlijnige

 vlakte

vlakte IHXZI te bekomen, ftelle men $\phi = \pi =$ den boog van 180°, zoo is $Sin.\phi = 0$, $Cos.\phi = -1$, en daar hierdoor de twee middelfte leden $= 0$ worden, zoo heeft men voor den inhoud der vlakte

$HXSZ = \frac{1}{2}(r \pm a)^2 \pi + r(r \pm a)\pi \ldots\ldots$
$\ldots\ldots = \frac{1}{2}(r \pm a)(3r \pm a)\pi$

en daar de tweede helft IZX'K volmaakt gelijk de eerfte is, zoo is dan de inhoud der geheele vlakte $HXZX'K = (r \pm a)(3r \pm a)$.

Stelt men hier in $a = 0$, zoo vindt men den inhoud der gewone cijcloïde $DAE = 3r^2\pi$; dat is gelijk driemaal den inhoud des teelenden cirkels, zoo als ik vermeen het eerst door ROBERVAL in het jaar 1637 gevonden te zijn.

Voor *fig.* 119 laat zich hieruit nog den inhoud van het ringvormig gedeelte HXZX'KEADH afleiden; want zoo men den inhoud des regthoeks $HDEK = 2ar\pi$ en der cijcloïde $DAE = 3r^2\pi$, van den gevondenen inhoud $HXZX'K = (r+a)(3r+a)\pi$ aftrekt, rest er de inhoud des gemelden rings $= a(2r+a)\pi$; die echter gelijk $3r^2\pi$, of den inhoud der cijcloïde wordt, als men $a = r$ ftelt; doch in dit geval is de inhoud onzer kromlijnige figuur $HXZX'K = 8r^2\pi$; dat is gelijk achtmaal den inhoud van den teelenden cirkel der cijcloïde, of gelijk den dubbelen inhoud van den cirkel H*ab*H.

Wanneer de kromlijnige vlakte HXFZI, *fig.* 119 en 120, om HK als as wordt rondgedraaid, befchrijft dezelve een rond ligchaam, hetwelk een cirkel tot grondvlakte heeft, waarvan $ZI = 2(r \pm a)$ de radius is. Laat ons den inhoud van dit ligchaam bepalen. Tot dit einde ftelle men zich voor, dat de vlakte UFZI eene omwenteling om UI als as gedaan heeft, alsdan heeft FU een cirkel befchreven, van welken de inhoud $= FU^2\pi$ is; vermenigvuldigt men deze veranderlijke cirkelvlakte met de differentiaal van FG, dat is met δy,

zoo heeft men voor het element, of de differentiaal van het beschrevene ligchaam, de uitdrukking $\pi\, FU^2 . \partial y$; maar $FU = GI = ZI - ZG = 2(r \pm a) - (r \pm a)(1 - Cos.\varphi) = (r \pm a)(1 + Cos.\varphi)$; derhalve is $\pi\, FU^2 = \pi (r \pm a)^2 (1 + 2\, Cos.\varphi + Cos.\varphi^2)$; hetwelk vermenigvuldigd met $\partial y = (r \pm a)\, Cos.\varphi\, \partial\varphi + r\,\partial\varphi$, geeft de differentiaal, van het door ronddraaijing voortgebragte ligchaam, $\pi . FU^2 \partial y = \pi (r \pm a)^3 Cos.\varphi^3 \partial\varphi + [2\pi (r \pm a)^3 + \pi r (r \pm a)^2]\, Cos.\varphi^2\, \partial\varphi + \ldots [\pi(r \pm a^3 + 2\pi r)\,(r \pm a)^2]\, Cos.\varphi\partial\varphi + \pi r (r \pm a)^2 \partial\varphi = \pi (r \pm a)^3 Cos.\varphi^3 \partial\varphi + \pi (3r \pm 2a)(r \pm a)^2 Cos.\varphi^2 \partial\varphi + \pi (3r \pm a)(r \pm a)^2 Cos.\varphi\partial\varphi + \pi r (r \pm a)^2 \partial\varphi$.

Om deze uitdrukking te integreren, heeft men (zie *Bijvoegsel* A) $\int Cos.\varphi^3 \partial\varphi = \frac{1}{3} Sin.\varphi\, Cos.\varphi^2 + \frac{2}{3} Sin.\varphi = Sin.\varphi - \frac{1}{3} Sin.\varphi^3$; $\int Cos.\varphi^2 \partial\varphi = \frac{1}{2} Sin.\varphi\, Cos.\varphi + \frac{1}{2}\varphi$ en $\int Cos.\varphi\, \partial\varphi = Sin.\varphi$; derhalve is de integraal van dit ligchaam . . . . $\int \pi\, FU^2 \partial y = \pi (r \pm a)^3 Sin.\varphi - \frac{1}{3}\pi (r \pm a)^3 Sin.\varphi^3 + \frac{1}{2}\pi (3r \pm 2a)(r \pm a)^2 Sin.\varphi\, Cos.\varphi + \frac{1}{2}\pi (3r \pm 2a)(r \pm a)^2 \varphi + \pi (3r \pm a)(r \pm a)^2 Sin.\varphi + \pi r (r \pm a)^2 \varphi = 2\pi (2r \pm a)(r \pm a)^2 Sin.\varphi - \frac{1}{3}\pi (r \pm a)^3 Sin.\varphi^3 + \frac{1}{2}\pi (3r \pm 2a)(r \pm a) Sin.\varphi\, Cos.\varphi + \frac{1}{2}\pi (5r \pm 2a)(r \pm a)^2 \varphi$; waarbij geen standvastige grootheid behoeft gevoegd te worden, wijl voor $\varphi = 0$, alle de leden dezer uitdrukking *nul* worden.

Stelt men, om de integraal het geheele ligchaam te bekomen, hetwelk door de omwenteling van HXFZI om HK wordt voortgebragt, $\varphi = \pi = 180°$, zoo is $Sin.\varphi = 0$, en alle de leden van onze integraal worden $= 0$, uitgezonderd het laatste lid, hetwelk wordt: $\frac{1}{2}\pi^2 (5r \pm 2a)(r \pm a)^2$ en alzoo de geheele integraal, of de inhoud van gezochte ligchaam, hetwelk door de omwenteling van HXZX′K om HK wordt voortgebragt, $= \pi^2 (5r \pm 2a)(r \pm a)^2$.

Stelt men in deze uitdrukking $a = 0$, zoo heeft men $5\, r^3\, \pi^2$ voor den inhoud van het lig-

chaam, hetwelk door de omwenteling van de cycloïde DAE, om DE als as, wordt voortgebragt.

Wanneer deselfde vlakte IHXFZ om ZI als as, *fig.* 119 en 120, eene omwenteling doet, zal dezelve een ligchaam beschrijven, hetwelk zeer verschillend van het voorgaande is, en ook een geheel anderen inhoud heeft. Bij deze omwenteling beschrijft $FG = y = (r \pm a)\,Sin.\,\varphi + r\,\varphi$ eenen cirkel, welks inhoud is $y^2\pi = \pi\,(r \pm a)^2\,Sin.\,\varphi^2 + 2\,\pi\,r\,(r \pm a)\,\varphi\,Sin.\,\varphi + \pi\,r^2\,\varphi^2$; en als men deze cirkelvlakte met de differencial van ZG, dat is met $\partial x = (r \pm a)\,Sin.\,\varphi\,\partial\varphi$ multipliceert, heeft men voor de uitdrukking van het element van dit ligchaam, $\pi\,y^2\,\partial x = \pi\,(r \pm a)^3\,Sin.\,\varphi^3\,\partial\varphi + 2\,\pi\,r\,(r \pm a)^2\,\varphi\,Sin.\,\varphi^2\,\partial\varphi + \pi\,r^2\,(r \pm a)\,\varphi^2\,Sin.\,\varphi\,\partial\varphi$.

Om de integraal van deze uitdrukking te vinden, heeft men, volgens bijvoegsel B, $\int Sin.\,\varphi^3\,\partial\varphi = -\frac{1}{3}\,Cos.\,\varphi\,Sin.\,\varphi^2 - \frac{2}{3}\,Cos.\,\varphi = \frac{1}{3}\,Cos.\,\varphi^3 - Cos.\,\varphi$; voorts is $\partial\,(\varphi\,Sin.\,\varphi\,Cos.\,\varphi) = Sin.\,\varphi\,Cos.\,\varphi\,\partial\varphi + \varphi\,Cos.\,\varphi^2\,\partial\varphi - \varphi\,Sin.\,\varphi^2\,\partial\varphi = Sin.\,\varphi\,Cos.\,\varphi\,\partial\varphi + \varphi\,\partial\varphi - 2\,\varphi\,Sin.\,\varphi^2\,\partial\varphi$, of $\varphi\,Sin.\,\varphi^2\,\partial\varphi = \frac{1}{2}\,Sin.\,\varphi\,.\,Cos.\,\varphi\,\partial\varphi + \frac{1}{2}\,\varphi\,\partial\varphi - \frac{1}{2}\,\partial\,(\varphi\,Sin.\,\varphi\,Cos.\,\varphi)$, en $\int\varphi\,Sin.\,\varphi^2\,\partial\varphi = \frac{1}{4}\,Sin.\,\varphi^2 + \frac{1}{4}\,\varphi^2 - \frac{1}{2}\,\varphi\,Sin.\,\varphi\,Cos.\,\varphi$. Daar wijders $\partial\,(\varphi^2\,Cos.\,\varphi) = -\,\varphi^2\,Sin.\,\varphi\,\partial\varphi + 2\,\varphi\,Cos.\,\varphi\,\partial\varphi$ en $\partial\,(\varphi\,Sin.\,\varphi) = \varphi\,Cos.\,\varphi\,\partial\varphi + Sin.\,\varphi\,\partial\varphi$ is, zoo is ook $\partial\,(\varphi^2\,Cos.\,\varphi) = -\,\varphi^2\,Sin.\,\varphi\,\partial\varphi + 2\,\partial\,(\varphi\,Sin.\,\varphi) - 2\,Sin.\,\varphi\,\partial\varphi$, of $\varphi^2\,Sin.\,\varphi\,\partial\varphi = 2\,\partial\,(\varphi\,Sin.\,\varphi) - 2\,Sin.\,\varphi\,\partial\varphi - \partial\,(\varphi^2\,Cos.\,\varphi)$; derhalve is $\int\varphi^2\,Sin.\,\varphi\,\partial\varphi = 2\,\varphi\,Sin.\,\varphi + 2\,Cos.\,\varphi - \varphi^2\,Cos.\,\varphi$, en men heeft voor de integraal van het ligchaam, hetwelk door de omwenteling van FQZ om GZ wordt voortgebragt:

$$\int\pi\,y^2\,\partial x = \tfrac{1}{3}\,\pi\,(r \pm a)^3\,Cos.\,\varphi^3 - \pi\,(r \pm a)^3\,Cos.\,\varphi \;.\; + \tfrac{1}{2}\,\pi\,r\,(r \pm a)^2\,Sin.\,\varphi^2 + \tfrac{1}{2}\,\pi\,r\,(r \pm a)^2\,\varphi^2 \;.\; - \pi\,r\,(r \pm a)^2\,\varphi\,Sin.\,\varphi\,Cos.\,\varphi + 2\,\pi\,r^2\,(r \pm a)\,\varphi\,Sin.\,\varphi + 2\,\pi\,r^2\,(r \pm a)\,Cos.\,\varphi - \pi\,r^2\,(r \pm a)\,\varphi^2\,Cos.\,\varphi + C.$$

Stelt

Stelt men nu, om de standvastige grootheid C te bepalen, $\phi = 0$, zoo is $Sin.\phi = 0$, $Cos.\phi = 1$, en men heeft:

$$0 = \tfrac{1}{3}\pi(r \pm a)^3 - \pi(r \pm a)^3 + 2\pi r^2(r \pm a) + C.$$

dus $C = \tfrac{2}{3}\pi(r \pm a)^3 - 2\pi r^2(r \pm a)$.

Substitueert men deze waarde in onze integraal, zoo heeft men:

$$\int \pi y^2 \partial x = \pi(r \pm a)^3(\tfrac{1}{3} Cos.\phi^3 - Cos.\phi + \tfrac{2}{3}) + \tfrac{1}{2}\pi r(r \pm a)^2(Sin.\phi^2 + \phi^2 - 2\phi Sin.\phi Cos.\phi) + \pi r^2(r \pm a)(2\phi Sin.\phi + 2 Cos.\phi - \phi^2 Cos.\phi - 2).$$

Ten einde nu de geheele inhoud van het door IHXFZ om ZI voortgebragte ligchaam te bekomen, stelle men $\phi = \pi = 180°$, zoo is $Sin.\phi = 0$, $Cos.\phi = -1$ en de inhoud van het ligchaam is:

$$\tfrac{4}{3}\pi(r \pm a)^3 + \tfrac{1}{2}\pi^3 r(r \pm a)^2 + \pi^3 r^2(r \pm a) - 4\pi r^2(r \pm a) = \tfrac{1}{2}\pi^3 r(r \pm a)(3r \pm a) + 4\pi(r \pm a)[\tfrac{1}{3}(r \pm a)^2 - r^2]$$

Als men hierin $a = 0$ stelt, bekomt men den inhoud van het ligchaam, hetwelk men verkrijgt, als de halve cycloïde ADE zich om AB als as rond draait

$$= \tfrac{3}{2} r^3 \pi^3 - \tfrac{8}{3} r^3 \pi = \tfrac{1}{6} r^3 \pi(9\pi^2 - 16)\ (*).$$

Thans blijft ons nog over om onze kromme lijnen, *fig.* 119 en 120, te rectificeren, waartoe zich ook de differentiaal-vergelijking zeer gemakkelijk vinden laat; want stelt men de lengte des boogs $FZ = s$, zoo is de differentiaal derzelve, $\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$; maar $\partial y = [r + (r \pm a) Cos.\phi]\partial\phi$, der-

(*) Het is opmerkenswaardig, dat ROBERVAL, kort na dat hij den inhoud der cycloïde had gevonden (1637), ook den inhoud bepaalde, niet alleen van het ligchaam, hetwelk men bekomt door de omwenteling van de cycloïde om hare basis, maar dat hij ook den inhoud heeft gevonden van het hier berekende ligchaam, hetwelk voor de wiskundige kennis van dien tijd zeer veel is. Zie *Discours sur la vie et les ouvrages de* PASCAL, door BOSSUT, gevoegd bij het 2de Deel van zijn *Essai sur l'Histoire Générale des Mathématiques.*

derhalve $\delta y^2 = [r^2 + 2r(r \pm a) Cos.\phi + (r \pm a)^2 Cos.\phi^2] \delta\phi^2$; addeert men hierbij $\delta x^2 = (r \pm a)^2 Sin.\phi^2 \delta\phi^2$, zoo bekomt men $\delta s^2 = \delta x^2 + \delta y^2 = [r^2 + 2r(r \pm a) Cos.\phi + (r \pm a)^2] \delta\phi^2$; alzoo is

$$\delta s = \delta\phi \sqrt{[r^2 + (r \pm a)^2 + 2r(r \pm a) Cos.\phi]}.$$

Deze uitdrukking verandert in de differentiaal voor den boog der cijcloïde, als men $a = o$ ſtelt, waardoor men $\delta s = \delta\phi \sqrt{(2r^2 + 2r^2 Cos.\phi)} = 2r\delta\phi \sqrt{\frac{1 + Cos.\phi}{2}} = 2r\delta\phi\, Cos.\tfrac{1}{2}\phi$ bekomt; en waarvan de integraal is,

$$s = 4r \int Cos.\tfrac{1}{2}\phi\, \delta\frac{\phi}{2} = 4r\, Sin.\tfrac{1}{2}\phi$$

zijnde hierbij geen ſtandvastige grootheid noodig, wijl deze integraal nul wordt, als men $\phi = o$ ſtelt.

Nu is $\angle$ QBA $= \frac{1}{2} \angle$ QCA $= \frac{1}{2}\phi$, en daar $\angle$ BQA $= 90^\circ$ is, zoo is QA $=$ AB $Sin.\tfrac{1}{2}\phi = 2r\, Sin.\tfrac{1}{2}\phi$; derhalve is de boog der cijcloïde, s of MA $= 2$ QA; en als men $\phi = \pi = 180^\circ$ ſtelt, is $Sin.\tfrac{1}{2}\phi = Sin.90^\circ = 1$; gevolgelijk is de boog der halve cijcloïde $= 4r = 2$ AB, zoo als genoegzaam bekend is.

Doordien nu onze kromme lijnen *in eene zeer naauwe betrekking* met de gewone cijcloïde *ſtaan*, en de boog dezer laatſte niet alleen kan worden gerectificeerd, maar zelfs ook eene rationale waarde heeft, zoo zoude men vermoeden, dat onze kromme lijnen zich insgelijks door eindige uitdrukkingen moesten laten rectificeren; dan de ondervinding ſchijnt dit vermoeden niet te bevestigen: alle mijne pogingen, om de waarde van δs tot eenen integreerbaren vorm te brengen, zijn te vergeefs geweest, en het is te vermoeden, dat de differentiaal $\delta\phi \sqrt{(\alpha + \beta\, Cos.\phi)}$, (welke ten opzigte van den vorm met de onze overeenkomt, en in de differentiaal $\frac{- z^{\frac{1}{2}} \delta z}{\sqrt{(\beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha z - z^2)}}$ kan wor-

worden veranderd, als men $a + b\,Cos.\phi = x$ stelt) tot geen der als nog bekende integreerbare vormen te brengen, en daarom, even als de bekende differentiaal-uitdrukking $z^{\frac{1}{2}}\partial z\sqrt{(a^2+z^2)}$, niet dan door eene oneindige reeks te integreren is. Daar voorts de differentiaal-uitdrukking van ∂s mede als factor in de differentiaal-uitdrukkingen ter bepaling van de oppervlakten der ligchamen voorkomen, van welke wij den inhoud gevonden hebben, zoo zijn deze, ten minste voor een gedeelte, aan dezelfde zwarigheid onderworpen, waarom wij ons dan ook hiermede niet verder zullen ophouden, alzoo hierin niets belangrijks voor ons oogmerk kan gelegen zijn; echter zullen wij tot besluit hierbij nog eene merkwaardige reeks afleiden, uit de differentiaal-vergelijking der cijcloïde,

$$\partial s = 2r\partial\phi\sqrt{\frac{1+Cos.\phi}{2}} = r\sqrt{2}\,\partial\phi\sqrt{(1+Cos.\phi)}$$

Volgens de binomicaal-formule is;

$$\sqrt{(1+Cos.\phi)} = 1 + \tfrac{1}{2}Cos.\phi - \frac{Cos.\phi^2}{2.4} + \frac{1.3.Cos.\phi^3}{2.4.6} - \frac{1.3.5.Cos.\phi^4}{2.4.6.8} + \frac{1.3.5.7.Cos.\phi^5}{2.4.6.8.10} - \&c.$$

dus is $\partial\phi\sqrt{(1+Cos.\phi)} = \partial\phi + \frac{Cos.\phi\,\partial\phi}{2} - \frac{1.Cos.\phi^2\partial\phi}{2.4} + \frac{1.3.Cos.\phi^3\partial\phi}{2.4.6} - \frac{1.3.5\,Cos\phi^4\partial\phi}{2.4.6.8} + \&c.$

Door behulp van de formule, *Bijvoegsel* A, laten alle de leden dezer reeks zich integreren, en men bekomt:

$\int\partial\phi = \phi$; $\int Cos.\phi\partial\phi = Sin.\phi$; $\int Cos.\phi^2\partial\phi = \tfrac{1}{2}Sin.\phi\,Cos.\phi + \tfrac{1}{2}\phi$; $\int Cos.\phi^3\partial\phi = \tfrac{1}{3}Sin.\phi\,Cos\,\phi^2 + \frac{2\,Sin.\phi}{3.1}$; $\int Cos.\phi^4\partial\phi = \tfrac{1}{4}Sin.\phi\,Cos.\phi^3 + \frac{3\,Sin.\phi\,Cos.\phi}{4.2} + \frac{3.1.\phi}{4.2}$; $\int Cos.\phi^5\phi = \tfrac{1}{5}Sin.\phi\,Cos.\phi^4 +$

$\frac{4 Sin.\phi Cos.\phi^3}{5.3} + \frac{4.2 Sin.\phi}{5.3.1}$; $\int Cos.\phi^6 \partial\phi =$ $\frac{1}{6} Sin.\phi Cos.\phi^5 + \frac{5 Sin.\phi Cos.\phi^3}{6.4} + \frac{5.3 Sin.\phi Cos.\phi}{6.4.2} +$ $\frac{5.3.1.\phi}{6.4.2}$. enz.

Substitueert men nu deze integralen in onze reeks, zoo bekomt men de reeks voor $\int \partial\phi \sqrt{(1 + Cos.\phi)}$, waarbij geen standvastige grootheid noodig is, doordien voor $\phi = 0$ alle de leden $= 0$ worden; en als men $\phi = \pi = 180°$ stelt, verdwijnen alle de leden, waarin $Sin.\phi$ voorkomt, wijl $Sin.180° = 0$ is, zoo dat er alsdan geen andere leden overblijven, dan die, welke den factor ϕ onthouden; uit hetwelke alzoo volgt, dat men voor de lengte van de halve cijcloïde vinden zal:

$$r\sqrt{2}\left(\pi - \frac{1.\pi}{2.2.4} - \frac{1.1.3.3.5.\pi}{2.2.4.4.6.8} - \frac{1.1.3.3.5.5.7.9\pi}{2.2.4.4.6.6.8.10.12} - \dots \frac{1.1.3.3.5.5.7.7.9.11.13\pi}{2.2.4.4.6.6.8.8.10.12.14.16} - \&c.\right)$$

maar wij hebben ook voor de halve lengte der cijcloïde, $4r$ gevonden, dus is

$$4r = r\sqrt{2}\left(\pi - \frac{1.\pi}{2.2.4} - \frac{1.1.3.3.5\pi}{2.2.4.4.6.8} - \&c.\right)$$

en hieruit vindt men de som der reeks:

$$\frac{1}{2.2.4} + \frac{1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.8} + \frac{1.1.3.3.5.5.7.9}{2.2.4.4.6.6.8.10.12} + \dots \frac{1.1.3.3.5.5.7.7.9.11.13}{2.2.4.4.6.6.8.8.10.12.14.16} + \&c. = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \dots = 0{,}0996838$$ ten naaste bij.

BIJVOEGSEL A. Daar het dikwijls noodig is, differentialen van den vorm $Cos.\phi^n \partial\phi$ te integreren, zal het niet ondienstig zijn, eene algemeene uitdrukking voor de integraal van dezelve te zoeken. Tot dit einde differentiëre men $Sin.\phi.Cos.\phi^{n-1}$, waardoor men bekomt:

∂ Sin

$\partial(Sin.\phi Cos.\phi^{n-1}) = Cos.\phi^n \partial\phi - (n-1) Sin.\phi^2 Cos.\phi^{n-2} \partial\phi$
$= Cos.\phi^n \partial\phi - (n-1)(1 - Cos.\phi^2) Cos.\phi^{n-2} \partial\phi$
$= n\, Cos.\phi^n \partial\phi - (n-1)\, Cos.\phi^{n-2} \partial\phi.$

$$\text{dus } Cos.\phi^n \partial\phi = \frac{\partial(Sin.\phi Cos.\phi^{n-1})}{n} + \frac{n-1}{n} Cos.\phi^{n-2}\partial\phi.$$

Substitueert men nu in deze uitdrukking voor n, achtervolgens $n-2$, $n-4$, $n-6$ enz. tot $n-(n-2) = 2$, zoo heeft men:

$$Cos.\phi^{n-2}\partial\phi = \frac{\partial(Sin.\phi Cos.\phi^{n-3})}{n-2} + \frac{n-3}{n-2} Cos.\phi^{n-4}\partial\phi$$

$$Cos.\phi^{n-4}\partial\phi = \frac{\partial(Sin.\phi Cos.\phi^{n-5})}{n-4} + \frac{n-5}{n-4} Cos.\phi^{n-6}\partial\phi$$

$$Cos.\phi^{n-6}\partial\phi = \frac{\partial(Sin.\phi Cos.\phi^{n-7})}{n-6} + \frac{n-7}{n-6} Cos.\phi^{n-8}\partial\phi$$

enz. tot

$$Cos.\phi^{n-(n-2)}\partial\phi = \frac{d(Sin.\phi Cos.\phi^{n-(n-1)})}{n-(n-2)} + \ldots\ldots\ldots \frac{n-(n-1)}{n-(n-2)} . Cos.\phi^{n-n}\partial\phi.$$

Dat is tot $Cos.\phi^2\partial\phi = \frac{\partial(Sin.\phi\, Cos.\phi)}{2} + \frac{1}{2}\partial\phi$

als n een even getal is; is n echter een oneven getal, zoo gaan deze differentialen voort tot $Cos.\phi^{n-(n-1)}\partial\phi = Cos.\phi\,\partial\phi$.

Substitueert men nu achtervolgens deze waarden in die van $Cos.\phi^n\partial\phi$, zoo bekomt men, na gedane integratie;

$$\int Cos.\phi^n\partial\phi = \frac{Sin.\phi Cos.\phi^{n-1}}{n} + \frac{(n-1)\, Sin\phi.Cos\phi^{n-3}}{n(n-2)} + \frac{(n-1)(n-3) Sin\phi Cos\phi^{n-5}}{n(n-2)(n-4)} + \frac{(n-1)(n-3)(n-5) Sin\phi Cos\phi^{n-7}}{n(n-2)(n-4)(n-6)} + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)(n-7) Sin.\phi\, Cos.\phi^{n-9}}{n(n-2)(n-4)(n-6)(n-8)} + \&c. \text{ tot } (n-1)$$

$$\frac{(n-1)(n-3)\ldots[n-(n-1)]\phi}{n(n-2)\ldots[n-(n-2)]} \text{ of } \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3.1.\phi}{n(n-2)\ldots 4.2}$$

als n een even getal is, en tot

$$\frac{(n-1)(n-3)\ldots 4.2}{n(n-2)\ldots 3.1}\int Cos.\phi.\partial\phi = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4.2}{n(n-2)\ldots 3.1} Sin\phi,$$

als n een oneven getal is.

Bijvoegsel B. Eene dergelijke uitdrukking vindt men ook voor $\int Sin.\phi^n \partial\phi$, als men $Cos.\phi\ Sin.\phi^{n-1}$ differentieert; want $\partial(Cos.\phi Sin.\phi^{n-1}) = - Sin.\phi^n\partial\phi + (n-1) Cos.\phi^2 Sin.\phi^{n-2}\partial\phi = - n Sin.\phi^n\partial\phi + (n-1) Sin.\phi^{n-2}\partial\phi$; dus is $Sin.\phi^n\partial\phi = -\frac{\partial(Cos.\phi Sin.\phi^{n-1})}{n} + \frac{n-1}{n} Sin.\phi^{n-2}\partial\phi$; en hieruit volgt, even als boven,

$$Sin.\phi^{n-2}\partial\phi = -\frac{\partial(Cos.\phi Sin.\phi^{n-3})}{n-2} + \frac{n-3}{n-2} Sin.\phi^{n-4}\partial\phi;$$

$$Sin.\phi^{n-4}\partial\phi = -\frac{\partial(Cos.\phi Sin.\phi^{n-5})}{n-4} + \frac{n-5}{n-4} Sin.\phi^{n-6}\partial\phi$$

enz.

Substitueert men nu deze waarden achtervolgens in de waarde van $Sin.\phi^n\partial\phi$ en neemt men de integraal van de geheele uitdrukking, zoo bekomt men:

$$\int Sin.\phi^n\partial\phi = -\frac{Cos.\phi Sin.\phi^{n-1}}{n} - \frac{(n-1)Cos\phi Sin\phi^{n-3}}{n(n-2)}$$

$$- \frac{(n-1)(n-3)\ Cos.\phi.\ Sin.\phi^{n-5}}{n(n-2)(n-4)}$$

$$- \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ Cos.\phi\ Sin.\phi^{n-7}}{n(n-2)(n-4)(n-6)}$$

$$- \&c.\ \text{tot} + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots 3.1.\phi}{n(n-2)(n-4)\ldots 4.2},$$

als n een even getal is, en tot

+

$$+ \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots 4}{n(n-2)(n-4)\ldots 3 \cdot 1}$$

$$\int Sin.\,\phi^n \partial\phi = -\frac{(n-1)(n-3)\ldots 4 \cdot 2}{n(n-2)\ldots 3 \cdot 1} Cos.\,\phi,$$

als n een oneven getal is.

N°. 133. Door

O. S. Bangma.

Stel in figuur 62, $PQ = a$ en $NO = b$, dan is, volgens de zamenstelling van de figuur (*zie Voorst.* 73), daar zijden en diagonalen van de paralellogrammen ABCD en PNQO alle, door de boomen, in dezelfde rede gedeeld zijn, $\frac{1}{2} PQ : PV = PV : PQ$; dus $PV = PQ \sqrt{\frac{1}{2}} = a \sqrt{\frac{1}{2}}$ en $QV = PQ - PV = (1 - \sqrt{\frac{1}{2}})\, a = PT$, dus $TV = PV - PT = (-1 + \sqrt{2})\, a$. Op gelijke wijze $\frac{1}{2} NO : NS = NS : NO$; dus $NS = NO \sqrt{\frac{1}{2}} = b \sqrt{\frac{1}{2}}$ en $OS = NO - NS = (1 - \sqrt{\frac{1}{2}})\, b = NR$, dus $RS = NS - NR = (-1 + \sqrt{2})\, b$. Hieruit volgt:

1°. $AM = ZT = \frac{1}{2} TV = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2})\, a = DL$, en $ML = PT = (1 - \sqrt{\frac{1}{2}})\, a$. Voorts $AD = AM + ML + LD = a \sqrt{\frac{1}{2}}$.

2°. $AE = ZS = \frac{1}{2} RS = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2})\, b = BF$, en $EF = SO = (1 - \sqrt{\frac{1}{2}})\, b$. Voorts $AB = AE + EF + FB = b \sqrt{\frac{1}{2}}$.

3°. $AC = \sqrt{(AD^2 + AB^2)} = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$. Stel dit $= c$, dan is $AB : AC = AE : AY = EF : YW$; dus $AY = (1 - \sqrt{\frac{1}{2}})\, c$ en $YW = (-1 + \sqrt{2})\, c$.

4°. $QF = ZW = \frac{1}{2} YW = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2})\, c = QE$, en $FG = AY = (1 - \sqrt{\frac{1}{2}})\, c = EM$.

5°. Om dat PRQS een gelijkzijdig paralellogram is, is $PQ^2 + RS^2 = 4\, PS^2$; dus $4\, PS^2 = a^2 + 3\, b^2 - 2\, b^2 \sqrt{2} = 2\, c^2 + 2\, b^2 - 2\, b^2 \sqrt{2}$ en $PS = \sqrt{(\frac{1}{2} c^2 + \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} b^2 \sqrt{2})} = PR$; maar

PV

PV : PS = PZ : PW = ZV : WS; dus PW = $\frac{1}{2}\sqrt{}(c^2 + b^2 - b^2\sqrt{}2)$ en WS = $(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{}2)\sqrt{}(c^2 + b^2 - b^2\sqrt{}2)$.

6°. Om dat TNVO een gelijkzijdig parallelogram is, is $NO^2 + TV^2 = 4\,TO^2$; dus $4\,TO^2 = b^2 + 3a^2 - 2a^2\sqrt{}2 = 2c^2 + 2a^2 - 2a^2\sqrt{}2$ en $TO = \sqrt{}(\frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2\sqrt{}2) = VO$; maar RO : TO = ZO : WO = RZ : TW; dus $WO = \frac{1}{2}\sqrt{}(c^2 + a^2 - a^2\sqrt{}2)$ en $TW = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{}2)\sqrt{}(c^2 + a^2 - a^2\sqrt{}2)$.

Door deze formulen kunnen nu alle de afstanden berekend worden, wanneer a en b gegeven zijn; want voor de afstanden op BQ hebben wij gevonden: $PT = QV = (1 - \sqrt{}\frac{1}{2})\,a$ en $TV = (-1 + \sqrt{}2)\,a$; hierdoor zijn ook de afstanden op AD en hare drie gelijke evenwijdigen bekend, namelijk $AM = DL = \frac{1}{2}TV$ en $ML = PT = QV$.

Voor de afstanden op NO hebben wij gevonden, $NR = OS = (1 - \sqrt{}\frac{1}{2})\,b$ en $RS = (-1 + \sqrt{}2)\,b$; hierdoor zijn ook de afstanden op AB en hare drie gelijke evenwijdigen bekend, namelijk: $AE = BF = \frac{1}{2}RS$ en $EF = NR = OS$.

Voor de afstanden op AC of BD hebben wij gevonden, $AY = CW = (1 - \sqrt{}\frac{1}{2})\,c = BU = DX$, en $YW = (-1 + \sqrt{}2)\,c = UX$; hierdoor zijn ook de afstanden op QO of QN en hare gelijke evenwijdigen bekend, namelijk: $QF = OG = \frac{1}{2}YW = QE = NM$, en $FG = WC = AY = MB$.

Voor de afstanden op QC, QD, PB en PA, hebben wij gevonden: $PW = BS = \frac{1}{2}\sqrt{}(c^2 + b^2 - b^2\sqrt{}2)$ en $WS = (-\frac{1}{2} + \sqrt{}\frac{1}{2})\sqrt{}(c^2 + b^2 - b^2\sqrt{}2)$.

Voor de afstanden op AO, DO, NC en NB, hebben wij gevonden: $AV = OU = \frac{1}{2}\sqrt{}(c^2 + a^2 - a^2\sqrt{}2)$ en $VU = (-\frac{1}{2} + \sqrt{}\frac{1}{2})\sqrt{}(c^2 + a^2 - a^2\sqrt{}2)$. Zijnde c in deze uitdrukkingen $= \sqrt{}(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2)$.

N°. 134.

N°. 134. Door

O. S. BANGMA.

Stel in figuur 61, $AP = QC = a$ en $DO = NB = b$, dan is, volgens de zamenstelling van deze figuur (*zie Voorst.* 73), $\frac{1}{2} PQ : PV = PV : PQ$; dus $PV = PQ \sqrt{\frac{1}{2}}$, en $PZ = \frac{1}{2} PQ$; dus $PV : PZ = \sqrt{\frac{1}{2}} : \frac{1}{2} = \sqrt{2} : 1$; maar $PV : PZ = PR : PX$; dus $PR : PX = \sqrt{2} : 1$; dus $PR = PX \sqrt{2}$ of $AX = PX \sqrt{2}$; hier PX bijvoegende, komt $AX + PX = (1 + \sqrt{2}) PX = a$; dus $PX = (-1 + \sqrt{2}) a = OB$, $AX = (2 - \sqrt{2}) a = PR$, en $RX = PR - PX = (3 - 2\sqrt{2}) a$. Op gelijke wijze $\frac{1}{2} NO : RO = RO : NO$; dus $RO = NO \sqrt{\frac{1}{2}}$, en $ZO = \frac{1}{2} NO$; dus $RO : ZO = \sqrt{\frac{1}{2}} : \frac{1}{2} = \sqrt{2} : 1$; maar $RO : ZO = TO : WO$; dus $TO : WO = \sqrt{2} : 1$; dus $TO = WO \sqrt{2} = DT \sqrt{2}$; hier DT bijvoegende, komt $DT + TO = (1 + \sqrt{2}) DT = b$; dus $DT = (-1 + \sqrt{2}) b = AQ$, $TO = (2 - \sqrt{2}) b = DW$, en $TW = DW - DT = (3 - 2\sqrt{2}) b$.

Nu is $PQ = \sqrt{(AP^2 + AQ^2)} = \sqrt{(a^2 + 3b^2 - 2b^2\sqrt{2})}$; maar $PV = PQ \sqrt{\frac{1}{2}}$, dus $PV = \sqrt{(\frac{1}{2}a^2 + 1\frac{1}{2}b^2 - b^2\sqrt{2})}$; dus $QV = PQ - PV = (1 - \sqrt{\frac{1}{2}}) \sqrt{(a^2 + 3b^2 - 2b^2\sqrt{3})} = PT$; dus $TV = PV - PT = (-1 + \sqrt{2}) \sqrt{(a^2 + 3b^2 - 2b^2\sqrt{2})}$. Hierdoor zijn ook bekend; $AM = DL = ZV = \frac{1}{2} TV$, en $ML = PT$. Dus de afstanden op AD en hare gelijke evenwijdigen, als mede op QO en hare gelijke evenwijdigen, alle bekend.

Op gelijke wijze heeft men, $DB = \sqrt{(DO^2 + OB^2)} = \sqrt{(b^2 + 3a^2 - 2a^2\sqrt{2})}$; maar $DU = DB\sqrt{\frac{1}{2}}$, dus $DU = \sqrt{(\frac{1}{2}b^2 + 1\frac{1}{2}a^2 - a^2\sqrt{2})}$; dus $BU = DB - DU = (1 - \sqrt{\frac{1}{2}}) \sqrt{(b^2 + 3a^2 - 2a^2\sqrt{2})} = DX$; dus $XU = DU - DX = (-1 + \sqrt{2}) \sqrt{(b^2 + 3a^2 + 2a^2\sqrt{2})}$. Hierdoor zijn ook bekend: $QE = NM = ZU = \frac{1}{2} XU$, en $ME = DX$. Dus de afstanden op NQ en

en hare gelijke evenwijdigen; als mede op AB en hare gelijke evenwijdigen, alle bekend.

Blijft nog over, de afstanden te bepalen op AO, of een van hare gelijksoortige lijnen. Hiertoe heeft men: $VO = \sqrt{(VB^2 + BO^2)} = \sqrt{[(-1+\sqrt{2})^2 a^2 + (-1+\sqrt{2})^2 b^2]} = (-1+\sqrt{2})\sqrt{(a^2+b^2)}$; maar $PR : AR = VQ : AV$; dus $AV = (1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}})\sqrt{(a^2+b^2)} = OU$; dus $VU = VO - UO = (-1 + 1\tfrac{1}{2}\sqrt{2})\sqrt{(a^2+b^2)}$.

N°. 135. Door

J. R. Schmidt, en *R. Lobatto.*

Laat ABEG (*Fig.* 121) de doorsnede zijn van het cijlindervormig gat, dan is het blijkbaar, dat de inhoud van dit gat zal bestaan, uit den inhoud van den cijlinder ABEG en tweemalen den inhoud van het bolvormig segment ADB, dat CD tot hoogte heeft, en waarvan AB de middellijn van de basis is. Stellende dan de middellijn van den bol m, en $AB = r$, dan is $FC = \tfrac{1}{2}\sqrt{(m^2 - r^2)}$, en dus de inhoud van den cijlinder ABEG $= \tfrac{1}{4}\pi r^2 \sqrt{(m^2 - r^2)}$.

Stellende nu verder $CD = h$, dan hebben wij in de oplossing van het 74ste Voorstel voor den inhoud van het bolvormig segment ADB gevonden: $\tfrac{1}{6}\pi h^2 (3m - 2h)$; maar $CD = FD - FC$ zijnde, hebben wij $h = \dfrac{m - \sqrt{(m^2 - r^2)}}{2}$, en deze waarde van h substituerende, verkrijgen wij, na herleiding:

$$Bolv.\,Segm.\,ADB = \frac{\pi}{24}(2m^3 - (2m^2 + r^2)\sqrt{(m^2 - r^2)})$$

dus twee zulke segmenten

$$= \frac{\pi}{12}(2m^3 - (2m^2 + r^2)\sqrt{(m^2 - r^2)})$$

hier

hier bijgevoegd de cijlinder ABEG

$$= \frac{\pi}{12}(3r^2\sqrt{(m^2-r^2)})$$

verkrijgen wij voor den inhoud van het cijlinder-vormig gat $\frac{\pi}{12}(2m^3-(2m^2-2r^2)\sqrt{(m^2-r^2)})$, dat is $\frac{1}{6}\pi(m^3-(m^2-r^2)^{\frac{3}{2}})$.

Volgens de opgaaf moet nu deze inhoud $\frac{1}{8}$ van den inhoud des gegevenen bols zijn: stellen wij algemeen, dat het $\frac{1}{p}$ moet zijn, dan hebben wij, om dat de inhoud des bols $\frac{1}{6}\pi m^3$ is,

$$\tfrac{1}{6}\pi(m^3-(m^2-r^2)^{\frac{3}{2}}) = \frac{1}{6p}\pi m^3$$

dat is $m^3-(m^2-r^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{p}m^3$

of $(m^2-r^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{p-1}{p}m^3$, dus $m^2-r^2 = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{2}{3}}m^2$

waaruit $r = m.\sqrt{\left(1-\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{2}{3}}\right)}$

waardoor de middellijn van den cijlinder bepaald is, en dus het voorstel is opgelost.

Zoo, nu $p = 8$ genomen wordt, is $r = m\sqrt{(1-(\frac{7}{8})^{\frac{2}{3}})} = m\sqrt{(1-\frac{1}{4}\sqrt[3]{49})} = 0{,}291845m$

1°. Aanmerking. Wijl wij gevonden hebben $CF = \frac{1}{2}\sqrt{(m^2-r^2)}$, zoo is $AG = BE = \sqrt{(m^2-r^2)}$, dat is $AG = BE = m\sqrt[3]{\frac{p-1}{p}}$, of als $p = 8$ is, $AG = \frac{1}{2}m\sqrt[3]{7}$.

2°. Aanmerking. Wij hebben gevonden $AB = r = m\sqrt{\left(1-\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{2}{3}}\right)}$, en bijgevolg $AC = \frac{1}{2}m\sqrt{\left(1-\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{2}{3}}\right)}$, hetwelk de ra-

dius van den cijlinder is; nu is DC $= h =$ $\frac{m - \sqrt{(m^2 - r^2)}}{2}$, en brengende hierin de waarde van r, komt er $DC = h = \frac{1}{2} m \left(1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$; maar $AD = BD = \sqrt{(AC^2 + CD^2)}$ zijnde, is alzoo $AD = BD = \frac{1}{2} m \left(2 - 2\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ en hierdoor is de radius bepaald, waarmede men op den bol een cirkel beschrijven moet, om uit denzelven het cijlindervormig gat te kunnen boren; zijnde deze radius in het geval van $p=8$, $AD=BD=$ $\frac{1}{2} m \sqrt{(2 - 2(\frac{7}{8})^{\frac{1}{3}})} = \frac{1}{2} m \sqrt{(2 - \sqrt[3]{7})} = 0{,}147537.m$

3°. Aanmerking. Uit de vergelijking $m^3 - (m^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{p} m^3$ volgt ook ....

$$p = \frac{m^3}{m^3 - (m^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{r^2}{m^2}\right)^{\frac{3}{2}}};$$ waardoor de betrekking der inhouden van den bol en het cijlindervormig gat bepaald is, wanneer de reden van de middellijn des bols tot die van den cijlinder gegeven is.

Eindelijk merken wij nog aan, dat de middellijn des bols zoo gemakkelijk in die van den cijlinder kan worden uitgedrukt, als die van den cijlinder in die van den bol; want de vergelijking $r = m \sqrt{\left(1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{2}{3}}\right)}$ geeft oogenblikkelijk $m = \frac{r}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{2}{3}}\right)}}$.

N°. 136. Door

C. LANTS Jr.

Laat I (*Fig.* 123) het middelpunt des cirkels in den driehoek ABC zijn, en I', I'', I''' de middelpunten der cirkels welke eene zijde uitwendig en de beide andere zijden inwendig aanraken.

Trekkende dan de lijnen AI'', BI''' en CI', zoo zullen deze de hoeken A, B en C, des driehoeks midden door deelen, en dus alle door het middelpunt I des ingeschreven cirkels gaan. De driehoeken AFI en ADI hebben dus twee hoeken en eene zijde gelijk aan elkander; derhalve AF = AD, en op gelijke wijze BD = BE en FC = CE. Wanneer wij nu dit zelfde op de andere cirkels toepassen, zullen wij hebben:

$$AD = AF,\ BE = BD,\ CF = CE$$
$$AD' = AF',\ BE' = BD',\ CF' = CE'$$
$$AD'' = AF'',\ BE'' = BD'',\ CF'' = CE''$$
$$AD''' = AF''',\ BE''' = BD''',\ CF''' = CE'''$$

en bijgevolg:

1°. $AD \times BE \times CF = AF \times BD \times CE$
2°. $AD' \times BE' \times CF' = AF' \times BD' \times CE'$
3°. $AD'' \times BE'' \times CF'' = AF'' \times BD'' \times CE''$
4°. $AD''' \times BE''' \times CF''' = AF''' \times BD''' \times CE'''$

waardoor het gestelde bewezen is, zie DE GELDER, *Handl. tot de Beschouwende en Werkdadige Meetk.*, *I Deel*, *pag.*

N°. 137. Door

C. LANTS Jr.

Laat I (*Fig.* 122) het middelpunt des ingeschrevenen cirkels zijn, en I' dat van den cirkel, welke AB uitwendig en de twee andere zijden inwendig aanraakt. Trekkende dan door het mid-

delpunt van den ingeschrevenen cirkel de lijnen AE, BF en CD, dan zijn de hoeken CAB, CBA en ACB, als ook de bogen CEB, AFC en ADB, in E, F en D, midden door gedeeld; en CD verlengd zijnde, gaat door het middelpunt I'.

Nu moet bewezen worden, dat I en I' in den omtrek van eenen cirkel liggen, die met DA of DB als radius beschreven is: wij hebben dus slechts te bewijzen, dat ID = AD = I'D is, of dat de driehoeken AID en AI'D gelijkbeenig zijn. Nu is

1°. ∠ AID = $\frac{1}{2}$ *boog*. AD + $\frac{1}{2}$ *boog*. CE
= $\frac{1}{2}$ *boog*. BD + $\frac{1}{2}$ *boog*. EB
= $\frac{1}{2}$ *boog*. ED = ∠ IAD
dus AD = ID

2°. ∠ BI'D = $\frac{1}{2}$ *boog*. F'C — $\frac{1}{2}$ *boog*. DB
= $\frac{1}{2}$ *boog*. AF' — $\frac{1}{2}$ *boog*. AD
= $\frac{1}{2}$ *boog*. DF' = ∠ IBD
dus BD = I'D.

N°. 138. Door

J. R. Schmidt.

Stellen wij op de onbepaalde lijn CD (*Fig.* 124, 125 en 126) eene loodlijn BA = a; en laat uit eenig punt F, naar welgevallen in CD genomen, als middelpunt, en met FR = b als radius, eenen cirkel beschreven worden; zoo wij dan de lijn RA trekken, zal het snijpunt P, waarin deze lijn den cirkel snijdt, een punt van de begeerde kromme zijn.

Want zoo wij PQ en PS loodregt op CD en BA trekken, en wij BQ = x en PQ = y stellen, zullen wij hebben:

AS : PS = PQ : RQ of $a - y : x = y : RQ$; dus $RQ = \frac{xy}{a-y}$: nu is $PQ^2 = RQ \times QE = RQ\,(RE - RQ)$;

dat

dat is $y^2 = \frac{xy}{a-y}\left(2b - \frac{xy}{a-y}\right)$, of alles door y deelende en met $(a-y)^2$ multiplicerende. $y(a-y)^2 = 2bx(a-y) - x^2y$; dat is $x^2 - \frac{2b(a-y)}{y}x = -(a-y)^2$ en losfende deze vierkants-vergelijking door den bekenden regel op, $x = \frac{a-y}{y}(b \pm \sqrt{b^2-y^2})$, hetgeen juist onze opgegevene vergelijking is.

De eerste aanmerking, die ons hier voor den geest moet komen is deze: Dat de vergelijking voor iedere waarde van y, twee verschillende waarden voor x geeft: en de vraag is dan natuurlijk, hoe deze eigenschap met onze gegeven constructie kan overeenstemmen, welke voor ieder punt F slechts eene waarde voor BQ oplevert: Maar merken wij op, dat het punt F de geheelen lijn CD kan doorloopen, dan is het, na PE getrokken te hebben, klaar, dat de standvastige cirkel RPE eens in eenen stand R′P′E′ moet komen, zoodanig dat R′P′ = EP zij, en dan is noodzakelijk P′Q′ = PQ; zoodat wij alsdan twee verschillende waarden BQ en BQ′ voor x verkrijgen, welke met eene zelfde waarde BS van y overeenstemmen; en dit gezegde gaat door voor elken stand van het punt F.

Wanneer nu PP′ midden door wordt gedeeld in H, hebben wij $x =$ SH ± HP; daar nu onze vergelijking is: $x = \frac{a-y}{y}(b \pm \sqrt{b^2-y^2})$; zal H een punt zijn van de kromme lijn, uitgedrukt door de vergelijking $x' = \frac{b(a-y)}{y}$, dat is $(x'+b)y = ab$; dit is nu de vergelijking van de hijperbool op hare asfijmptoten, en uit de oplossing van het 129ste Voorstel blijkt het, dat de-

ze hijperbool in ons geval geconstrueerd wordt, door slechts uit de punten F loodlijnen FI op CD te stellen, tot dat zij AR in I snijden, zullende alsdan I punten van de gezochte hijperbool zijn, en dat deze hijperbool door A zal gaan, en MM′ tot assijmptote zal hebben, welke loodregt op de assijmptote CD is, en op eenen afstand BN = FR = b van het punt B getrokken is. Deze hijperbool dan alzoo beschreven hebbende, zal zij alle lijnen PP′, tusschen de kromme besloten, en evenwijdig aan CD lopende, middendoor deelen, en zal alzoo eene middellijn van onze kromme zijn. — Hieruit volgt dan ook nog deze merkwaardige eigenschap van onze kromme.

„*Dat wanneer men eene koorde PP′, welke evenwijdig is aan CD, midden door deelt in H, en door H de lijn AHG, en de loodlijn HK trekt, het stuk GK hierdoor van CD afgesneden, altoos = RF = b en dus een constante grootheid zal zijn.*"

Onze vergelijking geeft, wanneer wij in dezelve $y = o$ stellen $x = \infty (b \pm b)$ de eerste waarde $x = \infty . 2b$ is oneindig en toont aan, dat CD assijmptote van onze kromme is. Doch de andere waarde $x = \infty (b - b)$ of $\infty \times o$ is onbepaald, en om dezelve te bepalen, moeten wij onderzoeken, wat $\frac{(a - y).(b - \sqrt{b^2 - y^2})}{y}$ wordt in de onderstelling van $y = o$; differentieren wij dan den teller en den noemer van deze breuk; dan komt er, na onder en boven door δy gedeeld te hebben, $-(b - \sqrt{b^2 - y^2}) + \frac{y(a - y)}{\sqrt{b^2 - y^2}}$, en stellende nu $y = o$, wordt ook deze uitdrukking o, waaruit volgt, dat de onderstelling van $y = o$ ook $x = b$ maakt, en dat dus de kromme in alle gevallen door het punt B moet gaan. Deze eigenschappen worden ook volkomen bevestigd,

ligt, door, bij onze constructie, het punt F in de gedachte de geheele lijn CD te laten doorwandelen; want hoe grooter wij BF ter linker- of regter zijde van B nemen, des te scherper wordt de hoek PRE, de boog RE wordt dus hoe langer hoe kleiner, en bijgevolg ook de ordinaat PQ, zonder ondertusschen ooit $= o$ te kunnen worden, waaruit dan volgt, dat CD asijmptote is zoowel van de tak, die ter regterzijde, als van die, welke ter linkerzijde van AA′ ligt; en komt F in N, dan valt R in B, AR valt derhalve op AB, en wordt tangens van den cirkel, zoodat alsdan en PR en PQ $= o$ wordende, de kromme door het punt B moet gaan.

Het blijkt ook uit de vergelijking, dat y niet groter dan b en niet kleiner dan $-b$ kan zijn; want anders zou $\sqrt{b^2 - y^2}$, en dus ook x, imaginair worden. Dit maximum en minimum van y komt nu overeen met $x = \frac{(a - b)\,b}{b}$ en $x = \frac{(a + b)\,b}{-b}$, dat is met $x = (a - b)$ en $x = -(a + b)$; het maximum L wordt dus gevonden, door $BO = AB - RF$, en het minimum L′, door $BO' = AB + RF$ te nemen, en dan zullen OL en $O'L' = RF = b$ zijn. Het is uit hetgeen wij boven gezegd hebben, dat namelijk de hijperbool alle de lijnen PP′ midden door deelt, nu duidelijk intezien, dat deze punten L en L′ juist overeen moeten komen met de punten, waarin onze kromme door de hijperbool gesneden wordt; en daar $NO = NO' = a$ is, volgt hier nog uit dat de lijn LL′, welke het maximum L met het minimum L′ vereenigt, door het middelpunt N van de hijperbool zal gaan, en dat LL′ dus een diameter van de hijperbool moet zijn.

Al wat wij van onze kromme tot nog toe ge-

 segd

zegd hebben, betreft dezelve in het algemeen, en is op alle drie de Figuren even toepasselijk. Het is hier nu de plaats, om van de verschillende vormen te spreken, welke onze kromme aanneemt, naarmate a groter, gelijk of kleiner dan b is.

1°. Wij hebben (*Fig.* 124) geconstrueerd in de onderstelling dat $a > b$ is, daar nu y niet groter dan b kan zijn, kan y niet $= a$ genomen worden en de kromme kan dus niet door het punt A gaan, daar dus alleen de onderstelling van $y = 0$ in dit geval ook $x = 0$ kan maken, snijdt de kromme AA' alleen in het punt B, en de eene tak ligt dus geheel ter regterzijde en de andere geheel ter linkerzijde van AA', en daar het bovendien uit de vergelijking blijkbaar is, dat $a > b$ zijnde, x voor iedere positieve waarde van y positief, maar voor iedere negatieve waarde van y negatief moet zijn, volgt hieruit, dat de eene tak der kromme geheel in den hoek CBA en de andere tak geheel in de hoek DBA' moet liggen.

$(a - b)$ is hier positief, en het maximum L, dat met $x = (a - b)$ overeenstemt, valt dus ter linkerzijde van AA', terwijl het *minimum* L', dat met $x = -(a + b)$ overeenkomt, ter regterzijde van AA' valt.

2°. Als $a = b$ is, verkrijgt de kromme den vorm, zoo als in Fig. 125 is aangewezen. De vergelijking wordt dan $x = \frac{(b-y)(b \pm \sqrt{b^2-y^2})}{y}$, en x wordt nu niet alleen $= 0$, als $y = 0$ is, maar ook als $y = b = a$ is, zoo dat de kromme hier door het punt B en door het punt A moet gaan. Nemen wij nu in acht, 1°. dat y niet grooter dan b kan zijn, 2°. dat $y = b$ zijnde $x = 0$ is, en 3°, dat voor alle positieve waarden van y, beide de waarden van x positief zijn, dan volgt hieruit, dat in ons tegenwoordig geval, waarin $a = b$ is, de kromme noodzakelijk in A een keer-

keerpunt moet hebben: want om dat voor iedere positieve waarde van BS, of y de beide waarden van x, dat is SP en SP′ beide positief moeten zijn, en dus de punten P en P′ beide ter linkerzijde van AA′ moeten liggen, kan de kromme niet door het punt A gaan, ten zij A *of een keerpunt*, of *een raakpunt van AA′ met de kromme* zij; zoo nu AA′ een raaklijn aan het punt A was, zou iedere andere lijn, welke door A gaat, en dus ook AV evenwijdig DC, de kromme in A moeten snijden, hetgeen onmogelijk is, daar y niet grooter dan b kunnende zijn, er geen punt der kromme boven AV kan liggen. A kan bijgevolg geen raakpunt en moet dus een keerpunt zijn, en wij hebben hier voorbedachtelijk zoo lang over uitgeweid, om te doen zien, hoe men in sommige gevallen, het bestaan van keerpunten en maxima of minima uit de omstandigheden kan opmaken, zonder dat men tot de differentiaal-rekening zijne toevlugt behoeft te nemen.

Is echter y negatief, dan worden hier de beide waarden van x negatief, en de kromme, na van A door B gegaan te zijn, valt dus wederom geheel in den hoek DBA′; verder moeten wij hier nog opmerken, dat het maximum van y, waarbij $x = a - b$ is, hier $x = 0$ geeft, en dit bevestigt dus volkomen dat de kromme hier in A haar hoogste punt bereikt heeft, terwijl het minimum L′, waarvoor $x = -(a + b)$ is, hier $x = -2b$ geeft, en dus gevonden wordt, door BO′ = 2AB te nemen.

3°. Laat ons nu den vorm der kromme uit de vergelijking zien optemaken, in het geval waarin $a < b$ zijnde, de kromme met de constructie van *Fig.* 126 moet overeenkomen. Stellen wij ten dien einde in de vergelijking . . .

$$\frac{(a-y)\,(b \pm \sqrt{b^2 - y^2})}{y}; \; y \text{ positief van o tot } a,$$

zoo zijn de beide waarden van x altijd positief, tot dat $y = a$, $x = 0$ maakt; voor alle de waarden van BS, kleiner dan BA, ligt dus de kromme geheel ter linkerzijde van AB, en zij gaat door de punten A en B: maar voor alle waarden van y, tusschen a en de grootste waarde b, zijn beide de waarden van x negatief, tot dat $y = b$, x in de enkele waarde $a - b$ doet overgaan, welke hiermede negatief is. Voor $y = b$ is er dus slechts eene negative waarde van x, welke het hoogste punt L oplevert, voor elke waarde van y tusschen b en a, of tusschen BV en BA, liggen er altijd twee punten P en P′ ter regterzijde van AB, welke zich in het punt A vereenigen, wanneer $y =$ BA wordt, en wordt y tusschen a en 0 en dus op BA genomen, liggen die beide punten P en P′ ter linkerzijde van *AB*, en verwijderen zich hoe langs hoe meer van elkander, tot dat $y = 0$, de eene waarde van x oneindig en de andere $= 0$ maakt. *Zie daar dan* de juiste beschrijving van de knoop ALP′A, welke in den hoek A′BD ligt, en welker bestaan dus uit de beschouwing der vergelijking noodzakelijk is. Daar nu alle negatieve waarden van y, x noodzakelijk negatief maken, ligt de *kromme*, na van A door B gegaan te zijn, wederom geheel in den hoek A′BD. De maxima en minima van y liggen hier eindelijk beide ter regterhand van AA′, want $a - b$ is negatief en het punt L wordt hier gevonden door BO = FR − AB = AV te nemen, en het punt L′, door BO′ = FR + AB te maken.

Differentieren wij nu onze vergelijking, dan zullen wij voor de achtervolgende differentialen vinden:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{-ab(b^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \pm (y^3 - ab^2)}{y^2 (b^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{2ab(b^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \pm b(2ab^3 - 3aby^2 + by^3)}{y^3 (b^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^3 x}{\partial y^3} =$$

$$\frac{\delta^3 x}{\delta y^3} = -\frac{6ab(b^2-y^2)^{\frac{3}{2}} \mp 3b(-2ab^5+5ab^3y^2-4aby^4+by^6)}{y^4(b^2-y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

De uitdrukking van $\frac{\delta x}{\delta y}$ dient ons tot twee verschillende oogmerken, 1°. geeft deze uitdrukking, zoo als bekend is, ons de tangens des hoeks, welke de raaklijn van eenig punt P met den as AA' der ordinaten maakt, zoo dat deze hoek $= \varphi$ stellende, wij hebben zullen $Tang\, \varphi =$ $\frac{\mp ab\sqrt{b^2-y^2} \pm (y^3 - ab^2)}{y^2\sqrt{(b^2-y^2)}}$, geldende het bovenste teeken voor eenig punt P en het benedenste voor eenig daarmede overeenstemmend punt P'. Laat ons deze formule op eenige der voornaamste punten van onze kromme toepassen.

1°. Het blijkt van zelven, dat voor de hoogste punten L en L' de tangens parallel aan CD moet zijn, en inderdaad stellende $y = \pm b$, wordt in *Fig.* 124 en 126, waar $a >$ of $< b$ is, $Tang.\, \varphi = \pm\, \infty = Tang.\, 90°$, hetwelk aantoont, dat de tangens in die punten loodregt op AA' is, en dus evenwijdig aan CD.

Maar in Figuur 125, waarin $a = b$ is, wordt, $y = -b$ stellende, wel $Tang\, \varphi = \infty = Tang.\, 90°$ voor de tangens aan het punt L'; maar stellende $y = b$, wordt $Tang.\, \varphi = \frac{0}{0}$ en om deze waarde te bepalen, moeten wij teller en noemer van de breuk $\frac{\mp b^2(b^2-y^2)^{\frac{1}{2}} \pm (y^3 - ab^2)}{y^2(b^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}$ differentieren; zulks nu verrichtende, vinden wij, na alles door δy gedeeld te hebben, na herleiding $\frac{b^2 \pm 3y\sqrt{b^2-y^2}}{2b^2 - 3y^2}$, en stellende hierin $y = b$, zoo hebben wij $Tang.\, \varphi = -1 = Tang.\, 135°$; makende dan $BZ = BA$ en trekkende AZ, zal deze

deze de tangens aan het keerpunt A zijn, want dan is $\angle$ ZAB $=$ 45° en dus $\angle$ ZAA' $=$ 135°.

2°. Stellen wij, om de tangens aan het punt B te vinden, $y = 0$, dan wordt $Tang.\,\varphi = \frac{-ab^2 \mp ab^2}{0} = \infty$ of $\frac{0}{0}$: Daar wij nu reeds opgemerkt hebben, dat de bovenste waarde van $Tang.\,\varphi$ voor het punt P, en de benedenste voor het punt P' dient, blijkt het, dat $Tang.\,\varphi = \infty$ niet tot het punt B behoort, maar tot de punten, welke op eenen oneindigen afstand de assijmptote CD raken, en waarvan de assijmptote, zelve tangens zijnde, regthoekig op AA' staat. De waarde $Tang.\,\varphi = \frac{0}{0}$ behoort dus tot het punt B; teller en noemer van $Tang.\,\varphi = \frac{-ab\sqrt{b^2-y^2} \pm (y^2 - ab^2)}{y^2\sqrt{b^2-y^2}}$ dan wederom differentierende, komt er $\frac{ab - 3y\sqrt{b^2-y^2}}{2b^2 - 3y^2}$ en hierin $y = 0$ gesteld, komt er $Tang.\,\varphi = \frac{a}{2b}$ voor de tangens van den hoek UBA', zijnde deze tangens in *Fig.* 124, waar $a = b$ is, gelijk $\frac{1}{2}$.

3°. Willen wij eindelijk in *Fig.* 126 de tangens aan het punt A berekenen, in welk punt de beide takken der kromme elkander snijden, zoo moeten wij in de algemeene uitdrukking voor $Tang.\,\varphi$, $y = a$ stellen, en dan verkrijgen wij

$$Tang.\,\varphi = \frac{-b\sqrt{b^2-a^2} \pm (a^2 - b^2)}{a\sqrt{b^2-a^2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-a^2}}{a}$$

gevende het bovenste teeken den hoek WAA' en het benedenste den hoek W'AA', en in aanmerking

king nemende, dat $Tang.(x-y) = \frac{Tang.x\,Tang.y}{1+Tang.x\,Tang\,y}$ is, zullen wij voor de tangens van den hoek WAW', dat is voor de tangens van den hoek waaronder de beide takken der kromme elkander in het punt A snijden, vinden: $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}$.

Maar de waarde van $\frac{\delta x}{\delta y}$ kan ons ook ten anderen dienen, om de grootste waarde van x te bepalen, want dan moet $\frac{\delta x}{\delta y} = 0$, en dus $-(ab\sqrt{b^2-y^2}) = \pm(y^3 - ab^2)$ zijn. Dit quadraterende, komt er na behoorlijke herleiding $y^4 - 2ab^2y + a^2b^2 = 0$, voor de vergelijking welke de waarden van y moet bevatten, welke x een maximum of minimum zullen maken: wij zullen ook deze vergelijking op de drie vormen van onze kromme toepassen.

In *Fig.* 124, waar $a > b$ is, stellen wij tot een voorbeeld $a = 2b$, zijnde die Figuur op deze afmeting geteekend, de vergelijking voor het maximum van x wordt dan $y^4 - 4b^3y + 4b^4 = 0$, welke vergelijking, geen bestaanbare wortels hebbende, aantoont, dat de kromme in dit geval voor geen maximum of minimum ten opzigte van x vatbaar is, en dit verschijnsel zullen wij altijd zien plaats hebben, als $a > b$ is.

In *Fig.* 125 is $a = b$ en de vergelijking wordt alsdan $y^4 - 2b^3y + b^4 = 0$, of stellende $y = az$, $z^4 - 2z + 1 = 0$, waaruit $z = 1$ en $z = 0{,}55$ ten naasten bij, zijnde de twee andere wortels onbestaanbaar, zoo dat $y = a$, en y ten naasten bij $= 0{,}55\,a$; de eerste waarde van y geeft het punt A of L, waarin x een minimum is, en de tweede het punt T, waarin x een maximum is.

In *Fig.* 126 stellen wij, om dat $a < b$ moet we-

wezen, tot een voorbeeld $b = 2a$, zijnde dit de maat, waarop *Fig.* 126 geconstrueert is, dan wordt de vergelijking voor het maximum of minimum van x, $y^4 - 8a^3y + 4a^4 = 0$, of $y = az$ stellende, $z^4 - 8z + 4 = 0$; deze vergelijking heeft nu eene wortel $= 0{,}5$ en eene $= 1{,}8$, beide bij nadering, en de twee andere wortels zijn onbestaanbaar, de eerste, of $y = 0{,}5\,a$ verschaft ons het maximum T, en de tweede, $y = 1{,}8\,a$, het minimum T′.

Wij hebben hier de benadering der wortels niet verder voortgezet, om dat dit tot de discussie niets afdoet, en hebben ons ook onthouden, van de gevondene waarde van y, die wij voor de maxima en minima van x vonden, aan de uitdrukking $\frac{\partial\partial x}{\partial y^2}$ te toetsen, om dat het bestaan van deze maxima en minima hier uit den aart der zaak en het boven gezegde klaarblijkelijk was; wij merken alleen aan, dat men bij deze substitutie in sommige gevallen voor $\frac{\partial\partial x}{\partial y^2}$ de waarde $\frac{0}{0}$ verkrijgt, en dat men dan tot de bekende regels toevlugt moet nemen, om deze waarde te bepalen.

De waarde van $\frac{\partial\partial x}{\partial y^2}$ zullen wij ondertusschen gebruiken om de buigpunten van onze kromme te bepalen, want in die punten moet φ een maximum of minimum zijn, en dus ook *Tang.* φ of $\frac{\partial x}{\partial y}$ en wij moeten bijgevolg $\frac{\partial\partial x}{\partial y^2} = 0$ stellen en hebben alzoo, om de buigpunten aan onze kromme te vinden,

$$2a(b^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \pm (2ab^3 - 3aby^2 + by^3) = 0$$

dat is $2a(b^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} = \pm(2ab^3 - 3aby^2 + by^3)$

deze

deze vergelijking gequadrateert en behoorlijk herleid, zal voortbrengen
$(b^2 + 4a^2)y^3 - 6ab^2y^2 - 3a.b^2y + 4ab^4 = o$
wij merken echter hierbij aan, dat de waarden van y, uit deze vergelijking gevonden, aan de uitdrukking, die wij voor $\frac{\partial^3 x}{\partial y^3}$ vonden, moeten getoetst worden en dat $\frac{\partial^3 x}{\partial y^3} = o$ wordende, ook $\frac{\partial^4 x}{\partial y^4} = o$ moet zijn &c. (Zie hierover nader de oplossing van het 92[ste] Voorstel).

Is nu, zoo als in *Fig.* 124, waar $a > b$ moet zijn, $a = 2b$, dan wordt deze vergelijking voor de buigpunten $17y^3 - 12by^2 - 12b^2y + 8b^3 = o$, waarvan de wortels, slechts tot in tiende deelen benaderd, zijn $y = o, 9b$; $y = o, 6b$ en $y = -o, 7b$, makende dus BY $= \frac{8}{18}$ FR; BY′ $= \frac{6}{18}$ FR en BY″ $= -\frac{7}{18}$ FR, zullen wij de drie buigpunten X, X′ en X″ verkrijgen.

In *Fig.* 125 is $a = b$, en de vergelijking is dus $5y^3 - 6by^2 - 3b^2.y + 4b^3 = o$, waaruit y twee wortels heeft $= a$ en de derde gelijk $-\frac{4}{5}a$, niet ten naasten bij, maar volkomen, de twee eerste geven ons het dubbelde of het keerpunt A, en de laatste het buigpunt X.

Stellen wij eindelijk in *Fig.* 126, waar $a < b$ is, b wederom $= 2a$, dan hebben wij de volgende vergelijking $2y^3 - 6ay^2 - 3a^2y + 16a^3 = o$, waaruit eene wortel ten naasten bij $= -1\frac{1}{2}b$, zijnde de twee andere imaginair, en de kromme van *Fig.* 126 heeft dus slechts een buigpunt X, dat met BY $= -1\frac{1}{2}a$ of $-\frac{3}{4}b$ overeenstemt.

Wij zullen deze oplossing besluiten, met nog eenige woorden over de inhoudvinding van onze kromme te zeggen. Wij kunnen hieromtrent in geene bijzonderheden treden, wijl deze oplossing als-

alsdan veel te wijdloopig zou worden, en vergenoegen ons alzoo met het volgende aantewijzen.

Het is bekend, dat de inhoud van eenig stuk BSP′B (*Fig.* 124) $= \int x\delta y$ is, wijl wij nu hebben $x = \frac{(a-y)(b \pm \sqrt{b^2 - y^2})}{y}$ is

$$x\delta y = \frac{(a-y)(b \pm \sqrt{b^2-y^2})\delta y}{y},$$ hetwelk geïntegreert geven zal

$$\int x\delta y = ab\, Log.\, y - by \pm (ab\, Log. \frac{b - \sqrt{b^2 - y^2}}{y} + \frac{(2a-y)\sqrt{b^2-y^2}}{2} - \tfrac{1}{2}b^2\, Boog. Sin. \frac{y}{b}) + C \ldots (A)$$

geldende het bovenste teeken voor eenig stuk BSPS′C, begrepen tusschen SP, de asSijmptote BC en de oneindige tak PS′; en het benedenste voor eenig stuk SP′BS, nemende dan het benedenste teeken, hebben wij

$$BSP'B = ab\, Log. \frac{y^2}{b - b\sqrt{b^2 - y^2}} + \tfrac{1}{2}b^2\, boog. Sin. \frac{y}{b}$$

$$- \frac{2by + (2a - y)\sqrt{b^2 - y^2}}{2} + C$$

daar nu dit stuk $= 0$ moet worden, als $y = 0$ is, hebben wij $C = ab\,(1 - Log.\, 2b)$: waardoor de verbeterde integraal voor het benedenste teeken wordt

$$BSP'B = ab\, Log. \frac{y^2}{2b(b - \sqrt{b^2 - y^2})} + \tfrac{1}{2}b^2 boog. Sin. \frac{y}{b}$$

$$+ b\,(a - y) - \frac{(2a - y)\sqrt{b^2 - y^2}}{2}$$

en stellende hierin $y = b$, komt er voor den inhoud van het geheele stuk BVLP′B deze waarde, $ab\, Log. \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}b^2 \pi + b\,(a - b)$ en dus in *Fig.* 125, waar $a = b$ is, AP′TBA $= b^2\,(Log. \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\pi.)$

maar

maar nemen wij het bovenſte teeken van (A), zullen wij vinden, dat het ſtuk BSPS′C oneindig groot is.

Stellen wij nu (*Fig.* 124) VS $= z$, dan is $y = (b - z)$, en dit in (A) ſubſtituerende, verkrijgen wij,

$$(B) \ldots \int x\,dz = -ab\,Log.(b-z) + b(b-z) \pm \left(ab\,Log.\frac{b-\sqrt{2bz-z^2}}{b-z} + \frac{(2a-b+z)\sqrt{2bz-z^2}}{2} - \tfrac{1}{2}b^2\,Boog.Sin.\frac{b-z}{b}\right) + C$$

waarin het bovenſte teeken voor eenig ſtuk VSPEV en het benedenſte voor eenig ſtuk VSP′LV moet dienen, nemende nu het benedenſte teeken, dan wordt

$$VSP'LV = -ab\,Log.\frac{(b-z)^2}{b-\sqrt{2bz-z^2}} - \tfrac{1}{2}b^2\,Boog.Sin.\frac{b-z}{b} + \frac{2b(b-z)+(2a-b+z)\sqrt{2bz-z^2}}{2} + C$$

maar dit ſtuk moet $= 0$ zijn, in de onderſtelling van $z = 0$, en wij hebben dus

$$C = ab\,Log.b + \tfrac{1}{4}b^2\pi - b^2$$

en ſtellende nu $z = b$, hebben wij voor den inhoud van het ſtuk VLP′BV wederom

$ab\,Log.\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}b^2\pi + b(a-b)$, even als boven.

De formule (B) ſtrekt ons echter tot een nuttiger einde, want wij kunnen door dezelve gemakkelijk den inhoud van eenig ſtuk PLP′P, bevat tusſchen de kromme en eenige koorde PP′, welke evenwijdig aan CD is, bepalen; want daar het bovenſte teeken van (B) voor VSPLV, en het benedenſte voor VSP′LV dient, hebben wij door die waarden van elkander aftetrekken,

$$PLP'P = -2ab\,Log.\frac{b-\sqrt{2bz-z^2}}{b-z} - (2a-b+z)\sqrt{2bz-z^2} + b^2\,Boog.Sin.\frac{b-z}{b} + C$$

en daar deze inhoud o moet zijn, als $x = o$ is, vinden wij $C = -\frac{1}{2} b^2 x$, zoo dat de verbeterde inhoud zal zijn,

$$PLP'P = 2ab \, Log. \frac{b + \sqrt{2bx - x^2}}{(b - x)} -$$

$$(2a - b + x)\sqrt{2bx - x^2} + b^2 Boog. Sin. \frac{b - x}{b} - \frac{1}{2} b^2 x$$

waardoor de inhoud van ieder stuk PLP'P ten vollen bepaald is: en stellen wij hierin $x = b$, word deze waarde oneindig groot, uit hoofde van $2ab \, Log. \frac{2b}{o}$: waaruit blijkt, dat de ruimte, besloten tusschen de kromme en de asijmptote, oneindig is; hetgeen ook uit de bekende eigenschap der snijdende hijperbool gemakkelijk is afteleiden; en het zal nu niet moeijelijk zijn, om deze formule voor den inhoud, op alle vormen der kromme, die wij opgegeven hebben, toetepassen.

N°. 139. Door

I. R. Schmidt.

Laat op eene onbepaalde lijn DE (*Fig.* 127) eene perpendiculair $BA = a$ genomen worden: wanneer dan uit A eenige regte lijn AR tot DE getrokken wordt, en uit R eene loodlijn $RT = b$ wordt opgerigt, dan zal het punt P, waarin de cirkel, uit T met TR als radius beschreven, de lijn AR snijdt, een punt van de begeerde kromme zijn.

Want laat uit P de loodlijnen PQ en PS op DE en AB worden nedergelaten, zoo wij dan $BQ = x$ en $PQ = y$ stellen, dan is, TP trekkende,

$$RQ = \sqrt{[TP^2 - (PQ - TR)^2]} = \sqrt{[b^2 - (y - b)^2]}$$
$$. . . . . . . = \sqrt{(2by - y^2)}.$$ Verder is

$$RQ^2 : PQ^2 = PS^2 : AS^2 \text{ of } 2by - y^2 : y^2 = x^2 : (a - y)^2$$

waar-

waaruit $x^2 = \frac{(a-y)^2\,(2by-y^2)}{y^2}$ en

$$x = \pm\frac{a-y}{y}\sqrt{2by-y^2} = \pm(a-y)\sqrt{\frac{2b-y}{y}}$$

Deze constructie dan op verschillende punten R toepassende, word de gevraagde kromme zeer gemakkelijk geconstrueerd.

Nu is $RP = \sqrt{[RQ^2+PQ^2]} = \sqrt{2by}$ en $AR = \sqrt{(RB^2+AB^2)} = \sqrt{[(\sqrt{2by-y^2}+x)^2+a^2]}$ $= \frac{a}{y}\sqrt{2by}$; dus $AR \times RP = 2ab$, waaruit deze merkwaardige eigenschap van onze kromme volgt, *dat de regthoek uit de lijnen AR en RP overal gelijk eene standvastige grootheid is.*

Het blijkt nu, zoo wel uit de constructie, als uit de vergelijking,

1°. Dat y nooit grooter dan $2b$ kan zijn. Uit de constructie, omdat de koorde RP niet grooter dan de middellijn kan zijn; en uit de vergelijking, omdat $y > 2b$ stellende, $\sqrt{\frac{2b-y}{y}}$ imaginair wordt, en dus voor x eene imaginaire waarde geeft; en deze grootste waarde van y stemt overeen met $x = 0$, waaruit blijkt, dat het punt C, waarin de kromme lijn de lijn AB snijdt, voor y een maximum geeft: namelijk $BC = 2b = 2RT$, en wij hebben dus overal $AR \times RP = AB \times BC$.

2°. Dat het maximum, dat wij voor y gevonden hebben, namelijk $y = 2b$, het eenigste is, waarvoor y vatbaar is; want wanneer y kleiner wordt, wordt $2b - y$, en dus zoo veel te meer $\frac{2b-y}{y}$ grooter; $a - y$ wordt in die onderstelling mede grooter; waaruit volgt, dat x aangroeit naarmate y afneemt, en dat dus y omgekeerd bestendig kleiner wordt, naarmate x toeneemt. Dit

volgt ook uit de conſtructie, want naarmate x grooter wordt, wordt ook ∠ TRP grooter, en dus de koorde RP kleiner. Stellen wij eindelijk $y = 0$, dan wordt x oneindig en DE is dus asſijmptote van de kromme.

3°. Dat y ook niet negatief kan zijn, want y negatief ſtellende, wordt $\sqrt{\frac{2b - y}{y}}$ en dus ook x altoos imaginair. Alle waarden van y zijn dus begrepen tusſchen de limieten $2b$ en 0, en er kan geen punt der kromme beneden de lijn DE vallen.

Offchoon nu al wat wij tot hiertoe gezegd hebben, deze kromme in het algemeen betreft, is hare vorm ondertusſchen zeer verſchillend, naarmate a grooter, gelijk of kleiner dan $2b$ is; *Fig.* 127 is geconſtrueerd in de onderſtelling van $a > 2b$, en de kromme lijn kan *hier niet door* het punt A gaan, omdat y niet grooter dan $2b$ kunnende zijn, niet $= a$ kan genomen worden. *Fig.* 128 is geconſtrueerd in de onderſtelling van $a = 2b$, de vergelijking wordt alsdan

$$x = \pm (a - y) \sqrt{\frac{a - y}{y}},$$

y hier op zijn grootst $= 2b = a$ zijnde, gaat de kromme hier door het punt A, daar de punten A en C hier op elkander vallen; maar is $a < 2b$ zoo als in *Fig.* 129, dan maakt de onderſtelling van $y = a$ zoo wel $x = 0$, als de onderſtelling van $y = 2b$; het punt C ſtaat hier dus boven A, en de kromme moet de lijn AB in de punten A en C ſnijden; daar nu de kromme uit hoofde van het dubbele teeken, dat de waarde van x heeft, ſimetriek moet zijn ten opzigte van den as der ordinaten AB, is dit niet mogelijk, *ten zij de* takken der kromme elkander in A ſnijden, en de kromme alzoo een knoop hebbe; eene waarheid welke de conſtructie volkomen bevestigt.

Om

Om den hoek te bepalen, welke de tangens van eenig punt P der kromme met den as AB der ordinaten maakt, moeten wij de waarde van $\frac{\delta x}{\delta y}$ zoeken, welke, zoo als bekend is, de tangens van die hoek uitdrukt.

Nu is $x = \pm \left(\frac{a - y}{y}\right) \cdot \sqrt{(2by - y^2)}$

dus $\delta x = \pm \left[\frac{- ab - by + y^2}{y \sqrt{(2by - y^2)}}\right] \delta y$

zoo dat $\frac{\delta x}{\delta y} = \pm \left(\frac{- ab - by + y^2}{y \sqrt{(2by - y^2)}}\right)$, zijnde dit de uitdrukking voor de tangens des hoeks, welken de raaklijn uit eenig punt P van de kromme, met de lijn AB maakt.

Stellen wij nu in deze uitdrukking $y = 2b$, word dezelve $\pm \left(\frac{- ab + 2b^2}{0}\right)$, eene uitdrukking, welke voor *Fig.* 127. en 129, waarin $a >$ of $< 2b$ is, oneindig wordt, en dus $=$ *Tang.* 90° is, en dus bevestigt, dat die tangens in *Fig.* 127 en 128 evenwijdig aan den as DE is, en dat dus het punt C een maximum is.

Maar in *Fig.* 128, waar $a = 2b$ is, wordt deze uitdrukking $\frac{0}{0}$, en om de tangens van het punt C voor *Fig.* 128 te bepalen, moeten wij bijgevolg onderzoeken wat $\frac{- 2b^2 - by + y^2}{y \sqrt{(2by - y^2)}}$ wordt, in de onderstelling van $y = 2b$; differentieren wij dan den teller en den noemer, komt er, na onder en boven met $\sqrt{(2by - y^2)}$ gemultipliceerd en door δy gedeeld te hebben: $\frac{(- b + 2y) \sqrt{(2by - y^2)}}{3by - 2y^2}$, en stellende hier in

 $y =$

$y = 2b$, wordt deze uitdrukking $= 0 = Tang.\,0°$. BA is dus in *Fig.* 128 tangens aan beide takken der kromme, en het punt A is bijgevolg een keerpunt.

In *Fig.* 129 heeft de kromme, zoo als wij reeds boven gezien hebben, eene knoop, en de takken snijden elkander in het punt A, waar $y = a$ is; om dan de tangenten aan dit punt A te bepalen, moeten wij in de uitdrukking $\pm \left(\frac{-ab - by + y^2}{y\sqrt{(2by - y^2)}}\right)$, $y = a$ stellen, en dezelve verandert hierdoor in $\pm \sqrt{\frac{2b - a}{a}}$ of $\pm \frac{\sqrt{(2ba - a^2)}}{a}$, waardoor de tangenten aan dit punt A gemakkelijk te construeren zijn.

Om eindelijk te onderzoeken, *in welke gevallen onze kromme voor buigpunten vatbaar is*, moeten wij opmerken, dat de gevondene hoek der tangens met den as AB, in dit geval een maximum of minimum moet zijn en dat dus $\frac{\partial\partial x}{\partial y^2}$ gelijk o moet worden *gesteld*; nu hebben wij gevonden:

$\frac{\partial x}{\partial y} = \pm \frac{(-ab - by + y^2)}{y\sqrt{(2by - y^2)}}$, wij hebben dus

$$\frac{\partial\partial x}{\partial y^2} = \frac{3ab^2 + (b^2 - 2ab)y}{y(2by - y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

en bijgevolg $(b^2 - 2ab)y + 3ab^2 = 0$

of $(2ab - b^2)y = 3ab^2$

waruit $y = \frac{3ab}{2a - b}$

voor de waarde van y, welke een buig*punt* zal aanwijzen. Wij zullen nu deze waarde op de drie verschillende vormen van onze kromme toepassen.

In

In *Fig.* 127, waar $a > 2b$ is, is $y = \frac{3ab}{2a-b}$ altijd positief, en toont dus een buigpunt aan (want y kan, zoo als gezegd is, niet negatief worden), en dit is gemakkelijk te construeren, want wij hebben $2a - b : 3b = a : y$ of $2 AB - RT : 3 RT = AB : BM$, waardoor het punt M en dus de buigpunten V en V′ bepaald worden.

Is, zoo als in *Fig.* 128, $a = 2b$, dan wordt $y = \frac{6b^2}{3b} = 2b$, en deze waarde stemt dus overeen met het gevondene keerpunt A of C, welke punten hier op elkander liggen.

Wij moeten nu nog onderzoeken, wat er gebeurd, wanneer $a < 2b$ is, zoo als in *Fig.* 129, wij kunnen hier $a = 2b - c$ stellen, zijnde c alsdan de waarde van CA, en wij hebben hierdoor voor het buigpunt

$$y = \frac{3ab}{2a-b} = \frac{3b(2b-c)}{2(2b-c)-b} = \frac{6b^2-3bc}{3b-2c} = 2b + \frac{bc}{3b-2c}$$

herinneren wij ons nu, dat y niet grooter dan $2b$ en niet negatief of kleiner dan 0 kan zijn, om dat anders x imaginair wordt, dan is het klaar, dat er voor *Fig.* 129 geen buigpunt bestaan kan, ten zij $\frac{bc}{3b-2c}$ negatief, en wel tusschen 0 en $-2b$ zij; c kan echter niet grooter dan $2b$ zijn, want was c grooter dan $2b$, zou a negatief zijn, en dan was onze vergelijking niet meer $\pm(a-y)\sqrt{\frac{2b-y}{y}}$, maar $\pm(a+y)\sqrt{\frac{2b-y}{y}}$, over welke vergelijking wij straks nader spreken zullen: laten wij dan de waarde van $y = 2b + \frac{bc}{3b-2c}$ voor alle waarden van C van 0 tot $2b$ beschouwen.

Is $c = 0$ dan is $y = 2b$, en wij vervallen alsdan in het geval van *Fig.* 128, maar c latende aangroeijen, van 0 tot $\frac{3}{2}b$, wordt $\frac{bc}{3b-2c}$ grooter en grooter, tot dat $c = \frac{3}{2}b$, $\frac{bc}{3b-2c}$ oneindig maakt, voor al de waarden van c van 0 tot $\frac{3}{2}b$ zal men dus $y > 2b$ vinden, en er zal dus geen buigpunt mogelijk zijn, maar c verder van $\frac{3}{2}b$ tot $2b$ latende aangroeijen, word y altijd negatief, en er bestaat ook voor die waarden van c bijgevolg geen buigpunt, de kromme van *Fig.* 129 kan bijgevolg geen buigpunt hebben.

Is echter $c > 2b$ en dus a negatief, dan verandert onze vergelijking in $x = \pm(a+y)\sqrt{\frac{2b-y}{y}}$; deze nu wordt even gemakkelijk geconstrueert als de voorgaande, de loodlijn RT *moet dan in plaats* van aan denzelfden kant der lijn DE, als AB, genomen te worden, slechts aan den anderen kant genomen worden, zoo als in *Fig.* 130 te zien is, en wanneer wij dan al het gezegde op deze nieuwe Figuur op eene analogische wijze toepassen, zullen wij de volmaakte *overeenkomst* van deze Figuren gemakkelijk opmerken: AP × PR zal hier wederom altijd eene standvastige grootheid zijn, doch de kromme, die dan beneden DE valt, is niet meer voor die afwisseling van vorm vatbaar. Zij heeft altijd twee buigpunten, welke gevonden worden door y, dat is BM $= \frac{3ab}{2a+b}$ te nemen, en of wij deze en de overige eigenschappen, welke wij voor de kromme der eerste vergelijking gevonden hebben, uit de Figuur zelven afleiden, of wel door a in onze berekeningen overal negatief te stellen, zullen wij voortdurend dezelfde uitkomsten verkrijgen.

N°. 140.

N°. 140. Door

C. Lants Jr., MOSES LEMANS, en *R. Lobatto.*

De drie zijden des driehoeks gegeven zijnde, a, b en c, zoo is de radius des ongeschreven cirkels

$$r = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{a+b+c}$$

en die des omgeschreven cirkels

$$R = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}$$

Stellende nu de zijden des gelijkvormigen driehoeks, om den cirkel, x, y en z, zoo is;

$$x : a = R : r$$

waaruit $x = a \times \frac{R}{r}$

$$= \frac{2a^2bc}{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

en op gelijke wijze

$$y = \frac{2ab^2c}{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

en $z = \dfrac{2abc^2}{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$

N°. 141. Door

C. Lants Jr., *N. Bondt*, *R. Lobatto*, en *A. van der Swan*.

Van de reeks $\frac{3}{9}$, $\frac{10}{11}$, $\frac{17}{13}$ enz. is de algemeene term $\frac{3+(n-1)7}{9+(n-1)2} = \frac{7n-4}{2n+7}$; zal nu deze breuk gelijk een geheel getal a zijn, zoo moet men

men hebben $7a - 4 = 2na + 7a$, waaruit volgt $n = \frac{7a+4}{7-2a}$. Hieruit blijkt, dat $2a$ kleiner dan 7 en dus $a = 1$, 2 of 3 moet zijn; maar $a = 1$ geeft voor n een gebroken; terwijl $a = 2$ en $a = 3$, voor n de waarden van 6 en 25 opleveren; dus zullen de zesde en vijfentwintigste breuken geheele getallen zijn.

N°. 142. Door

C. Lants Jr., *N. Bondt*, en *R. Lobatto.*

Stel voor het gebroken x, zoo is $x - x^3 = x^2$, dus $1 - x^2 = x$, $x^2 + x = 1$, en $x^2 + x + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$; dus $x + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{1\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ en $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$;

N°. 143. Door

A. van der Swan, *C. Lants Jr.*, en *R. Lobatto.*

Laat de evenredigheid zijn $x : nx = y : ny$, zoo is $x + 1 : nx + 1 = 1 : 2$; $nx + 1 : y - 1 = 4 : 5$ en $x + ny = nx + y + 6$. Uit de eerste evenredigheid volgt $nx + 1 = 2x + 2$, dus $nx = 2x + 1$ en $n = \frac{2x+1}{x}$; deze waarde van n in de evenredigheid $nx + 1 : y - 1 = 4 : 5$ en in de vergelijking $x + ny = nx + y + 6$ overbrengende, komt $2x + 2 : y - 1 = 4 : 5$, en $x + \frac{2xy+y}{x} = 2x + y + 7$; of $4y - 4 = 10x + 10$ en $x^2 + 2xy + y = 2x^2 + xy + 7x$; of $2y - 2 = 5x + 5$ en $xy + y = x^2 + 7x$. Door de eerste van deze

deze vergelijkingen tusschen x en y heeft men $y=\frac{5x+7}{2}$ en $xy=\frac{5x^2+7x}{2}$; dus $xy+y$ $=\frac{5x^2+7x}{2}+\frac{5x+7}{2}=x^2+7x$, waaruit volgt: $5x^2+12x+7=2x^2+14x$, $3x^2=2x-7$ en deze vergelijking oplossende: $x=\frac{1\pm2\sqrt{-5}}{3}$; dus $y=\frac{5x+7}{2}=\frac{18\pm5\sqrt{-5}}{3}$, $n=2+\frac{1}{x}=$ $2+\frac{3}{1\pm2\sqrt{-5}}=2+\frac{1\mp2\sqrt{-5}}{7}=\frac{15\mp2\sqrt{-5}}{7}$; $nx=\frac{5\pm4\sqrt{-5}}{3}$ en $ny=\frac{35\pm7\sqrt{-5}}{3}$.

N°. 144. Door

N. Bondt, *R. Lobatto*, en *C. Lants Jr.*

Stel voor het gebroken $\frac{1}{x}$, zoo moet $x-\frac{1}{x}$ $=n.\frac{1}{x}$ zijn; dus $x^2-1=n$, $x^2=n+1$, en $x=\sqrt{(n+1)}$. Stel tot een voorbeeld $n=3$, zoo wordt $x=\sqrt{4}=2$, $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$, $x-\frac{1}{x}=1\frac{1}{2}$ $=n.\frac{1}{x}$; neem $n=8$, komt $x=\sqrt{9}=3$, $\frac{1}{x}=\frac{1}{3}$, $x-\frac{1}{x}=2\frac{2}{3}=8\times\frac{1}{3}=n\times\frac{1}{x}$ enz.

N°. 145. Door

De Wetenschappelijke Commissie.

Van dit Voorstel is geen voldoende ontbinding ingekomen, en het komt ons voor, dat hetzelve ook niet opgelost kan worden, ten zij men eerst voor y een getal geraden hebbe, waardoor $ay^3 - b$ een rationaal quadraat wordt, als wanneer het gemakkelijk is, meer dergelijke waarden voor y te vinden:

Stel, bij voorbeeld, dat $y = \alpha$ de formule $ay^3 - b$ tot een quadraat maakt, dan stelle men, om nog eene andere waarde voor y te vinden, $y = \alpha + z$, waardoor

$$ay^3 - b = a\alpha^3 - b + 3a\alpha^2 z + 3a\alpha z^2 + az^3,$$

Stel verder $\sqrt{(ay^3 - b)} = \sqrt{(a\alpha^3 - b)} + pz$, komt

$$ay^3 - b = a\alpha^3 - b + 2pz\sqrt{(a\alpha^3 - b)} + p^2z^2$$

en om deze vergelijking met de vorige overeen te brengen, stelle men

$$2p\sqrt{(a\alpha^3 - b)} = 3a\alpha^2$$

en $p^2z^2 = 3a\alpha z^2 + az^3$, komt

$$p = \frac{3a\alpha^2}{2\sqrt{(a\alpha^3 - b)}} \text{ en } z = \frac{p^2 - 3a\alpha}{a}, \text{ en hier}$$

in de waarde van p brengende:

$$z = \frac{9a\alpha^4}{4(a\alpha^3 - b)} - 3\alpha = \frac{-3a\alpha^4 + 12b\alpha}{4(a\alpha^3 - b)}$$

en hier α bijvoegende, om dat wij $y = \alpha + z$ gesteld hebben, komt

$$y = \alpha + z = \frac{a\alpha^4 + 8b\alpha}{4(a\alpha^3 - b)}.$$

Dus, wanneer $y = \alpha$, de formule $ay^3 - b$ tot een quadraat maakt, zal $y = \frac{a\alpha^3 + 8b}{4(a\alpha^3 - b)} \cdot \alpha$, dezelve ook tot een quadraat maken.

Stel, bij voorbeeld, $a = 3$ en $b = 2$, zoo dat men hebbe $x = \sqrt{(3y^3 - 2)}$, dan voldoet

klaar-

klaarblijkelijk $y = 1$, en hierdoor vindt men verder

$$y = \frac{3a^3 + 8 . 2}{4(3a^3 - 2)} = \frac{19}{4} = 4\tfrac{3}{4}$$

N°. 146. Door

U. Huguenin, en Abraham Fock.

Als men van de voorgestelde vergelijkingen:

$$x^{x+y} = y^n \text{ en } y^{x+y} = x^m$$

de logarithmen $(x+y)\,Log.x = n\,Log.y$ en $(x+y)\,Log.y = m\,Log.x$ met elkander multipliceert, en het product door $Log.x \times Log.y$ deelt, heeft men $(x+y)^2 = mn$, of $x+y = \sqrt{mn}$. Deelt men daarentegen de tweede logarithmische vergelijking door de eerste, zoo bekomt men $\frac{Log.y}{Log.x} = \frac{m}{n} . \frac{Log.x}{Log.y}$; of $\left(\frac{Log.y}{Log.x}\right)^2 = \frac{m}{n}$; $\frac{Log.y}{Log.x} = \sqrt{\frac{m}{n}}$ en $Log.y = \sqrt{\frac{m}{n}} \times Log.x$; derhalve is $y = x^{\sqrt{\frac{m}{n}}}$; hetwelk in $x+y = \sqrt{mn}$ gesubstitueerd zijnde, geeft de eindvergelijking

$$x + x^{\sqrt{\frac{m}{n}}} = \sqrt{mn}$$

Wanneer $\sqrt{mn}$ en dus ook $\frac{\sqrt{mn}}{n} = \sqrt{\frac{m}{n}}$ een rationaal getal is, heeft de oplossing van deze vergelijking geene andere zwarigheid, dan die, welke in den graad zelve gelegen is. Stelt men in dezelve, zoo als bij de oplossing van dit Voorstel in het I *Deel der Wisk. Verlust.*, $m = 12$ en $n = 3$, zoo is $\sqrt{mn} = 6$, $\sqrt{\frac{m}{n}} = 2$,

en

en men heeft slechts de vierkants-vergelijking $x^2 + x = 6$ optelossen; welke $x = 2$ en $x = -3$ tot wortelen heeft; waardoor men $y = 4$ vindt, als men van den positieven wortel van x gebruik maakt.

Worden echter m en n zoodanig aangenomen, dat $\sqrt{mn}$ irrationaal zij, zoo laat zich onze vergelijking geenzins op de gewone wijze oplossen, maar men moet zich alsdan van eene daartoe geschikte naderingswijze bedienen, en deze nadering kan op verschillende wijzen geschieden: bij voorbeeld, als men $x = 1 + z$; $\sqrt{mn} = p$ en $\sqrt{\frac{m}{n}} = q$ stelt, verandert onze eindvergelijking in $1 + z + (1 + z)^q = p$; of volgens de bekende Newtonsche binomiaal-formule, in

$$p = 2 + (q+1)z + \frac{q(q-1)}{1 . 2}z^2 + \frac{q(q-1)(q-2)}{1 . 2 . 3}z^3 + enz.$$

waaruit men, door omkeering van deze reeks, de waarde van z bij nadering vinden kan; wij zullen echter eenen anderen weg inslaan, om eene reeks met minder zamengestelde coëfficienten te bekomen.

Men stelle tot dit einde in $x + y = \sqrt{mn} = p$ en $Log. y = \sqrt{\frac{m}{n}} . Log. x = \frac{p}{n} Log. x$, $x = \frac{1}{2}p - z$ en $y = \frac{1}{2}p + z$, zoo heeft men $Log. (\frac{1}{2}p + z) = \frac{p}{n} Log. (\frac{1}{2}p - z)$, of

$$\frac{p}{n} = \frac{Log. (\frac{1}{2}p + z)}{Log. (\frac{1}{2}p - z)} = \frac{Log. \frac{1}{2}p + Log. \left(1 + \frac{2z}{p}\right)}{Log. \frac{1}{2}p + Log. \left(1 - \frac{2z}{p}\right)}$$

en hieruit:

$$\frac{p}{n} Log. \frac{1}{2}p + \frac{p}{n} Log. \left(1 - \frac{2z}{p}\right) = Log. \frac{1}{2}p + Log. \left(1 + \frac{2z}{p}\right)$$

of

of $(p-n)Log.\frac{1}{2}p = n Log.\left(1+\frac{2z}{p}\right) - p Log.\left(1-\frac{2z}{p}\right)$

Zij nu $\frac{2z}{p} = v$, zoo is $z = \frac{1}{2}pv$, $x = \frac{1}{2}p(1-v)$, $y = \frac{1}{2}p(1+v)$ en men heeft:
$(p-n)Log.\frac{1}{2}p = n Log.(1+v) - p Log.(1-v)$;
maar volgens de eigenschap der natuurlijke, of Hijperbolische logarithmen, is:
$n Log.(1+v) = n(v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \text{enz.})$
$p Log.(1-v) = -p(v + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{4}v^4 + \text{enz.})$
dus $n Log.(1+v) - p Log.(1-v) =$
$(p-n)Log.\frac{1}{2}p = (p+n)v + \frac{1}{2}(p-n)v^2 + \frac{1}{3}(p+n)v^3 + \text{enz.}$
of $\frac{p-n}{p+n}Log.\frac{p}{2} = v + \frac{1}{2}\left(\frac{p-n}{p+n}\right)v^2 + \frac{1}{3}v^3 + \text{enz.}$

Om de waarde van v uit deze reeks te vinden, zullen wij, om te verkorten $a = \frac{p-n}{p+n}Log.\frac{p}{2}$ en $b = \frac{p-n}{p+n}$ stellen, waardoor men heeft:

$$a = v + \frac{1}{2}bv^2 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{4}bv^4 + \frac{1}{5}v^5 + \text{enz.}$$

Voorts stelle men, om deze reeks om te keeren:

$$v = Aa + Ba^2 + Ca^3 + Da^4 + Ea^5 + \text{enz.}$$

en zoo men hiervan de magten v^2, v^3, enz. in onze vergelijking substitueert, en dezelve op o reduceert, bekomt men de vergelijking:

$$\begin{array}{rrrr} o = Aa + & Ba^2 + & Ca^3 + & Da^4 \\ -a + & \frac{1}{2}bA^2a^2 + & bABa^3 + & \frac{1}{2}bB^2a^4 \\ & + & \frac{1}{3}A^3a^3 + & bACa^4 \\ & & + & A^2Ba^4 \\ & & + & \frac{1}{4}A^4ba^4 \end{array}$$

$$+(E + bAD + bBC + A^2C + AB^2 + A^3Bb + \frac{1}{5}A^5)a^5$$
$+$ enz.

en als men de coefficienten van de magten van a gelijk o stelt, vindt men
$A = 1$; $B = -\frac{1}{2}b$; $C = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{3}$;
$D = -\frac{5}{8}b^3 + \frac{7}{12}b$; $E = \frac{7}{8}b^4 - b^2 + \frac{2}{15}$; enz.

der-

derhalve is de waarde van
$y = a - \frac{1}{2}b a^2 - (\frac{1}{3} - \frac{1}{2}b^2) a^3 + (\frac{7}{12}b - \frac{5}{8}b^3) a^4 + (\frac{2}{15} - b^2 + \frac{7}{8}b^4) a^5 -$ enz.
en deze waarde gevonden hebbende, heeft men volgens het voorgaande:

$$z = \frac{1}{2}p y,\ x = \frac{1}{2}p(1 - y) \text{ en } y = \frac{1}{2}p(1 + y)$$

Laat ons tot een voorbeeld $m = 5$ en $n = 3$ stellen, zoo is $p\ \sqrt{15} = 3,8729833$; $b = \frac{p-n}{p+n} = \frac{\sqrt{15}-3}{\sqrt{15}+3} = 4 - \sqrt{15} = 0,1270167$; en daar onze formule op de natuurlijke logarithmen gegrond is, is $Log.\frac{p}{2} = Nat.Log.\sqrt{15} - Nat.Log.2 =$ $1,35402510 - 0,69314718 = 0,66087792$; derhalve heeft men $a = \frac{p-n}{p+n} Log.\frac{p}{2} = b\,Log.\frac{p}{2} =$ $0,1270167 \times 0,66087792 = 0,0839425$; $a^2 =$ $0,00704634$; $a^3 = 0,0005915$; $a^4 = 0,0000497$; $a^5 = 0,00000417$; $b^2 = 0,01613324$; $b^3 = 0,00204924$; $b^4 = 0,00026028$, enz. en hierdoor:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2}b^2 = 0,3252666$$
$$\frac{7}{12}b - \frac{5}{8}b^3 = 0,0728123$$
$$\frac{7}{8}b^4 - b^2 + \frac{2}{15} = 0,11742793$$
$$\frac{1}{2}b a^2 = 0,0004475$$
$$(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}b^2)\ a^3 = 0,0001924$$
$$(\frac{7}{12}b - \frac{5}{8}b^3)\ a^4 = 0,0000036$$
$$(\frac{7}{8}b^4 - b^2 + \frac{2}{15})\ a^5 = 0,0000005$$

Voorts $a = 0,0839425$
$$(\frac{7}{12}b - \frac{5}{8}b^3)\ a^4 = 0,0000036$$
$$(\frac{7}{8}b^4 - b^2 + \frac{2}{15})\ a^5 = 0,0000005$$
Som $= 0,0839466$
$$-\frac{1}{2}b a^2 = -0,0004475$$
$$-(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}b^2) a^3 = -0,0001924$$
Som $= -0,0006399$

deze

deze fom van de eerfte aftrekkende, rest $v = 0{,}0833067$; alzoo is $1 - v = 0{,}9166933$; $1 + v = 1{,}0833067$; $x = \frac{1}{2}p(1 - v) = 1{,}7751689$ en $y = \frac{1}{2}p(1 + v) = 2{,}0978143$; van welke de fom $x + y = 3{,}8729832$ is.

Om nu te onderzoeken, in hoe verre onze gevondene waarden voor x en y met de waarheid overeenftemmen, ftelle men dezelve in de vergelijking $(x + y)\ Log.x = n\ Log.y$; waardoor men heeft:

$3{,}8729833\ Log.\ 1{,}7751689 = 3\ Log.\ 2{,}0978143$;

en daar het om het even is, van welk logarithmisch fijstema men zich bij deze vergelijking bedient, zullen wij van de gewone logarithmen gebruik maken; en hierdoor heeft men:

$$3{,}8729833 \times 0{,}2492397 = 3 \times 0{,}3217671$$

$$\text{of } 0{,}9653012 = 0{,}9653013$$

hetwelk aantoont, dat de gevondene waarden voor x en y, tot op *de laatfte cijfer na*, geheel naauwkeurig zijn: ook kan men zulks nog nader bevestigen, als men de gevondene waarden voor x en y in de tweede vergelijking fubftitueert; want alsdan moet, volgens $(x + y)\ Log.y = m\ Log.x$, ook

$$3{,}8729833 \times 0{,}3217671 = 5 \times 0{,}2492397$$

zijn, en hierdoor verkrijgt men:

$$1{,}2461986 = 1{,}2461985$$

waaruit wederom blijkt, dat de zes eerfte decimalen, in de waarden van x en y geheel naauwkeurig zijn; doch, dat de laatfte decimaal van x iets te klein en die van y iets te groot is.

No. 147. Door

ABRAHAM FOCK.

Laten AA′, BB′, CC′ (*Fig.* 131) de stokken zijn, welke loodregt op den horizon ABC staan, en zij D het punt, waarin de uiteinden hunner schaduwen te zamen komen; dan is AA′ $= 9$, BB′ $= 7$, CC′ $= 4$, AB $= 7\frac{1}{2}$, BC $= 9\frac{1}{2}$ en AC $= 16\frac{3}{18}$. Stel A′D $=$ B′D $=$ C′D $= x$, dan is AD $= \sqrt{(A'D^2 - A'A^2)} = \sqrt{(x^2 - 81)}$, BD $= \sqrt{(B'D^2 - B'B^2)} = \sqrt{(x^2 - 49)}$, en CD $= \sqrt{(C'D^2 - C'C^2)} = \sqrt{(x^2 - 16)}$. Men heeft nu eenen platten vierhoek ABCD, waarvan de betrekking tusschen de zijden en diagonalen in de *Meetk. Anal.*, I *Deels* 1ste *Stukje*, *pag.* 112, opgegeven is. In de aldaar opgegevene vergelijking, de bovenstaande *waarden* substitueerende, en dezelve uitwerkende, verkrijgt men, $- 6099,9939\, x^2 + 1788320,359225 = 0$

$$\text{of } x^2 = \frac{1788320,359225}{6099,9939} = 293,167565171663$$

$$\text{en } x = \sqrt{293,167565171663} = 17,122137$$

dus AD $= \sqrt{(x^2 - 81)} = 14,565973$

BD $= \sqrt{(x^2 - 49)} = 15,625862$

en CD $= \sqrt{(x^2 - 16)} = 16,64835$

Nu is A′D : A′A $=$ *Rad* : *Sin.* ∠ A′DA

B′D : B′B $=$ *Rad* : *Sin.* ∠ B′DB

en C′D : C′C $=$ *Rad* : *Sin.* ∠ C′DC

waaruit ∠ A′DA $= 31^\circ 42' 40''$, ∠ B′DB $= 24^\circ 7' 30''$ en ∠ C′DC $= 13^\circ 30' 35''$. Voorts is

$$Sin.\tfrac{1}{2}\,ADB = \sqrt{\left(\frac{(AB-AD+BD)(AB+AD-BD)}{4\,AD \times BD}\right)}$$

$$Sin.\tfrac{1}{2}\,CDB = \sqrt{\left(\frac{(CB-CD+BD)(CB+CD-BD)}{4\,CD \times BD}\right)}$$

waaruit ∠ ADB $= 28^\circ 29' 20''$ en ∠ CDB $= 34^\circ 3' 0''$.

H-t

Het Voorſtel is dus nu gebragt tot het volgende: gegeven zijnde drie zonshoogten, te weten: 31° 42′ 40″, 24° 7′ 30″ en 13° 30′ 35″, en het verloop van azimuth tusſchen iedere twee van dezelve, als tusſchen de beide eerſte 28° 29′ 30″ en tusſchen de beide laatſte 34° 3′; te vinden de zons declinatie, (welke voor alle drie de hoogten gelijk veronderſteld wordt), de poolshoogte en de uurhoeken.

Zij dan HETPZQ (*Fig.* 132) de middagcirkel; HZ de horizon; EQ de equator; T het toppunt; P de pool; A, B en C de gegevene zonsplaatſen; dan zijn AT, BT en CT de complementen der gegevene zonshoogten; AP = BP = CP, het complement van de zonsdeclinatie; en men zal hebben

$$AT = 90° - (31° \ 42' \ 40'') = 58° \ 17' \ 20''$$
$$BT = 90° - (24° \ 7' \ 30'') = 65° \ 52' \ 30''$$
$$CT = 90° - (13° \ 30' \ 35'') = 76° \ 29' \ 25''$$
$$\angle ATB = 28° \ 29' \ 20''; \ \angle BTC = 34° \ 3' \ 0''$$
$$\text{en } \angle ATC = \angle ATB + \angle BTC = 62° \ 32' \ 20''$$

Laten voorts de punten A, B en C, door bogen van groote cirkels vereenigd worden, en AG loodregt op BT getrokken zijn, dan is *Tang*. TG = *Tang*. AT × *Cos*. ∠ ATB; waaruit TG = 54° 53′ 35″ en BG = BT − TG = 10° 58′ 55″; voorts is *Cos*. TG : *Cos*. BG = *Cos*. AT : *Cos*. AB en hierdoor AB = 26° 12′ 5″.

Op gelijke wijze vindt men door de driehoeken BTC en ATC, BC = 33° 49′ 30″ en AC = 59° 43′ 10″.

De beide driehoeken APB en ACB ſtaan op dezelfde baſis AB; van dezelve zijn bekend AB, AC en BC; men ſtelle AP = BP = CP = *x*; dan heeft men (Banoma, *Drieh.* *pag.* 126) voor den boog CP, welke de toppen dezer driehoeken vereenigt:

$Sin.\,a^2\,Cos.\,x = Cos.\,p\,.\,Cos.\,x + Cos.\,q\,.\,Cos.\,x\,\ldots$
$\ldots\ldots - (Cos.\,p\,.\,Cos.\,x + Cos.\,q + Cos.\,x)\,Cos.\,a$

$$+ 2\sqrt{Sin.\frac{a+p+q}{2}.Sin\frac{p+q-a}{2}Sin\frac{a+p-q}{2}.Sin\frac{a+q-p}{2}}$$

$\times\, 2\sqrt{Sin.(x+\tfrac{1}{2}a)\,Sin.(x-\tfrac{1}{2}a)\,Sin.\tfrac{1}{2}a\,Sin.\tfrac{1}{2}a}$
waarin $a = AB = 26^\circ\, 12'\, 5''$; $p = BC = 33^\circ\, 49'\, 30''$;

$q = AC = 59^\circ\, 43'\, 10''$; $\frac{a+p+q}{2} = 59^\circ\, 52'\, 23''$;

$\frac{p+q-a}{2} = 33^\circ\, 40'\, 18''$; $\frac{a+p-q}{2} = 0^\circ\, 9'\, 13''$

en $\frac{a+q-p}{2} = 26^\circ\, 2'\, 53''$. Stel, om te bekorten, $A =$

$$\sqrt{Sin.\frac{a+p+q}{2}Sin.\frac{p+q-a}{2}Sin.\frac{a+p-q}{2}Sin.\frac{a+q-p}{2}}$$

dan heeft men
$Sin.a^2\,Cos.x = (Cos.p + Cos\,q)(1 - Cos.a)\,Cos.x +$
$4\,.\,A\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\,a\,\sqrt{Sin.\,(x+\tfrac{1}{2}a)\,.\,Sin.\,(x-\tfrac{1}{2}a)}$;
maar $Sin.\,a = 2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\,a\,Cos.\,\tfrac{1}{2}\,a$; $Sin.\,a^2 =$
$4\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\,a^2\,Cos.\,\tfrac{1}{2}\,a^2$ en $1 - Cos.\,a = 2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\,a^2$; dus
$2\,Sin.\tfrac{1}{2}\,a\,Cos.\tfrac{1}{2}\,a^2\,Cos.x = (Cos.p + Cos.q)\,Sin.\tfrac{1}{2}a\,Cos.x$
$\ldots + 2\,A\sqrt{Sin.(x+\tfrac{1}{2}\,a)\,Sin.\,(x-\tfrac{1}{2}\,a)}$.
maar $Sin.(x+\tfrac{1}{2}a)\,Sin.(x-\tfrac{1}{2}a) = Cos.\tfrac{1}{2}a^2 - Cos.x^2$, en
$Cos.p + Cos.q = 2\,Cos.\,\tfrac{1}{2}(p+q)\,Cos.\,\tfrac{1}{2}\,(p-q)$, dus
$Sin.\tfrac{1}{2}\,a\,(Cos.\tfrac{1}{2}a^2 - Cos.\tfrac{1}{2}\,(p+q)\,Cos.\tfrac{1}{2}(p-q))\,Cos.x =$
$A\sqrt{(Cos.\,\tfrac{1}{2}\,a^2 - Cos.\,x^2)}$
en hiervan de tweede magt nemende:
$Sin.\tfrac{1}{2}a^2\,(Cos.\tfrac{1}{2}a^2 - Cos.\tfrac{1}{2}(p+q)\,Cos.\tfrac{1}{2}(p-q))^2\,Cos.x^2$
$= A^2\,Cos.\,\tfrac{1}{2}\,a^2 - A^2\,Cos.\,x^2$.
waaruit volgt:

$$Cos.x = \frac{A\,Cos.\,\tfrac{1}{2}\,a}{\sqrt{(A^2 + (Cos.\tfrac{1}{2}a^2 - Cos.\tfrac{1}{2}(p+q)\,Cos.\tfrac{1}{2}(p-q))^2\,Sin.\tfrac{1}{2}a^2)}}$$

Deze vergelijking geeft $x = 70^\circ.\, 6'.\, 20''.$; dus is de zonsdeclinatie $19^\circ\, 53'\, 40''$, waarvan men den dag door de astronomische tafelen vindt den 19 Mei te zijn.

Ver-

Verder is van den regthoekigen driehoek AGB,
$Cos.\angle ABG = Tang.BG.Cot.AB$
en van den gelijkbeenigen driehoek ABP
$Cos.\angle ABP = Cot.AP.Tang.\frac{1}{2}AB$

Hierdoor vindt men $\angle ABG = 66^\circ\ 46'\ 30''$ en $\angle ABP = 85^\circ\ 10'$; dus $\angle TBP = \angle ABP - \angle ABG = 18^\circ\ 23'\ 30''$.

Trek in den driehoek BTP de loodlijn TF, dan is $Tang.BF = Tang.TB.Cos.\angle TBP$; voorts $PF = PB - BF$, en $Cos.BF : Cos.PF = Cos.TB : Cos.TP$; waardoor gevonden wordt $TP = 17^\circ\ 34'\ 25''$; dus is de poolshoogte $PZ = 72^\circ\ 25'\ 35''$.

Eindelijk is in de driehoeken TPA, TPB en TPC,

$$Cos.\tfrac{1}{2}TPA = \sqrt{\frac{Sin.\frac{1}{2}(TP+PA+TA)\,Sin.\frac{1}{2}(TP+PA-TA)}{Sin.TP.Sin.PA}}$$

$$Cos.\tfrac{1}{2}TPB = \sqrt{\frac{Sin.\frac{1}{2}(TP+PB+TB)\,Sin.\frac{1}{2}(TP+PB-TB)}{Sin.TP.Sin.PB}}$$

$$Cos.\tfrac{1}{2}TPC = \sqrt{\frac{Sin.\frac{1}{2}(TP+PC+TC)\,Sin.\frac{1}{2}(TP+PC-TC)}{Sin.TP.Sin.PC}}$$

en hierdoor vindt men:

$\angle TPA = 44^\circ\ 51'\ 50'' = 2^u\ 59^m\ 27^s$
$\angle TPB = 72^\circ\ 43'\ 20'' = 4^u\ 50^m\ 53^s$
$\angle TPC = 108^\circ\ 39'\ 0'' = 7^u\ 14^m\ 36^s$.

hetwelk de respective tijden zijn, op welke de zon is waargenomen in A, B en C.

N°. 148. Door

ABRAHAM FOCK.

Verleng AB, AC en CB (*Fig.* 133) en neem $AG = AD$ en $BH = BD$; maak $\angle AGI = \angle ADE$ en $BHK = \angle BDF$, waardoor de stukken AI, GI, BK en HK bekend zijn; verleng IG en maak

 GL =

GL = HK; trek CM evenwijdig aan GI en CN evenwijdig aan HK, dan kan men den driehoek CMN berekenen; want door de gelijkvormige driehoeken IGA en MCA vindt men MC en ∠ AMC, zijnde het supplement van ∠ CMN, welke dus ook bekend is. Eveneens vindt men door de gelijkvormige driehoeken KHB en NCB, de lijn CN en ∠ CNM, waardoor dan de driehoek MNC bepaald is.

Door de beweging van den hoek CAD om het punt A, veranderen de lijnen AD en CAG van stelling, en komen in AD' en C'AG', zoo dat de hoeken D'AD, G'AG en C'AC gelijk *zijn*: even zoo door de beweging van den hoek *CBD*, komen BD en CBH in de stelling van *BD'* en C'BH', makende de gelijke hoeken D'*BD*, *H'B*H en C'BC. Het nieuwe snijpunt D' der lijnen AD' en *BD'* valt, volgens het Voorstel, *op de lijn* EF; de driehoeken *AD'D* en *AG'G* zijn gelijk en gelijkvormig, als mede de driehoeken BD'D en BH'H; daarom D'D = G'G en D'D = H'H; dus ook G'G = H'H, en L'G = H'K om dat LG = HK is.

Trek nu uit het nieuwe snijpunt *C'*, *der lijnen* AC' en BC', de lijnen C'M' en C'N' evenwijdig aan CM en CN, dan is △ C'N'M' gelijkvormig △ CNM, △ BC'N' gelijkvormig △ BKH' en △ AC'M' gelijkvormig △ AG'I.

Neem nu BN' voor de abscis en C'N' voor de ordinaat van het punt C' der kromme, door de beweging van het punt C ontstaande. Stel BN' $= x$, C'N' $= y$, AB $= m$, AI $= a$, BK $= c$, IL = IG + HK $= b$, CN $= d$, CM $= e$ en MN $= f$; dan heeft men:

$$BN' : C'N' = BK : H'K = \frac{cy}{x} = LG'$$

$$\text{en } LI - LG' = G'I = b - \frac{cy}{x} = \frac{bx - cy}{x}$$

Voorts

Voorts CN : CM = C'N' : C'M' $= \frac{ey}{d}$

en CN : MN = C'N' : M'N' $= \frac{fy}{d}$

daarom AM' = AB — BN' — M'N $= m - x - \frac{fy}{d}$

Eindelijk AM' : C'M' = AI : IG'

of $m - x - \frac{fy}{d} : \frac{ey}{d} = a : \frac{bx - cy}{x}$

of $dm - dx - fy : ey = ax : bx - cy$

waaruit volgt:

$cfy^2 + (dc - ae - bf)xy - bdx^2 - cdmy + bdmx = 0$

waaruit blijkt dat deze kromme lijn tot de kegelſneden behoort, vermits hare vergelijking van den tweeden graad is.

Wanneer men nu op AB (*Fig.* 134) een cirkelſegment beſchrijft, hetwelk eenen hoek bevat, gelijk aan het ſupplement van de ſom der bewegende hoeken CAD en CBD, tot vier regte hoeken, welk ſegment de lijn EF in de punten D en D' ſnijdt; als dan het punt D, door deszelfs beweging, langs EF in een der punten D of D' gekomen is, worden de lijnen AC' en BC' of AC'' en BC'' evenwijdig, en het ſnijpunt C vervalt. In dit geval is de kromme eene hijperbool, terwijl de lijnen AC' en BC, of AC'' en BC'', evenwijdig aan een der asſijmptoten van de kromme zijn. Indien het beſchrevene ſegment de lijn EF ſlechts raakt, worden de lijnen AC en BC ſlechts eens evenwijdig, en alsdan is de kromme eene parabool; doch indien dit ſegment de lijn EF noch raakt, noch ſnijdt, blijft er altijd een ſnijpunt der lijnen AC en BC beſtaan, en in dit geval is de kromme een Ellips.

N°. 149. Door

R. Labatto.

Laat ABCD (*Fig.* 135) de cijlinder en ADE de kegel zijn, dan zal de hoogte EI van den kegel gelijk driemaal de hoogte FI van den cijlinder moeten zijn, om gelijke inhouden te hebben. Men ſtelle dan AB, of den middellijn van het grondvlak der beide ligchamen $= 2\,r$, de hoogten FI $= h$ en EI $= 3\,h$; dan is de omtrek van het grondvlak $= 2\,r\,\pi$, de inhoud van het grondvlak $= r^2\,\pi$, twee zulke grondvlakken $= 2\,r^2\,\pi$, de ronde oppervlakte van den cijlinder $= 2\,r\,h\,\pi$, dus de geheele oppervlakte *van den* cijlinder $= 2\,r\,(r + h)\,\pi$. De zijde *van* den kegel is AE $= \surd\,(AI^2 + EI^2) = \surd\,(r^2 + 9\,h^2)$, dus de ronde oppervlakte van *denzelven* $= r\,\pi\,\surd\,(r^2 + 9\,h^2)$ *en* de geheele oppervlakte $= r^2\,\pi + r\,\pi\,\surd\,(r^2 + 9\,h^2)$, en deze gelijk geſteld aan de geheele oppervlakte des cijlinders, geeft:

$$2\,r\,(r + h)\,\pi = r^2\,\pi + r\,\pi\,\surd\,(r^2 + 9\,h^2)$$
$$\text{of } 2\,r^2 + 2\,r\,h = r^2 + r\,\surd\,(r^2 + 9\,h^2)$$
$$\text{of } 2\,r + 2\,h = r + \surd\,(r^2 + 9\,h^2)$$
$$\text{of } r + 2\,h = \surd\,(r^2 + 9\,h^2)$$
$$\text{of } r^2 + 4\,r\,h + 4\,h^2 = r^2 + 9\,h^2$$
$$\text{of } 4\,r\,h = 5\,h^2 \text{ en } 4\,r = 5\,h$$

waaruit volgt, dat AB $= 2\,r$ nemende, FI $= h = \frac{4}{5}\,r$ en EI $= 3\,h = 2\,\frac{2}{5}\,r$ genomen zal moeten worden, om aan den eiſch van het Voorſtel te voldoen.

N°. 150.

N°. 150. Door

C. Lants Jr., *R. Lobatto*, en *N. Bondt*.

Laten de getallen zijn x, y, z, u en v, en stel derzelver som $= s$, dan is uit het opgegevene

$2x = s - x$, $3y = s - y$, $4z = s - z$, $5u = s - u$

dus $3x = s$, $4y = s$, $5z = s$, $6u = s$

dus $x = \frac{1}{3}s$, $y = \frac{1}{4}s$, $z = \frac{1}{5}s$, $u = \frac{1}{6}s$

dus $x + y + z + u + v = (\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6})s + v = s$

waaruit volgt $v = (1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6})s = \frac{1}{20}s$

Daar nu het product der getallen gelijk een gegeven getal a zijn moet, zoo heeft men

$$xyzuv = \frac{1.1.1.1.1}{3.4.5.6.20}s^5 = a$$

dus $s^5 = 2^5 . 225\,a$ en $s = 2\sqrt[5]{225\,a}$; derhalve zijn de getallen: $x = \frac{1}{3}s = \frac{2}{3}\sqrt[5]{225\,a}$, $y = \frac{1}{4}s = \frac{1}{2}\sqrt[5]{225\,a}$, $z = \frac{1}{5}s = \frac{2}{5}\sqrt[5]{225\,a}$, $u = \frac{1}{6}s = \frac{1}{3}\sqrt[5]{225\,a}$ en $v = \frac{1}{20}s = \frac{1}{10}\sqrt[5]{225\,a}$.

N°. 151. Door

N. Bondt, en *R. Lobatto*.

Stel het eerste px, het tweede qx, en het derde $a - px - qx$; dan moet $pqx^2(a - px - qx)$ of $ax^2 - px^3 - qx^3$ een maximum zijn, derhalve

$$2ax\delta x - 3px^2\delta x - 3qx^2\delta x = 0$$

en alles door $x\delta x$ deelende,

$$2a - 3px - 3qx = 0$$

dus $x = \frac{2}{3}.\frac{a}{p+q}$, $px = \frac{2}{3}.\frac{ap}{p+q}$, $qx = \frac{2}{3}.\frac{aq}{p+q}$

en $a - px - qx = a - \frac{2}{3}\frac{ap+aq}{p+q} = a - \frac{2}{3}a = \frac{1}{3}a$.

N°. 152. Door

J. A. Buin, en M. J. ZUIDHOF.

Volgens den regel van den Heer O. S. BANGMA, te vinden in het eerste Deel der Verhandelingen, van de eerste klasse van het Hollandsch Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten, kan de breedte op de volgende wijze berekend worden:

Eerste waarneming ten 11ᵘ 0′
Tweede waarneming ten 12 . 9

Verloopene tijd . . 1 . 9 = 17°. 15′
2
8° 37′ 30″

½ Verloopene tijd 8° 37′ 30″ *Log . Sin* . 9.17599
Zuider-Declinatie 4° 13′ 0″ *Log . Cos* . 9.99882

Som = 9.17481
is *Log . Sin* . ½ r = 8° 36′ . . *Log . Sec* . 0.00491
2

Getal B = 0.00982

58° 53 Zonshoogten 65° 25′
90 . 0 90 . 9

31 . 7 24 . 35
2 2
15 . 33 . 30 12 . 17 . 30
12 . 17 . 30

Som 27 . 51 *Log . Cos* . 9.94654
Ver. 3 . 16 *Log . Cos* . 9.99929
Decl. 4 . 13 *Log . Sin* . 8.86645
Get. B. 0.00982

Som 28.82210
af 25.

3.82210 *Log*. 6639 Get. D

27° 51′
8 . 36
3 . 16

36 . 27	*Log. Sin.*	9.77387
19 . 15	*Log. Sin.*	9.51811
11 . 52	*Log. Sin.*	9.31310
5 . 20	*Log. Sin.*	8.96825
	Som	37.57333
	2	
		18.78666
Log. Cot. ½ Verl. Tijd		10.81907
	Get. B	0.00982
	Som	29.61555
	af	25.
		4.61555 *Log.* 41262 Get. W

W + D = 47901 *N. Sin.* van 28° 37′ Zuider breedte.

Aanmerking. Als men D van W aftrekt, verkrijgt men W — D = 34623; dit in de *Nat. Sinus* opzoekende, komt, volgens den regel in het hoofd dezer oplossing vermeld, 20° 15′ Noorder breedte, op welke dezelfde hoogten, met een gelijk verloop in tijd, zouden kunnen worden waargenomen.

No. 153. Door

U. Huguenin.

De voorgestelde differentiaal $\frac{\delta x}{(a + bx^3)\sqrt[6]{(a + 2bx^3)}}$ is in de algemeenere uitdrukking $\frac{\delta x}{(a + bx^n)\sqrt[2n]{(a + 2bx^n)}}$ begrepen,

van

van welke de Heer EULER zegt (*Nova Acta Petrop.* *T.* IX), dat zij tot eenen rationalen vorm kan gebragt worden, als men daarin $s = \sqrt[2n]{(a + 2bx^n)}$ en $x = st$ ftelt; daar echter deze laatfte differentiaal in de nog algemeenere

$$\frac{\partial x}{(a+bx^n)\sqrt[mn]{(a^{m-1} + ma^{m-1}bx^n + \ldots\ldots\ldots \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-3}b^2x^{2n} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-4}b^3x^{3n} + \ldots\ldots\ldots\ldots + mb^{m-1}x^{(m-1)n})}}$$

vervat is (waarin de coëfficienten met die der binomifche formule overeenkomen), zoo zullen wij deze laatfte uitdrukking trachten rationaal te maken. Wij ftellen tot dat einde

$$\sqrt[mn]{(a^{m-1} + ma^{m-2}bx^n + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}a^{m-3}b^2x^{2n} + \ldots\ldots + mb^{m-1}x^{(m-1)n})} = s,$$ waardoor

$$s^{mn} = a^{m-1} + ma^{m-2}bx^n + \ldots + mb^{m-1}x^{(m-1)n}$$

en $as^{mn} + b^m x^{mn} = a^m + ma^{m-1}bx^n + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}a^{m-2}b^2x^2n + \ldots + mab^{m-1}x^{(m-1)n} \ldots\ldots + b^m x^{mn} = (a+bx^n)^m$

dus $s^{mn} = \dfrac{(a+bx^n)^m - b^m x^{mn}}{a}$

en $s = \left[\dfrac{(a+bx^n)^m - b^m x^{mn}}{a}\right]^{\frac{1}{mn}}$

Hierdoor verandert onze differentiaal in

$$\frac{\partial x}{(a+bx^n)\left[\dfrac{(a+bx^n)^m - b^m x^{mn}}{a}\right]^{\frac{1}{mn}}}$$

Zij nu $x = st$, zoo is $t = \dfrac{x}{s} = \ldots$

x

$$\ldots \frac{x}{\left[\frac{(a+bx^n)^m - b^m x^{mn}}{a}\right]^{\frac{1}{mn}}} = \ldots$$

$$\ldots \frac{a^{\frac{1}{mn}} x}{[(a+bx^n)^m - b^m x^{mn}]^{\frac{1}{mn}}}$$

waarvan de differentiaal is,

$$\partial t = a^{\frac{1}{mn}}\left[\frac{1}{[(a+bx^n)^m - b^m x^{mn}]^{\frac{1}{mn}}} - \right.$$

$$\left. \ldots \frac{(a+bx^n)^{m-1} bx^n - b^m x^{mn}}{[(a+bx^n)^m - b^m x^{mn}]^{1+\frac{1}{mn}}}\right]\partial x \ldots$$

$$= a^{\frac{1}{mn}} \frac{[(a+bx^n)^m - (a+bx^n)^{m-1} bx^n]\,\partial x}{[(a+bx^n)^m - b^m x^{mn}]^{\frac{mn+1}{mn}}}$$

$$\ldots = \frac{(a+bx^n)^{m-1}\partial x}{\left[\frac{(a+bx^n)^m - b^m x^{mn}}{a}\right]^{\frac{mn+1}{mn}}},$$

Derhalve is

$$\partial x = \frac{\partial t \left[\frac{(a+bx^n)^m - b^m x^{mn}}{a}\right]^{\frac{mn+1}{mn}}}{(a+bx^n)^{m-1}}$$

en als men deze waarde van ∂x in onze differentiaal ſubſtitueert, verandert dezelve in

$$\frac{\partial t\left[\frac{(a+bx^n)^m - b^m x^{mn}}{a}\right]}{(a+bx^n)^m} = \frac{s^{mn}\partial t}{(a+bx^n)^m}$$

maar $s^{mn} = \frac{x^{mn}}{t^{mn}} = \frac{(a+bx^n)^m - b^m x^{mn}}{a}$

dus

dus $(a+bx^n)^m = \frac{ax^{mn}}{t^{mn}} + b^m x^{mn} =$

$$\frac{x^{mn}(a+b^m t^{mn})}{t^{mn}} = s^{mn}(a+b^m t^{mn})$$

en als men deze waarde in onze differentiaal substitueert, heeft men $\frac{\partial t}{a+b^m t^{mn}}$, eene differentiaal-uitdrukking, welke in alle gevallen kan worden geïntegreerd, als m en n in geheele positieve gevallen gegeven zijn.

Daar nu onder het wortelteeken zoo vele leden voorkomen, als m eenheden bevat, zoo verandert deze differentiaal voor $m = 2$, in

$$\frac{\partial x}{(a+bx^n)\sqrt[2n]{(a+2bx^n)}} = \frac{\partial t}{a+b^2 t^{2n}}$$

Stelt men voorts $n = 3$, zoo blijkt, dat onze voorgestelde differentiaal . . . .

$$\ldots \frac{\partial x}{(a+bx^3)\sqrt[6]{(a+2bx^3)}} = \frac{\partial t}{a+b^2 t^6} \ldots$$

$\ldots = \frac{1}{a}\cdot\frac{\partial t}{1+\frac{b^2}{a}t^6}$ zijn zal, en als men $y^6 = \frac{b^2}{a}.t^6$ stelt, wordt $y = t\sqrt[6]{\frac{b^2}{a}}$, $\partial t = \partial y\sqrt[6]{\frac{a}{b^2}}$ en

$$\frac{\partial t}{a+b^2t^6} = \frac{1}{a}\sqrt[6]{\frac{a}{b^2}}\cdot\frac{\partial y}{1+y^6} = \frac{1}{\sqrt[6]{a^5b^2}}\cdot\frac{\partial y}{1+y^6}.$$

In verscheidene Wiskundige Werken wordt bewezen, als π den halven omtrek voor den radius één beteekent, (zie J. DE GELDER, *Wiskundige Lessen*, 2[de] *Cursus*, *pag.* 379), dat

$$1+y^6 = (y^2 - 2y\,Cos.\frac{\pi}{6}+1)\times(y^2-2y\,Cos.\frac{3\pi}{6}+1)$$

$\times(y^2 -$

$\times (y^2 - 2y\, Cos.\frac{5\pi}{6} + 1)$ is. Daar nu $Cos.\frac{\pi}{6} =$ $Cos.30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $Cos.\frac{3\pi}{6} = Cos.90^\circ = 0$ en $Cos.\frac{5\pi}{6} = Cos.150^\circ = -Cos.30 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ is, zoo is $1 + y^6 =$

$$(y^2 - y\sqrt{3} + 1)(y^2 + 1)(y^2 + y\sqrt{3} + 1)$$

en als men de breuk $\frac{1}{y^6 + 1}$ op de bekende wijze in drie andere breuken ontbindt, welke deze factoren tot noemer hebben, vindt men

$$\frac{\frac{y}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3}}{y^2 + y\sqrt{3} + 1}; \quad \frac{-\left(\frac{y}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\right)}{y^2 - y\sqrt{3} + 1} \text{ en } \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{y^2+1}$$

derhalve is $\frac{\partial y}{y^6 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{y\partial y}{y^2 + y\sqrt{3} + 1}$

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{y\partial y}{y^2 - y\sqrt{3} + 1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{y\partial y}{y^2 + y\sqrt{3} + 1}$$

$$\ldots + \frac{1}{3}\frac{\partial y}{y^2 - y\sqrt{3} + 1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\partial y}{y^2 + 1}.$$

Maar $\int \frac{y\partial y}{y^2 + y\sqrt{3} + 1} = \frac{1}{2} Log.(y^2 + y\sqrt{3} + 1)$

$$-\sqrt{3}.Arc.Tang.(2y + \sqrt{3}).$$

$$\int \frac{y\partial y}{y^2 - y\sqrt{3} + 1} = \frac{1}{2} Log.(y^2 - y\sqrt{3} + 1)$$

$$-\sqrt{3}.Arc.Tang.(2y - \sqrt{3})$$

$$\int \frac{\partial y}{y^2 + y\sqrt{3} + 1} = 2\, Arc.Tang.(2y + \sqrt{3})$$

$$\int \frac{\partial y}{y^2 - y\sqrt{3} + 1} = 2\, Arc.Tang.(2y - \sqrt{3})$$

en

en $\int \frac{\partial y}{y^2+1} = Arc.Tang.y$

(Zie VEGA, *Vorlesungen über die Mathematiek*, 2er band, § 727). Gevolgelijk

$$\int \frac{\partial y}{y^6+1} = \frac{1}{4\sqrt{3}} Log.(y^2+y\sqrt{3}+1) \ldots\ldots$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{3}} Log.(y^2-y\sqrt{3}+1) - \tfrac{1}{2} Arc.Tang.(2y+\sqrt{3})$$

$$+\tfrac{1}{2} Arc.Tang.(2y-\sqrt{3}) + \tfrac{2}{3} Arc.Tang.(2y+\sqrt{3})$$

$$+\tfrac{2}{3} Arc.Tang.(2y-\sqrt{3}) + \tfrac{1}{3} Arc.Tang.y \ldots\ldots$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{3}}.Log.\frac{y^2+y\sqrt{3}+1}{y^2-y\sqrt{3}+1} + \tfrac{1}{6} Arc.Tang.(2y+\sqrt{3})$$

$$+\tfrac{5}{6} Arc.Tang.(2y-\sqrt{3}) + \tfrac{1}{3} Arc.Tang.y$$

Daar eindelijk $y = t\sqrt[6]{\frac{b^2}{a}}$, $t = \frac{x}{\sqrt[6]{(a+2bx^3)}}$ en

dus $y = \frac{x\sqrt[6]{\frac{b^2}{a}}}{\sqrt[6]{(a+2bx^3)}} = \frac{x}{\sqrt[6]{\frac{a}{b^2}(a+2bx^3)}}$ is,

zoo heeft men:

$$\int \frac{\partial x}{(a+bx^3)\sqrt[6]{(a+2bx^3)}} = \frac{1}{\sqrt[6]{a^5b^2}} \int \frac{\partial y}{y^6+1} =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{12\sqrt[6]{a^5b^2}} Log. \frac{x^2+x\sqrt{3}\sqrt[6]{\frac{a}{b^2}(a+2bx^3)}+\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}(a+2bx^3)}}{x^2-x\sqrt{3}\sqrt[6]{\frac{a}{b^2}(a+2bx^3)}+\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}(a+2bx^3)}}$$

$$+\frac{1}{6\sqrt[6]{a^5b^2}} Arc.Tang.\left(\frac{2x}{\sqrt[6]{\frac{a}{b^2}(a+2bx^3)}}+\sqrt{3}\right)$$

+

$$+\frac{5}{6\sqrt[6]{a^5 b^2}}\,Arc.Tang.\left(\frac{2x}{\sqrt[6]{\frac{a}{b^2}}\,(a+2bx^3)}-\sqrt{3}\right)$$

$$+\frac{1}{3\sqrt[6]{a^5 b^2}}\,Arc.Tang.\left(\frac{x}{\sqrt[6]{\frac{a}{b^2}}\,(a+2bx^3)}\right).$$

N°. 154. Door

U. Huguenin, en *J. R. Schmidt.*

Het is zigtbaar, dat de voorgestelde differentiaal-vergelijking $\partial y + ay\partial\varphi = b\,Cos.\,\varphi\,\partial\varphi$, waarin a en b standvastige grootheden zijn, niet onmiddellijk kan worden geïntegreerd. Het tweede gedeelte dezer vergelijking kan op zich zelf geïntegreerd worden, hetwelk *echter geen* plaats heeft ten aanzien van het eerste gedeelte derzelve, waarin de beide veranderlijke grootheden, y en φ, of liever, hare differentialen voorkomen; doch het is mogelijk, dat dit gedeelte integrabel wordt, als men hetzelve met eene, daartoe dienende functie multipliceert; doch, daar als dan ook het tweede gedeelte met dezelfde functie gemultipliceerd moet worden, ten einde de gelijkheid tusschen de beide deelen te behouden, zoo mag in deze functie geene andere veranderlijke grootheid dan φ voorkomen: wijl anders het tweede gedeelte der vergelijking geenen integreerbaren vorm zoude behouden. Stelt men nu, dat $(f\varphi)$ eene zoodanige functie van φ zij, zoo is het noodig, dezelve zoodanig te bepalen, dat het eerste en tweede gedeelte der vergelijking:

$$(f\varphi)\,\partial y + ay\,(f\varphi)\,\partial\varphi = b\,(f\varphi)\,Cos.\,\varphi\,\partial\varphi$$

ieder bijzonder kunnen worden geïntegreerd.

Ten einde eene zoodanige functie, voor deze en andere dergelijke vergelijkingen te verkrijgen, zullen wij onze nafporingen op de meer algemeene vergelijking

$$\partial y + yP\partial x = -y^n Q\partial x$$

$$\text{of } \partial y + yP\partial x + y^n Q\partial x = 0$$

in het werk ftellen, in welke vergelijking P en Q functiën van de veranderlijke grootheid x, met of zonder ftandvastige grootheden, beteekenen. (*)

Men deele deze vergelijking door y^n, zoo heeft men

$$\frac{\partial y}{y^n} + \frac{P\partial k}{y^{n-1}} + Q\partial x = 0$$

waarin het laatfte lid $Q\partial x$ alleen de veranderlijke grootheid x onthoudt; voorts ftelle men dat (fx) eene zoodanige functie van x beteekent, met welke de vergelijking gemultipliceerd zijnde, dezelve den integreerbaren vorm:

$$\frac{(fx)\partial y}{y^n} + \frac{(fx)P\partial x}{y^{n-1}} + (fx)Q\partial x = 0$$

verkrijgt; in dier voege, dat de beide eerfte leden te zamen de differentiaal van een product van twee verfchillende functiën uitmaken, en het laatfte lid $(fx)Q\partial x$, hetwelk geen andere veranderlijke grootheid, dan x bevat, op zich zelf geïntegreerd kan worden.

Om nu de beide eerfte leden $\frac{(fx)\partial y}{y^n} + \frac{(fx)P\partial x}{y^{n-1}}$ te integreren, vergelijke men dezelve met de differentiaal van het product XY, namelijk met $\partial(XY) = X\partial Y + Y\partial X$, waarin X en Y functiën van de veranderlijke grootheden x en y zijn, zoo

(*) Het is alleen voor minder geoefenden, dat ik de ontwikkeling van deze, anderzins niet onbekende kunstgreep der integraalrekening, hier bijgevoegd heb.

zoo is het terstond zigtbaar, dat, doordien $X\int(\partial Y) = Y\int(\partial X) = XY$ is, $(fx)\int\frac{\partial y}{y^n} = y^{-(n-1)}\int(fx)P\partial x$ moet zijn; maar alzoo $\int\frac{dy}{y^n} = \frac{y^{-(n-1)}}{-(n-1)}$ is, moet $\frac{(fx)y^{-(n-1)}}{-(n-1)} = y^{-(n-1)}\int(fx)P\partial x$, of $\frac{(fx)}{-(n-1)} = \int(fx)P\partial x$ zijn; en als men deze vergelijking differentieert, heeft men $\frac{\partial(fx)}{-(n-1)} = (fx)P\partial x$, of $\frac{\partial(fx)}{(fx)} = -(n-1)P\partial x$, waarvan de integraal is: $Log.(fx) = -(n-1)\int P\partial x$; neemt men verder aan, dat e het grondgetal der Hijperbolische logarithmen is, zoo is $1 = Log.e$ en $Log.(fx) = -(n-1)\int P\partial x . Log.e = Log.e^{-(n-1)\int P\partial x}$; derhalve moet $(fx) = e^{-(n-1)\int P\partial x}$ zijn, in welke uitdrukking de integraal van $P\partial x$ voor de meeste gevallen kan worden gevonden, wijl P eene functie van x is.

Substitueert men nu deze waarde van (fx) in onze algemeene vergelijking, zoo heeft men:

$$\frac{e^{-(n-1)\int P\partial x}.\partial y}{y^n} + \frac{e^{-(n-1)\int P\partial x}.P\partial x}{y^{n-1}} + e^{-(n-1)\int P\partial x}.Q\partial x = 0;$$

waarvan de integraal is:

$$\frac{e^{-(n-1)\int P\partial x}.y^{-(n-1)}}{-(n-1)} + \int e^{-(n-1)\int P\partial x}.Q\partial x = 0$$

of

$$\frac{1}{e^{(n-1)\int P\partial x}.y^{(n-1)}} - (n-1)\int e^{-(n-1)\int P\partial x}.Q\partial x = 0$$

hetwelk overeenkomt met de formule, die de Heer VEGA, in het 2[de] Deel zijner *Vorlesungen über die Mathematiek*, pag. 612, zonder bewijs gegeven heeft.

Om nu eene toepassing van deze formule op onze vergelijking $\delta y + ay\delta\varphi - b\,Cos.\varphi\delta\varphi = 0$ te maken, heeft men $n = 0$, $Q\delta x = -b\,Cos.\varphi\delta\varphi$, $P\delta x = a\delta\varphi$ en $\int P\delta x = a\varphi$; derhalve is de integraal van de voorgestelde vergelijking:

$$\frac{1}{e^{-a\varphi}.y^{-1}} + \int e^{a\varphi} \times -b\,Cos.\varphi\delta\varphi = 0$$

of $\quad e^{a\varphi}.y - b\int e^{a\varphi}.Cos.\varphi\delta\varphi = 0$

of wel $e^{a\varphi}.y = b\int e^{a\varphi}.Cos.\varphi\delta\varphi$

waarvan nog het tweede gedeelte moet worden geïntegreerd.

Laat ons tot dit einde $e^{a\varphi}.Sin.\varphi$ differentieren, zoo bekomt men:

$$\delta e^{a\varphi}.Sin.\varphi = e^{a\varphi}.Cos.\varphi\delta\varphi + ae^{a\varphi}Sin.\varphi\delta\varphi$$

en als men $e^{a\varphi}.Cos.\varphi$ differentieert, vindt men

$$\delta e^{a\varphi}Cos.\varphi = ae^{a\varphi}.Cos.\varphi\delta\varphi - e^{a\varphi}.Sin.\varphi\delta\varphi$$

men multiplicere voorts deze differentiaal met a en addere dit product bij de eerste differentiaal, zoo ontstaat hieruit de som:

$$\delta e^{a\varphi}.Sin.\varphi + a\delta e^{a\varphi}.Cos.\varphi = (1+a^2)e^{a\varphi}.Cos.\varphi\delta\varphi$$

waarvan de integraal is:

$$e^{a\varphi}Sin.\varphi + ae^{a\varphi}.Cos.\varphi = (1+a^2)\int e^{a\varphi}Cos.\varphi\delta\varphi$$

dus $\int e^{a\varphi}.Cos.\varphi\delta\varphi = \dfrac{e^{a\varphi}(Sin.\varphi + a\,Cos.\varphi)}{1+a^2}$

en

en als men deze waarde in de gevondene integraal substitueert, heeft men

$$e^{a\varphi}.y = \frac{b(Sin.\varphi + a\,Cos.\varphi)e^{a\varphi}}{1+a^2} + C$$

waarin de standvastige grootheid C, uit de eigenschappen van het Voorstel, waaruit de differentiaal-vergelijking is afgeleid, moet worden bepaald.

N°. 155. Door

U. HUGUENIN, en *J. R. Schmidt.*

De voorgestelde vergelijking $\partial y - x^2\partial y + y.\partial x - by^2\partial x + by^2x^2\partial x = 0$ laat zich door de in het laatst voorgaande Voorstel ontwikkelde formule integreren; want zoo men dezelve door $1 - x^2$ deelt, bekomt men de vergelijking

$$\partial y + y.\frac{\partial x}{1 - x^2} - y^2 b\partial x = 0$$

of $$\frac{\partial y}{y^2} + \frac{1}{y}.\frac{\partial x}{1 - x^2} - b\partial x = 0$$

Vergelijkt men nu deze vergelijking met onze algemeene formule van het laatst voorgaande Voorstel, zoo is hier $n = 2$, $Q\partial x = -b\partial x$ en $P\partial x = \frac{\partial x}{1 - x^2}$; derhalve

$$\int P\partial x = \int\frac{\partial x}{1 - x^2} = \tfrac{1}{2}\int\left(\frac{\partial x}{1 - x} + \frac{\partial x}{1 + x}\right)$$

$$\ldots\ldots = \tfrac{1}{2}Log.\frac{1 + x}{1 - x} = Log.\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$$

en $$e^{(n-1)\int P\partial x} = e^{Log.\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}:$$

want zoo men $e^{Log.\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = z$ ſtelt, is

$Log.e^{Log.\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = Log.\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.Log.e =$

$Log.\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = Log.z$; derhalve $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = z$.
Subſtitueert men deze waarde in de voornoemde formule, zoo bekomt men de integraal

$$\frac{1}{y\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} + b\int\frac{\delta x}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\frac{\sqrt{(1-x)}}{y\sqrt{(1+x)}} + b\int\frac{\delta x\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)}}.$$

Maar $\frac{\delta x\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)}} = \frac{(1-x)\delta x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{\delta x}{\sqrt{(1-x^2)}} - \frac{x\delta x}{\sqrt{(1-x^2)}}$; $\int\frac{\delta x}{\sqrt{(1-x^2)}} = Arc.Tang.\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$

en $\int\frac{-x\delta x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \sqrt{(1-x^2)}$, derhalve is de gezochte integraal $\frac{\sqrt{(1-x)}}{y\sqrt{(1+x)}} + b\sqrt{(1-x^2)}$.

$+ b\,Arc.Tang.\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}} = C$; of $\frac{1-x}{y\sqrt{(1-x^2)}}$

$+ b\sqrt{(1-x^2)} + b\,Arc.Tang.\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}} = C$,
in welke de ſtandvastige grootheid C uit de omſtandigheden van het Voorſtel moet worden opgemaakt.

N°. 156.

N°. 156. Door

U. Huguenin, en J. R. Schmidt.

De differentiaal-vergelijking $\frac{\partial y}{y^2} - \frac{Sin.\,\varphi^2\,\partial y}{y^2} + \frac{a\,\partial\varphi}{y} - ab\,\partial\varphi + ab\,Sin.\,\varphi^2\,\partial\varphi = 2b\,Sin.\,\varphi\,Cos.\,\varphi\,\partial\varphi - 2b\,Cos.\,\varphi\,Sin.\,\varphi^3\,\partial\varphi$, laat zich tot den vorm $(1 - Sin.\,\varphi^2)\frac{\partial y}{y^2} + \frac{a\,\partial\varphi}{y} - ab(1 - Sin.\,\varphi^2)\,\partial\varphi = 2\,b\,Sin.\,\varphi\,Cos.\,\varphi\,(1 - Sin.\,\varphi^2)\,\partial\varphi$, of $\frac{\partial y}{y^2} + \frac{a\,\partial\varphi}{y\,Cos.\,\varphi^2} - ab\,\partial\varphi = 2\,b\,Sin.\,\varphi\,Cos.\,\varphi\,\partial\varphi$ brengen, waardoor men heeft $\frac{\partial y}{y^2} + \frac{a\,\partial\varphi}{y\,Cos.\,\varphi^2} - b\,(a + 2\,Sin.\,\varphi\,Cos.\,\varphi)\,\partial\varphi = 0$, eene vergelijking, die met de algemeene formule van Voorstel 154 de noodige overeenstemming heeft, om volgens dezelve geïntegreerd te worden.

Tot dit einde is hier $n = 2$, $\int P\,\partial x = a\int\frac{\partial\varphi}{Cos.\,\varphi^2} = a\,Tang.\,\varphi$, en $(fx) = e^{-a\,Tang.\,\varphi}$; diensvolgens wordt de integraal $\frac{1}{e^{a\,Tang.\,\varphi}.\,y} + b\int e^{-a\,Tang.\,\varphi}.\,(a + 2\,Sin.\,\varphi\,Cos.\,\varphi)\,\partial\varphi = C.$

Om te onderzoeken, of het tweede lid zich volkomen integreeren laat, zoo differentiere men de grootheid $e^{-a\,Tang.\,\varphi}.\,z$; hierdoor verkrijgt

men $\partial(e^{-aTang.\phi}.z) = e^{-aTang.\phi}.(\frac{-az\partial\phi}{Cos\phi^2}+\partial z)$;
derhalve moet z zoodanig worden aangenomen, dat $\frac{-az\partial\phi}{Cos.\phi^2} + \partial z = a\partial\phi + 2\,Sin.\phi\,Cos.\phi\partial\phi$ zij, en dit heeft plaats, als men $z = -Cos.\phi^2$ ftelt, wijl hierdoor $\frac{-az\partial\phi}{Cos.\phi^2} = a\partial\phi$, en $\partial z = 2\,Sin.\phi\,Cos.\phi\partial\phi$ is. Hieruit volgt

$$\int e^{-a\,Tang.\phi}(a + 2\,Sin.\phi\,Cos.\phi)\,\partial\phi = \ldots\ldots - e^{-a\,Tang.\phi}.Cos.\phi^2$$

en de integraal is:

$$\frac{1}{e^{a\,Tang.\phi}.y} - be^{-aTang.\phi}.Cos.\phi^2 = C$$

of $1 - by\,Cos.\phi^2 = C\,ye^{a\,Tang.\phi}$
waaruit zich de waarde

$$y = \frac{1}{b\,Cos.\phi^2 + Ce^{a\,Tang.\phi}}$$

laat afleiden.

N°: 157. Door

U. Huguenin, en *J. R. Schmidt.*

Om de differentiaal-vergelijking van de tweede orde, $Cos.m\phi(Sin.m\phi)^n\partial\partial\phi + mn(Cos.m\phi)^2 \times (Sin.m\phi)^{n-1}\partial\phi^2 - m(Sin.m\phi)^{n+1}\partial\phi^2 + \ldots a\,Cos.m\phi(Sin.m\phi)^n\partial\phi\partial x + b\,(Cos.m\phi)^2 \times \ldots$ (Sin

$(Sin.m\phi)^{2n}\delta\phi^2 = 0$ te integreren, als δx standvastig is, stelle men:

$$Cos.m\phi\,(Sin.m\phi)^n\delta\phi = z\delta x, \text{ zoo is}$$

$$b\,(Cos.m\phi)^2\,(Sin.m\phi)^{2n}\delta\phi^2 = bz^2\delta x^2, \text{ en}$$

$$\delta Cos.m\phi(Sin.m\phi)^n\delta\phi = Cos.m\phi(Sin.m\phi)^n\delta\delta\phi$$

$$+mn(Cos.m\phi)^2(Sin.m\phi)^{n-1}\delta\phi^2 - mSin.(m\phi)^{n+1}\delta\phi^2$$

$= \delta z.\delta x$, wijl δx als standvastig aangenomen is.

Substitueert men deze waarden in de vergelijking, zoo heeft men:

$$\delta z.\delta x + az\delta x^2 + bz^2\delta x^2 = 0$$

$$\text{of}\quad \delta z + az\delta x + bz^2\delta x = 0$$

Deze vergelijking kan door de algemeene formule van Voorstel 154 geïntegreerd worden; doch men kan de integraal ook zonder dezelve vinden; want door de vergelijking heeft men

$$-\delta x = \frac{\delta z}{az+bz^2} = \frac{1}{a}\left(\frac{\delta z}{z} - \frac{b\delta z}{a+bz}\right) \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots = \frac{1}{a}\left(\frac{\delta z}{z} - \frac{\frac{b}{a}\delta z}{1+\frac{b}{a}z}\right); \text{ en als men}$$

deze vergelijking integreert, vindt men:

$$-x = \frac{1}{a}[Log.z - Log.(1+\frac{b}{a}z) + Log.C]$$

$$\ldots = \frac{1}{a}\,[Log.z - Log.\frac{a+bz}{a} + Log.C]$$

dus is $-ax = Log.\frac{azC}{a+bz}$ en $e^{-ax} = \frac{azC}{a+bz}$.

Hh 5 Voorts

Voorts vindt men hieruit $z = \frac{ae^{-ax}}{aC - be^{-ax}}$,

en uit $Cos.m\phi\,(Sin.m\phi)^n\,\partial\phi = z\,\partial x$ is $z =$
$\frac{Cos.m\phi\,(Sin.m\phi)^n\,\partial\phi}{\partial x}$; derhalve

$$Cos.m\phi(Sin.m\phi)^n\partial\phi = \frac{ae^{-ax}.\partial x}{aC - be^{-ax}}.$$

Om de integraal van deze vergelijking te vinden, merke men op, dat

$\partial(Sin.m\phi)^{n+1} = (n+1)m\,Cos.m\phi(Sin.m\phi)^n\partial\phi$
en alzoo

$\int Cos.m\phi\,(Sin.m\phi)^n\partial\phi = \frac{(Sin.m\phi)^{n+1}}{m(n+1)}$ is.
Voorts heeft men nog

$$\frac{ae^{-ax}\partial x}{aC - be^{-ax}} = \frac{\frac{1}{aC}.e^{-ax}.a\partial x}{1 + \frac{b}{aC}(-e^{-ax})} \ldots\ldots\ldots$$

$\ldots = \frac{1}{b}.\frac{\frac{b}{aC}.e^{-ax}.a\partial x}{1 + \frac{b}{aC}(-e^{-ax})}$ te integreren;

maar doordien $\partial(-e^{-ax}) = e^{-ax}\,\partial a x$ en alzoo $\frac{b}{aC}\partial(-e^{-ax}) = \frac{b}{aC}.e^{-ax}.a\partial x$ is, heeft men

$\int$

$$\int \frac{a e^{-ax} . \partial x}{aC - b e^{-ax}} = \frac{1}{b} Log. \left[1 + \frac{b}{aC}(-e^{-ax})\right]$$

$$= \frac{1}{b} Log. \left(\frac{aC - be^{-ax}}{aC}\right) = \frac{1}{b} Log. \left(\frac{Cae^{ax} - b}{Cae^{ax}}\right)$$

derhalve is de geheele integraal:

$$\frac{(Sin.m\phi)^{n+1}}{m(n+1)} = \frac{1}{b}\left(Log.\frac{Cae^{ax} - b}{Cae^{bx}} + Log.C'\right).$$

$$= \frac{1}{b} Log.C'\left(1 - \frac{b}{Cae^{ax}}\right);$$ waaruit men vindt

$$Sin.m\phi = \sqrt[n+1]{\frac{m(n+1)}{b} . Log.C'\left(1 - \frac{b}{Cae^{ax}}\right)}$$

Om daarentegen de waarde van x te bekomen, heeft men

$$\frac{b(Sin.m\phi)^{n+1}}{m(n+1)} = Log. \frac{C'(Cae^{ax} - b)}{Cae^{ax}}$$

dus ook $e^{\frac{b(Sin.m\phi)^{n+1}}{m(n+1)}} = \frac{C'(Cae^{ax} - b)}{Cae^{ax}}$

of $Cae^{ax} . e^{\frac{b(Sin.m\phi)^{n+1}}{m(n+1)}} = C'(Cae^{ax} - b)$

waaruit volgt:

$$\left(C' - e^{\frac{b(Sin.m\phi)^{n+1}}{m(n+1)}}\right) Ca.e^{ax} = bC'$$

dus

$$\text{dus } e^{ax} = \frac{bC'}{\left(C' - e^{\frac{b\,(Sin.\,m\,\phi)^{n+1}}{m(n+1)}}\right)Ca}$$

$$\text{dus } ax = Log.\frac{bC'}{\left(C' - e^{\frac{b\,(Sin.\,m\,\phi)^{n+1}}{m(n+1)}}\right)Ca};$$

$$\text{of } x = \frac{1}{a}\,Log.\frac{bC'}{Ca\left(C' - e^{\frac{b\,(Sin.\,m\,\phi)^{n+1}}{m(n+1)}}\right)}.$$

De ſtandvastige grootheden C en C′ moeten uit de eigenſchappen van het Voorſtel, waaruit de eerſte vergelijking geſproten is, bepaald worden.

N°. 158. Door

U. Huguenin, en J. R. Schmidt.

Het eerſte gedeelte der differentiaal-vergelijking:

$$\frac{\delta x}{1 + x^3} = y\delta x + 2x\delta y + \frac{x^2\delta\delta y}{2\delta x}$$

waarin δx ſtandvastig is, kan onafhankelijk van het tweede gedeelte derzelve geïntegreerd worden; het tweede gedeelte, hetwelk uit twee veranderlijke grootheden en hare differentialen is zamengeſteld, dient alzoo ook op zich zelve integreerbaar te zijn, of eenen daartoe benoodigden vorm te bekomen, als men hetzelve met eene functie of magt van x multipliceert, bij aldien de volmaakte integratie mogelijk is: wij zullen het laatſte beproeven, en de geheele vergelijking met x^m mul-

multipliceeren, op dat het eerste gedeelte derzelve, eenen integreerbaren vorm behoudt; hierdoor verkrijgt men

$$\frac{x^m \delta x}{1+x^3} = y x^m \delta x + 2 x^{m+1} . \delta y + \frac{x^{m+2} . \delta\delta y}{2 \delta x}.$$

waarin de exponent m nader bepaald moet worden.

Bij eenige opmerking, en vergelijking met de differentiaal-uitdrukking van de tweede orde, ziet men ligt, dat de integraal van het tweede gedeelte dezer vergelijking, uit twee leden moet bestaan, welke de integraal van het eerste en derde lid van dit gedeelte onthouden; wij zullen derhalve aannemen, dat de integraal dezer vergelijking zij:

$$\int \frac{x^m \delta x}{1+x^3} = A x^{m+1} . y + B x^{m+2} . \frac{\delta y}{\delta x}.$$

de differentiaal hiervan is, als men δx als standvastig beschouwt:

$$\frac{x^m \delta x}{1+x^3} = A x^{m+1} \delta y + (m+1) A y x^m \delta x \ldots$$

$$\ldots + (m+2) B x^{m+1} \delta y + B x^{m+2} . \frac{\delta\delta y}{\delta x}.$$

Op dat deze vergelijking met de eerste overeen zal komen, moet $(m+1) A = 1$, $A + (m+2) B = 2$ en $B = \frac{1}{2}$ zijn; waaruit volgt $A = \frac{1}{m+1}$ en

$\frac{1}{m+1} + \frac{m+2}{2} = 2$; door deze laatste vergelijking heeft men $m^2 - m = 0$, en daar deze vergelijking de wortels $m = 0$ en $m = 1$ onthoudt, zoo kan men hieruit besluiten, dat onze differentiaal-vergelijking op tweeërleije wijze integreer-

greerbaar wordt; namelijk door $m = 0$ en $m = 1$ te stellen.

Wij zullen de eerste waarde van m, als de gemakkelijkste, aannemen, waardoor $A = 1$ en $B = \frac{1}{2}$ is, zoo dat de integraal van onze voorgestelde vergelijking zijn zal

$$\int \frac{\delta x}{1 + x^3} = xy + \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \frac{\delta y}{\delta x} + C.$$

Daar voorts $\frac{\delta x}{1 + x^3} = \frac{1}{3}\left[\frac{\delta x}{1+x} + \frac{(2 - x)\,\delta x}{x^2 - x + 1}\right]$

$$= \tfrac{1}{3}\left[\frac{\delta x}{1+x} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2x\delta x - \delta x}{x^2 - x + 1} + \tfrac{3}{2} \cdot \frac{\delta x}{x^2 - x + 1}\right] \text{ is,}$$

heeft men $\int \frac{\delta x}{1+x^3} = \frac{1}{3} Log.(1+x) - \frac{1}{6} Log.(x^2 - x + 1)$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} Arc.Tang.\frac{2x-1}{\sqrt{3}} = xy + \frac{x^2 \delta y}{2 \delta x} + C.$$

derhalve is $\frac{1}{3}\delta x\, Log.(1+x) - \frac{1}{6}\delta x\, Log.(x^2 - x + 1)$

$$+ \frac{\delta x}{\sqrt{3}} . Arc . Tang . \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} = xy\,\delta x + \tfrac{1}{2} x^2 \delta y + C\delta x.$$

Nu is de integraal van het tweede gedeelte dezer vergelijking $= \int (xy\,\delta x + \frac{1}{2} x^2 \delta y) + \int C \delta x = \frac{1}{2} x^2 y + Cx$; derhalve blijft ons nog alleen over, het eerste gedeelte derzelve te integreren.

Laat ons tot dit einde vooreerst $x\, Log.(1+x)$ differentieren, zoo bekomt men:

$$\delta (x\, Log.(1 + x)) = \delta x\, Log.(1 + x) + \frac{x\,\delta x}{1 + x}$$

$$\ldots = \delta x\, Log.(1 + x) + \delta x - \frac{\delta x}{1 + x}$$

waarvan de integraal is:

$x\, Log.(1 + x) = \int \delta x\, Log.(1+x) + x - Log.(1+x)$

of $\int \delta x\, Log.(1 + x) = (1 + x) Log.(1 + x) - x$

Men

Men differentiere voorts $x\,Log.(x^2-x+1)$, zoo vindt men

$$\partial[x\,Log.(x^2-x+1)] = \partial x\,Log.(x^2-x+1)$$

$$\ldots + \frac{2x^2\partial x - x\partial x}{x^2-x+1} = \partial x\,Log.(x^2-x+1)\ldots$$

$$\ldots + 2\partial x + \tfrac{1}{2}.\frac{2x\partial x - \partial x}{x^2-x+1} - \tfrac{3}{2}.\frac{\partial x}{x^2-x+1}.$$

waarvan de integraal is

$$x\,Log.(x^2-x+1) = \int\partial x\,Log.(x^2-x+1) + 2x$$

$$+\tfrac{1}{2}Log.(x^2-x+1) - \sqrt{3}.Arc.Tang.\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

en alzoo heeft men:

$$\int\partial x\,Log.(x^2-x+1) = \frac{2x-1}{2}Log.(x^2-x+1)$$

$$\ldots - 2x + \sqrt{3}.Arc.Tang.\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Eindelijk differentiere men $\frac{2x}{\sqrt{3}}Arc.Tang.\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$, alsdan bekomt men:

$$\partial\left[\frac{2x}{\sqrt{3}}.Arc.Tang.\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right] = \frac{2\partial x}{\sqrt{3}}.Arc.Tang.\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

$$\ldots + \frac{x\partial x}{x^2-x+1} = \frac{2\partial x}{\sqrt{3}}.Arc.Tang.\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \ldots$$

$$\ldots\ldots \tfrac{1}{2}.\frac{2x\partial x - \partial x}{x^2-x+1} + \tfrac{1}{2}.\frac{\partial x}{x^2-x+1}.$$

hetwelk geïntegreerd wordende, geeft:

$$\frac{2x}{\sqrt{3}}Arc.Tang.\frac{2x-1}{\sqrt{3}} = 2\int\frac{\partial x}{\sqrt{3}}Arc.Tang.\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

$$\ldots + \tfrac{1}{2}Log.(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}Arc.Tang.\frac{2x-1}{\sqrt{3}},$$

of

of $\int \frac{\partial x}{\sqrt{3}}.Arc.Tang.\frac{2x-1}{\sqrt{3}} = \frac{2x-1}{2\sqrt{3}} Arc.Tang.\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

$\ldots\ldots\ldots - \frac{1}{4} Log.(x^2 - x + 1).$

Substitueert men nu deze bijzondere integralen in onze gevondene integraal-vergelijking, zoo heeft men:

$\frac{1}{3}[(1+x)Log.(1+x)-x]-\frac{1}{6}\Big[\frac{(2x-1)}{2}Log(x^2-x+1)$

$-2x+\sqrt{3}Arc.Tang.\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big]+\frac{2x-1}{2\sqrt{3}}Arc.Tang.\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

$\ldots - \frac{1}{4} Log.(x^2 - x + 1) = \frac{1}{2} x^2 y + Cx;$

en als men deze waarden te zamen trekt, vindt men:

$\frac{1}{3}(1+x)Log.(1+x)-\frac{1}{6}(1+x)Log.(x^2-x+1)$

$\ldots + \frac{x-1}{\sqrt{3}}Arc.Tang.\frac{2x-1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}x^2y+Cx;$ of

$\frac{1}{6}(1+x)Log.\frac{(1+x)^2}{x^2-x+1}+\frac{(x-1)}{\sqrt{3}} Arc.Tang.\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

$\ldots = \frac{1}{2} x^2 y + Cx;$ of wel:

$\frac{1}{3}(1+x)Log.\frac{(1+x)}{\sqrt[3]{(1+x^3)}}+\frac{x-1}{\sqrt{3}}Arc.Tang.\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

$\ldots = \frac{1}{2} x^2 y + Cx + C'$, als C' de standvastige grootheid voor de tweede integratie beteekent.

N°. 159. Door

U. Huguenin, en *J. R. Schmidt.*

De differentiaal-vergelijking van de derde orde

$$\frac{\partial x}{1+x^2} = y\partial x + 3x\partial y + \frac{3x^2\partial\partial y}{2\partial x} + \frac{x^3\partial^3 y}{6\partial x^2},$$

in

in welke ∂x als standvastig aangenomen wordt, laat zich op dezelfde wijze als die van het voorgaande Voorstel integreren. Wij zullen tot dit einde dezelve met x^n vermenigvuldigen, waardoor men de vergelijking

$$\frac{x^n \partial x}{1+x^2} = yx^n \partial x + 3x^{n+1}.\partial y + \frac{3x^{n+2}.\partial\partial y}{2\partial x} + \frac{x^{n+3}\partial^3 y}{6\partial x^2}$$

bekomt; voorts laat zich uit den aard dezer vergelijking ligtelijk besluiten, dat de eerste integraal derzelve, den vorm

$$\int\frac{x^n \partial x}{1+x^2} = Ayx^{n+1} + Bx^{n+2}.\frac{\partial y}{\partial x} + Dx^{n+3}.\frac{\partial\partial y}{\partial x^2}$$

hebben moet; want, zoo men deze uitdrukking differentieert, bekomt men de vergelijking

$$\frac{x^n \partial x}{1+x^2} = (n+1)Ayx^n\partial x + Ax^{n+1}.\partial y + (n+2)Bx^{n+1}\partial y + Bx^{n+2}.\frac{\partial\partial y}{\partial x} + (n+3)Dx^{n+2}.\frac{\partial\partial y}{\partial x} + Dx^{n+3}.\frac{\partial^3 y}{\partial x^2}.$$

welke dezelfde veranderlijke grootheden en differentialen onthoudt, als de voorgestelde, vermenigvuldigd met x^n. Daar nu deze beide vergelijkingen met elkander overeen moeten komen, heeft men $(n+1)A = 1$; $A + (n+2)B = 3$; $B + (n+3)D = \frac{3}{2}$; $D = \frac{1}{6}$; waaruit volgt, dat $A = \frac{1}{n+1}$, $B = \frac{3n+2}{(n+1)(n+2)}$ en $\frac{3n+2}{(n+1)(n+2)} + \frac{n+3}{6} = \frac{3}{2}$ wezen moet. Hierdoor [illegible] de ver-

gelijking $n^3 - 3n^2 + 2n = 0$, waarvan de wortels zijn $n = 0$, $n = 1$ en $n = 2$, hetwelk te kennen geeft, dat onze vergelijking zich op drie verschillende wijzen integreren laat; wij zullen echter $n = 0$ stellen, waardoor $A = 1$, $B = 1$ en $D = \frac{1}{6}$ wordt, en hieruit blijkt, dat onze gegevene vergelijking geene verandering behoeft te ondergaan, maar terstond geïntegreerd kan worden. Men bekomt dus voor de eerste integraal:

$$\int \frac{\delta x}{1+x^2} = yx + x^2 . \frac{\delta y}{\delta x} + \frac{x^3 \delta\delta y}{6 \delta x^2}, \text{ of}$$

$$Arc.Tang.x = xy + x^2 \frac{\delta y}{\delta x} + \frac{x^3 \delta\delta y}{6 \delta x^2},$$ en als men dezelve met δx multipliceert, ontstaat de nieuwe differentiaal-vergelijking:

$$\delta x \, Arc.Tang.x = xy\delta x + x^2 \delta y + \frac{x^3 \delta\delta y}{6 \delta x}.$$

welke wij, om dezelve integreerbaar te maken, met x^m zullen vermenigvuldigen, waardoor men bekomt:

$$x^m \delta x \, Arc.Tang.x = yx^{m+1}.\delta x + x^{m+2}.\delta y + \frac{x^{m+3} \delta\delta y}{\delta x}.$$

Men stelle nu de integraal dezer vergelijking,

$$\int x^m \delta x \, Arc.Tang.x = Eyx^{m+2} + Fx^{m+3}.\frac{\delta y}{\delta x}.$$

alsdan moet de differentiaal:

$$x^m \delta x \, Arc.Tang.x = (m+2)Eyx^{m+1}.\delta x + Ex^{m+2}.\delta y + (m+3)Fx^{m+2}.\delta y + Fx^{m+3}.\frac{\delta\delta y}{\delta x}$$

met onze vergelijking overeenkomen, en hieruit ont-

ontstaan de vergelijkingen: $(m+2)E = 1$; $E + (m+3)F = 1$ en $F = \frac{1}{6}$; derhalve $E = \frac{1}{m+2}$ en $\frac{1}{m+2} + \frac{m+3}{6} = 1$, of $m^2 - m = 0$; waaruit volgt, dat $m = 0$ en $m = 1$ kan zijn; wij zullen echter wederom de eenvoudigste waarde, namelijk $m = 0$, aannemen; en hierdoor hebben wij $E = \frac{1}{2}$; $F = \frac{1}{6}$ en

$$\int \partial x \; Arc.Tang.x = \tfrac{1}{2} y x^2 + \frac{x^3 \partial y}{6 \partial x} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots = \tfrac{1}{6}\left(3 y x^2 + \frac{x^3 \partial y}{\partial x}\right).$$

Om $\int \partial x \; Arc.Tang.x$ te vinden, differentiere men $x \; Arc.Tang.x$; daardoor heeft men

$$\partial(x \; Arc.Tang.x) = \partial x \; Arc.Tang.x + \frac{x \partial x}{1+x^2}, \text{ of}$$

$$\partial x \; Arc.Tang.x = \partial(x \; Arc.Tang.x) - \tfrac{1}{2}.\frac{2 x \partial x}{1+x^2}$$

en door deze vergelijking te integreren

$\int \partial x \; Arc.Tang.x = x \; Arc.Tang.x - \frac{1}{2} Log.(1+x^2)$ dus $x \; Arc.Tang.x - \frac{1}{2} Log.(1+x^2) = \frac{1}{6}\left(3 y x^2 + \frac{x^3 \partial y}{\partial x}\right)$; waaruit de nieuwe differentiaal-vergelijking:

$x \partial x \; Arc.Tang.x - \frac{1}{2} \partial x \; Log.(1+x^2) = \frac{1}{6}(3 y x^2 \partial x + x^3 \partial y)$ ontstaat, van welker tweede gedeelte, de integraal $= \frac{1}{6} x^3 y$ is.

Om de integraal van het eerste gedeelte te vinden, differentiere men vooreerst $\frac{1}{2} x^2 \; Arc.Tang.x$, daardoor heeft men:

$$\partial(\tfrac{1}{2} x^2 \; Arc.Tang.x) = x \partial x \; Arc.Tang.x + \tfrac{1}{2}\frac{x^2 \partial x}{1+x^2}.$$

$$\ldots = x \partial x \; Arc.Tang.x + \tfrac{1}{2}\partial x - \tfrac{1}{2}.\frac{\partial x}{1+x^2}.$$

 waar-

waarvan de integraal is

$$\tfrac{1}{2}x^2 \, Arc.Tang.x = \int x \partial x . Arc.Tang.x + \tfrac{1}{2}x$$
$$\ldots - \tfrac{1}{2} \, Arc.Tang.x, \text{ of}$$
$$\int x \partial x \, Arc.Tang.x = \tfrac{1}{2}(1+x^2) \, Arc.Tang.x - \tfrac{1}{2}x;$$

Voorts differentiëre men $x \, Log.(1+x^2)$; daardoor heeft men:

$$\partial(x \, Log.(1+x^2)) = \partial x \, Log.(1+x^2) + \frac{2x^2 \partial x}{1+x^2}$$
$$\ldots = \partial x \, Log.(1+x^2) + 2\partial x - 2.\frac{\partial x}{1+x^2};$$

waarvan de integraal is

$$x \, Log(1+x^2) = \int \partial x \, Log(1+x^2) + 2x - 2 \, Arc.Tang.x$$
$$\text{of } \tfrac{1}{2}\int \partial x \, Log.(1+x^2) = \tfrac{1}{2}x \, Log.(1+x^2) - x + Arc.Tang.x$$

derhalve is de integraal van onze vergelijking

$$\int x \partial x \, Arc.Tang.x - \tfrac{1}{2}\int \partial x \, Log.(1+x^2) =$$
$$\tfrac{1}{2}(1+x^2) \, Arc.Tang.x - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}x \, Log.(1+x^2)$$
$$+ x - Arc.Tang.x = \tfrac{1}{2}(x^2-1) \, Arc.Tang.x$$
$$+ \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}x \, Log.(1+x^2) = \tfrac{1}{6}x^3 y; \text{ of}$$
$$(x^2-1) \, Arc.Tang.x + x - x \, Log.(1+x^2) = \tfrac{1}{3}x^3 y$$

Zoo men bij de eerste integraal de standvastige grootheid C, bij de tweede C′ en bij de derde C″, gevoegd had, zoude men de integraal

$$(x^2-1) \, Arc.Tang.x + x - x \, Log.(1+x^2) =$$
$$\ldots \tfrac{1}{3}x^3 y + x^2 C + 2x C' + C''$$

gevonden hebben; doch de omstandigheden van het Voorstel, waaruit de voorgestelde vergelijking is afgeleid geworden, moeten beslissen, of zulks al of niet noodzakelijk zij.

Aanmerking. Wij hebben in de ontbinding van dit Voorstel, zoo als ook in het voorgaande, bij de integratie van het tweede gedeelte der vergelijking, m en $n = 0$ aangenomen; alzoo blijft ons nog over te onderzoeken, of men, voor een der andere waarden, ook dezelfde integraal bekomen zal. Wij zullen alzoo tot dit

dit einde den wortel $n = 1$, in de vergelijking $n^3 - 3n^2 + 2n = 0$, aannemen: daardoor heeft men $A = \frac{1}{2}$; $B = \frac{1}{6}$ en $D = \frac{1}{6}$, en de integraal der eerste vergelijking wordt

$$\int \frac{x\partial x}{1+x^2} = \tfrac{1}{2} y x^2 + \tfrac{1}{6} x^3 \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{x^4 \partial\partial y}{6\partial x^2}$$

maar $\int \frac{x\partial x}{1+x^2} = \frac{1}{2} Log.(1+x^2)$, dus

$$Log.(1+x^2) = y x^2 + \tfrac{1}{3} x^3 \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{x^4 \partial\partial y}{3\partial x^2}.$$

waaruit de vergelijking

$$\partial x\, Log.(1+x^2) = y x^2 \partial x + \tfrac{1}{3} x^3 \partial y + \frac{x^4 \partial\partial y}{3\partial x}$$

ontstaat, en zoo men dezelve met x^m multipliceert, heeft men $x^m \partial x\, Log.(1+x^2) = \ldots$

$$\ldots y x^{m+2} \partial x + \tfrac{1}{3} x^{m+3} \partial y + \frac{x^{m+4} . \partial\partial y}{3\partial x};$$

waarvan wij stellen de integraal te zijn

$$\int x^m \partial x\, Log.(1+x^2) = E y x^{m+3} + F x^{m+4} . \frac{\partial y}{\partial x};$$

nu is de differentiaal dezer vergelijking

$$x^m \partial x L(1+x^2) = E x^{m+3} . \partial y + (m+3) E y x^{m+2} \partial x + (m+4) F x^{m+3} . \partial y + F x^{m+4} . \frac{\partial\partial y}{\partial x},$$

derhalve moet $(m+3) E = 1$, $E + (m+4) F = \frac{1}{3}$ en $F = \frac{1}{3}$ zijn; dus $E = \frac{1}{m+3}$ en $\frac{1}{m+3} + \frac{m+4}{3} = \frac{1}{3}$, of $m^2 + 2m = 0$; gevolgelijk kan $m = 0$ en $m = -2$ zijn. Stellen wij $m = 0$, zoo is $E = \frac{1}{3}$ en $F = \frac{1}{3}$, en dan heeft men

$$\int\partial x\, Log.(1+x^2) = \tfrac{1}{3}yx^3 + \tfrac{1}{3}x^4 . \frac{\partial y}{\partial x}$$

dat is, volgens het hier voor gevondene, $x\, Log.(1+x^2) - 2x + 2\, Arc.\, Tang.\, x = \frac{1}{3}y\,x^3 + \frac{1}{3}x^4 . \frac{\partial y}{\partial x}$, of $x\partial x\, Log.(1+x^2) - 2x\partial x + 2\partial x\, Arc.Tang.\, x = \frac{1}{3}yx^3\partial x + \frac{1}{3}y^4\partial y$, of wel $\frac{\partial x}{x^2} Log.(1+x^2) - \frac{2\partial x}{x^2} + \frac{2\partial x}{x^3} Arc.Tang.\, x = \frac{1}{3}(y\partial x + x\partial y)$, waarvan de integraal is

$$\int\frac{\partial x}{x^2} Log.(1+x^2) + \frac{2}{x} + \int\frac{2\partial x}{x^3} Arc.Tang.x = \tfrac{1}{3}xy$$

Om het eerste gedeelte dezer vergelijking te integreren, differentiere men $\frac{Log.(1+x^2)}{x}$ en $\frac{Arc.Tang.x}{x^2}$; alsdan heeft men vooreerst

$$\partial.\frac{Log.(1+x^2)}{x} = \frac{-\partial x\, Log.(1+x^2)}{x^2} + \frac{2\partial x.}{1+x^2}$$

of $$\frac{\partial x\, Log.(1+x^2)}{x^2} = \frac{2\partial x}{1+x^2} - \partial.\frac{Log.(1+x^2)}{x}$$

en $$\int\frac{\partial x\, Log.(1+x^2)}{x^2} = 2 Arc.Tang.x - \frac{Log.(1+x^2)}{x}$$

Voorts is:

$$\partial\left(\frac{Arc.Tang.x}{x^2}\right) = \frac{-2\partial x\, Arc.Tang.x}{x^3} + \frac{\partial x}{x^2(1+x^2)}$$

of $$\frac{2\partial x\, Arc.Tang.x}{x^3} = \frac{\partial x}{x^2(1+x^2)} - \partial\left(\frac{Arc.Tang.x}{x^2}\right)$$

waarvan de integraal is:

$$\int\frac{2\partial x\, Arc.Tang.x}{x^3} = \int\left(\frac{\partial x}{x^2} - \frac{\partial x}{1+x^2}\right) - \ldots$$

Arc.

$$\frac{Arc.Tang.x}{x^2} = \frac{-1}{x} - Arc\,Tang\,x - \frac{Arc.Tang.x}{x^2}$$

en als men deze waarden in de integraal ſubſtitueert, heeft men:

$$\frac{(x^2-1)\,Arc.Tang.x}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{Log.(1+x^2)}{x} = \tfrac{1}{3}\,x\,y$$

of $(x^2-1)Arc.Tang.x + x - x\,Log.(1+x^2) = \tfrac{1}{3}\,x^2 y$, hetwelk volmaakt met de eerstgevondene integraal overeenkomt.

Om zich eindelijk al verder te overtuigen, dat het om het even is, van welke der gevondene wortelen voor n en m, men zich tot de integratie bedient, zullen wij in de vergelijking

$$\int x^m \delta x\,Log.(1+x^2) = E\,y\,x^{m+3} + F\,x^{m+4} . \frac{\delta y}{\delta x}$$

de tweede waarde, $m = -2$, ſtellen; hierdoor vindt men $E = 1$, $F = \tfrac{1}{3}$ en de integraal

$$\int \frac{\delta x}{x^2}\,Log.(1+x^2) = y\,x + \frac{x^2\,\delta y}{2\,\delta x},$$

of, het eerſte lid integrerende:

$$2\,Arc.Tang.x - \frac{Log.(1+x^2)}{x} = y\,x + \frac{x^2\,\delta y}{2\,\delta x}$$

waaruit de differentiaal-vergelijking

$$2\,\delta x\,Arc.Tang.x - \frac{\delta x\,Log.(1+x^2)}{x} = y\,x\,\delta x + \frac{x^2\,\delta y}{2}$$

ontſtaat, van welke het tweede gedeelte eenen integreerbaren vorm bekomt, als men de geheele vergelijking met x multipliceert; want hierdoor heeft men: $2\,x\,\delta x\,Arc.Tang.x - \delta x\,Log.(1+x^2) = y\,x^2\,\delta x + \tfrac{1}{3}\,x^3\,\delta y$, zijnde de integraal van het tweede lid, $\tfrac{1}{3}\,x^3\,y$. Ten einde het eerſte gedeelte te integreren, heeft men vol-

 gens

gens het voorheen gevondene $\int 2x\partial x$ *Arc. Tang.* $x = (1+x^2)$ *Arc. Tang.* $x - x$, en $\int \partial x$ *Log.* $(1+x^2) = x$ *Log.* $(1+x^2) - 2x + 2$ *Arc. Tang.* x; derhalve is de integraal: $\int 2x\partial x$ *Arc. Tang.* $x - \int \partial x$ *Log.* $(1+x^2) = (x^2-1)$ *Arc. Tang.* $x + x - x$ *Log.* $(1+x^2) = \frac{1}{2}x^2 y$, zoo als wij hiervoor op twee verschillende wijzen gevonden hebben.

N°. 160. Door

U. Huguenin, en *J. R. Schmidt.*

Ten einde de integraal van $\frac{\partial\phi}{Cos.\,\phi^5}$ te vinden, zoude men $Sin.\,\phi = x$ kunnen stellen, waardoor $\frac{\partial\phi}{Cos.\,\phi^5}$ verandert in $\frac{\partial x}{(1-x^2)^3}$, welke formule in partiale breuken ontbonden en geïntegreerd kan worden; doch wij willen liever deze differentiaal in haren trigonometrischen vorm integreren, door voor $\int\frac{\partial\phi}{Cos.\,\phi^n}$ eene algemeene uitdrukking te zoeken, in de veronderstelling, dat n een geheel positief getal zij.

Hiertoe differentiere men $\frac{Sin.\,\phi}{Cos.\,\phi^{n-1}}$, zoo heeft men

$$\partial\frac{Sin.\,\phi}{Cos.\,\phi^{n-1}} = \frac{Cos.\,\phi\,\partial\phi}{Cos.\,\phi^{n-1}} + \frac{(n-1)\,Sin.\,\phi^2\,\partial\phi}{Cos.\,\phi^n}$$

$$= \frac{Cos.\,\phi^2\,\partial\phi + (n-1)(1 - Cos.\,\phi^2)\,\partial\phi}{Cos.\,\phi^n}$$

=

$$=\frac{(n-1)\partial\phi}{Cos.\phi^{n}}-\frac{(n-2)Cos.\phi^{2}.\partial\phi}{Cos.\phi^{n}}$$

$$=\frac{(n-1)\partial\phi}{Cos.\phi^{n}}-\frac{(n-2)\,\partial\phi}{Cos.\phi^{n-2}};$$ derhalve

$$\frac{\partial\phi}{Cos.\phi^{n}}=\frac{1}{n-1}.\partial\frac{Sin.\phi}{Cos.\phi^{n-1}}+\frac{n-2}{n-1}.\frac{\partial\phi}{Cos.\phi^{n-2}};$$ dus

$$1^{o}..\int\frac{\partial\phi}{Cos.\phi^{n}}=\frac{1}{n-1}.\frac{Sin.\phi}{Cos.\phi^{n-1}}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{\partial\phi}{Cos\phi^{n-2}}$$

Stelt men nu in deze uitdrukking voor n achtervolgens $n-2$, $n-4$, $n-6$, enz. zoo bekomt men de uitdrukkingen

$$2^{o}..\int\frac{\partial\phi}{Cos.\phi^{n-2}}=\frac{1}{n-3}.\frac{Sin.\phi}{Cos.\phi^{n-3}}+\frac{n-4}{n-3}\int\frac{\partial\phi}{Cos.\phi^{n-4}}$$

$$3^{o}..\int\frac{\partial\phi}{Cos.\phi^{n-4}}=\frac{1}{n-5}.\frac{Sin.\phi}{Cos.\phi^{n-5}}+\frac{n-6}{n-5}\int\frac{\partial\phi}{Cos.\phi^{n-6}}$$

$$4^{o}..\int\frac{\partial\phi}{Cos.\phi^{n-6}}=\frac{1}{n-7}.\frac{Sin.\phi}{Cos.\phi^{n-7}}+\frac{n-6}{n-7}\int\frac{\partial\phi}{Cos.\phi^{n-8}}$$

enz.

Substitueert men nu achtervolgens de uitdrukkingen 2, 3, 4, enz., in 1, zoo bekomt men de algemeene formule

$$\int\frac{\partial\phi}{Cos.\phi^{n}}=\frac{1}{n-1}.\frac{Sin.\phi}{Cos.\phi^{n-1}}+\frac{(n-2)}{(n-1)(n-3)}.\frac{Sin.\phi}{Cos.\phi^{n-3}}+$$

$$\frac{(n-2)\,(n-4)}{(n-1)\,(n-3)\,(n-5)}.\frac{Sin.\phi}{Cos.\phi^{n-5}}+\ldots$$

$$\frac{(n-2)\,(n-4)\,(n-6)}{(n-1)\,(n-3)\,(n-5)\,(n-7)}.\frac{Sin.\phi}{Cos.\phi^{n-7}}.$$

+

$$+\ldots+\frac{(n-2)(n-4)\ldots[n-(n-1)]}{(n-1)(n-3)\ldots[n-(n-2)]}\int\frac{\delta\phi}{Cos.\phi},$$

als n een even getal is, of tot . . . .

$$\ldots+\frac{(n-2)(n-4)\ldots[n-(n-2)]}{(n-1)(n-3)\ldots\ldots 3.1}\int\frac{\delta\phi}{Cos.\phi^2},$$

als n een oneven getal is.

Welk geheel positief getal voor n ook mag aangenomen worden, zoo zal, of in den teller, of in den noemer der leden, steeds een factoor voorkomen, die $= 0$ wordt; het lid, waarbij zulks plaats vindt, valt alsdan weg, zoo als ook alle de volgende leden, uitgezonderd *het* laatste lid, hetwelk steeds bij de blijvende reeks moet worden gevoegd; als bij *voorbeeld: zoo* is voor

$$n=3,\int\frac{\delta\phi}{Cos.\phi^3}=\tfrac{1}{2}.\frac{Sin.\phi}{Cos.\phi^2}+\tfrac{1}{2}\int\frac{\delta\phi}{Cos.\phi}$$

$$n=5,\int\frac{\delta\phi}{Cos.\phi^5}=\tfrac{1}{4}.\frac{Sin.\phi}{Cos.\phi^4}+\frac{3}{4.2}.\frac{Sin.\phi}{Cos.\phi^2}$$

$$\ldots+\frac{3.1}{4.2}\int\frac{\delta\phi}{Cos.\phi}.$$ Voorts is voor

$$n=2,\int\frac{\delta\phi}{Cos.\phi^2}=\frac{Sin.\phi}{Cos.\phi}=Tang.\phi$$

$$n=4,\int\frac{\delta\phi}{Cos.\phi^4}=\tfrac{1}{3}.\frac{Sin.\phi}{Cos.\phi^3}+\frac{2}{3.1}.\frac{Sin.\phi}{Cos.\phi}+\tfrac{2}{3}\int\frac{\delta\phi}{Cos.\phi^2}$$

$$=\tfrac{1}{3}.\frac{Sin.\phi}{Cos.\phi^3}+\frac{2}{3.1}.\frac{Sin.\phi}{Cos.\phi}+\tfrac{2}{3}Tang.\phi,\text{enz.}$$

Voor ons geval is het nu nog noodig, de integraal van $\frac{\delta\phi}{Cos.\phi}$ te vinden, hetwelk aan geene

zwa-

zwarigheden onderhevig is; want doordien . . .

$$\frac{\delta\phi}{Cos.\phi}=\frac{Cos.\phi.\delta\phi}{Cos.\phi^2}=\frac{Cos.\phi.\delta\phi}{1-Sin.\phi^2}=\tfrac{1}{2}.\frac{Cos.\phi\delta\phi}{1+Sin.\phi}$$

$+\tfrac{1}{2}.\frac{Cos.\phi\delta\phi}{1-Sin.\phi}$ is, heeft men door de bekende formulen

$$\int\frac{\delta\phi}{Cos.\phi}=\tfrac{1}{2}Log.(1+Sin.\phi)-\tfrac{1}{2}Log.(1-Sin.\phi)$$

$$=\tfrac{1}{2}Log.\frac{1+Sin.\phi}{1-Sin.\phi}=Log.\sqrt{\frac{1+Sin.\phi}{1-Sin.\phi}}=$$

$$\ldots\ldots Log.Tang.(45^\circ+\tfrac{1}{2}\phi)$$

Om te bekorten zullen wij de gevondene integraal, $Log.Tang.(45^\circ+\tfrac{1}{2}\phi)=X$ ftellen, zoo dat, als men de gevondene integraal van $\frac{\delta\phi}{Cos.\phi^5}$ in onze differentiaal fubftitueert, heeft men

$$\frac{\delta\phi}{Cos.\phi^3}\int\frac{\delta\phi}{Cos.\phi^5}=\frac{\delta\phi}{Cos.\phi^3}\left(\tfrac{1}{4}.\frac{Sin.\phi}{Cos.\phi^4}+\tfrac{3}{8}.\frac{Sin.\phi}{Cos.\phi^2}\right.$$

$$\left.+\tfrac{3}{8}X\right)=\tfrac{1}{4}.\frac{Sin.\phi\delta\phi}{Cos.\phi^7}+\tfrac{3}{8}.\frac{Sin.\phi\delta\phi}{Cos.\phi^5}\ldots\ldots$$

$$+\tfrac{3}{8}\frac{X\delta\phi}{Cos.\phi^3}.$$

Ten einde de beide eerfte differentialen dezer uitdrukking te integreren, merke men op, dat

$$\delta\frac{1}{Cos.\phi^{n-1}}=\frac{(n-1)\,Sin.\phi\delta\phi}{Cos.\phi^n},$$ en alzoo

$$\int\frac{Sin.\phi\delta\phi}{Cos.\phi^n}=\frac{1}{n-1}.\frac{1}{Cos.\phi^{n-1}}$$ is, en als men hierin $n=7$ en $n=5$ ftelt, heeft men

$$\int \frac{Sin.\phi\,\partial\phi}{Cos.\phi^7} = \tfrac{1}{6}\cdot\frac{1}{Cos.\phi^6} \text{ en } \int \frac{Sin.\phi\,\partial\phi}{Cos.\phi^5} = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{1}{Cos.\phi^4};$$

derhalve is de integraal

$$\int \frac{\partial\phi}{Cos.\phi^3}\int \frac{\partial\phi}{Cos.\phi^5} = \frac{1}{4.6}\cdot\frac{1}{Cos.\phi^6} + \frac{3}{4.8}\cdot\frac{1}{Cos.\phi^4}$$

$+ \tfrac{3}{8}\int \frac{X\partial\phi}{Cos.\phi^3}$; waarvan het gedeelte $\frac{X\partial\phi}{Cos.\phi^3}$ nog geïntegreerd moet worden. Hiertoe merke men op, dat in het algemeen $\partial XY = X\partial Y + Y\partial X$ en alzoo $\int X\partial Y = XY - \int Y\partial X$ is. Stelt men nu $Y = \int \frac{\partial\phi}{Cos.\phi^3}$, zoo is

$$\int \frac{X\partial\phi}{Cos.\phi^3} = X\int \frac{\partial\phi}{Cos.\phi^3} - \int \partial X \int \frac{\partial\phi}{Cos.\phi^3}.$$

Maar $\int \frac{\partial\phi}{Cos.\phi^3} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{Sin.\phi}{Cos.\phi^2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial\phi}{Cos.\phi} = \ldots$

$\ldots \tfrac{1}{2}\cdot\frac{Sin.\phi}{Cos.\phi^2} + \tfrac{1}{2}X$; alzoo is

$$X\int \frac{\partial\phi}{Cos.\phi^3} = \tfrac{1}{2}X\cdot\frac{Sin.\phi}{Cos.\phi^2} + \tfrac{1}{2}X^2;$$

Voorts $\int \partial X \int \frac{\partial\phi}{Cos.\phi^3} = \int \frac{\partial\phi}{Cos.\phi}\int \frac{\partial\phi}{Cos.\phi^3} \ldots$

$$\ldots = \int \frac{\partial\phi}{Cos.\phi}\left(\tfrac{1}{2}\cdot\frac{Sin.\phi}{Cos.\phi^2} + \tfrac{1}{2}X\right) \ldots$$

$$\ldots = \int \tfrac{1}{2}\cdot\frac{Sin.\phi\,\partial\phi}{Cos.\phi^3} + \tfrac{1}{2}\int \frac{X\partial\phi}{Cos.\phi} \ldots$$

$\ldots =$

$$\ldots = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{Cos.\varphi^2} + \frac{1}{2}\int\frac{X\partial\varphi}{Cos.\varphi} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{Cos.\varphi^2} +$$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}X^2$, wijl $X.\frac{\partial\varphi}{Cos.\varphi} = X\partial X$ is: derhalve is

$$\int\frac{X\partial\varphi}{Cos.\varphi^3} = \frac{1}{2}X.\frac{Sin.\varphi}{Cos.\varphi^2} + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{Cos.\varphi^2} - \frac{1}{4}X^2 =$$

$\frac{1}{2}X.\frac{Sin.\varphi}{Cos.\varphi^2} + \frac{1}{4}X^2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{Cos.\varphi^2}$; zoo dat de gezochte integraal zijn zal:

$$\int\frac{\partial\varphi}{Cos.\varphi^3}\int\frac{\partial\varphi}{Cos.\varphi^3} = \frac{1}{4.6}\cdot\frac{1}{Cos.\varphi^6} + \frac{3}{4.8}\cdot\frac{1}{Cos.\varphi^4}$$

$$\ldots - \frac{3}{4.8}\cdot\frac{1}{Cos.\varphi^2} + \frac{3}{16}.X.\frac{Sin.\varphi}{Cos.\varphi^2} + \frac{3}{4.8}X^2.$$

$$= \frac{1}{4.6}\cdot\frac{1}{Cos.\varphi^6} + \frac{3}{4.8}\left(\frac{1 - Cos.\varphi^2}{Cos.\varphi^4}\right) + \ldots$$

$$\ldots\frac{3}{4.8}\left(2X.\frac{Sin.\varphi}{Cos.\varphi^2} + X^2\right) = \frac{1}{4.6}\cdot\frac{1}{Cos.\varphi^6}\ldots$$

$$+ \frac{3}{4.8}\left(\frac{Sin.\varphi}{Cos.\varphi^2} + X\right)^2 = \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{Cos.\varphi^6} + \ldots$$

$$\ldots\frac{3}{32}\left(\frac{Sin.\varphi}{Cos.\varphi^2} + Log.Tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi)\right)^2:$$

waarbij nog eene standvastige grootheid moet worden gevoegd.

AANMERKING. De hier voor gevondene algemeene uitdrukking voor de integraal van $\frac{\partial\varphi}{Cos.\varphi^n}$, zoo ook van $\frac{Sin.\varphi\partial\varphi}{Cos.\varphi^n}$ en $\frac{\partial\varphi}{Cos.\varphi}$, dienen om alle differentialen van den vorm $\frac{\partial\varphi}{Cos.\varphi^q}\int\frac{\partial\varphi}{Cos.\varphi^p}$ te inte-

tegreren; daar echter ook differentialen kunnen voorkomen, welke den vorm $\frac{\partial\phi}{Sin.\phi^q}\int\frac{\partial\phi}{Sin.\phi^p}$ hebben, zullen wij nog de algemeene uitdrukking voor de integraal van $\frac{\partial\phi}{Sin.\phi^n}$ hier bijvoegen. Hiertoe differentiere men de functie $\frac{Cos.\phi}{Sin.\phi^{n-1}}$, zoo heeft men:

$$\partial\frac{Cos.\phi}{Sin.\phi^{n-1}}=\frac{-Sin.\phi\partial\phi}{Sin.\phi^{n-1}}-\frac{(n-1)Cos.\phi^2\partial\phi}{Sin.\phi^n}=$$

$$\frac{-Sin.\phi^2\partial\phi-(n-1)(1-Sin.\phi^2)\partial\phi}{Sin.\phi^n}=\frac{-(n-1)\partial\phi}{Sin.\phi^n}$$

$$+\frac{(n-2)Sin.\phi^2\partial\phi}{Sin.\phi^n}=\frac{-(n-1)\partial\phi}{Sin.\phi^n}+\frac{(n-2)\partial\phi}{Sin.\phi^{n-2}}.$$

zoo dat:

$$1°..\int\frac{\partial\phi}{Sin.\phi^n}=\frac{-1}{n-1}.\frac{Cos.\phi}{Sin.\phi^{n-1}}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{\partial\phi}{Sin.\phi^{n-2}}.$$

Stelt men nu voor n achtervolgens $n-2$, $n-4$, $n-6$, enz. zoo bekomt men

$$2°..\int\frac{\partial\phi}{Sin.\phi^{n-2}}=\frac{-1}{n-3}.\frac{Cos.\phi}{Sin.\phi^{n-3}}+\frac{n-4}{n-3}\int\frac{\partial\phi}{Sin.\phi^{n-4}};$$

$$3°..\int\frac{\partial\phi}{Sin.\phi^{n-4}}=\frac{-1}{n-5}.\frac{Cos.\phi}{Sin.\phi^{n-5}}+\frac{n-6}{n-5}\int\frac{\partial\phi}{Sin.\phi^{n-6}};$$

$$4°..\int\frac{\partial\phi}{Sin.\phi^{n-6}}=\frac{-1}{n-7}.\frac{Cos.\phi}{Sin.\phi^{n-7}}+\frac{n-8}{n-7}\int\frac{\partial\phi}{Sin.\phi^{n-8}},$$

enz.

Sub-

Subſtitueert men eindelijk de vergelijkingen 2, 3, 4, enz. achtervolgens in 1, zoo bekomt men de algemeene formule:

$$\int \frac{\delta\phi}{Sin.\phi^{n}} = \frac{-1}{n-1} \cdot \frac{Cos.\phi}{Sin.\phi^{n-1}} - \frac{n-2}{(n-1)(n-3)} \cdot \frac{Cos.\phi}{Sin.\phi^{n-3}}$$

$$\ldots - \frac{(n-2)(n-4)}{(n-1)(n-3)(n-5)} \cdot \frac{Cos.\phi}{Sin.\phi^{n-5}} \ldots$$

$$- \frac{(n-2)(n-4)(n-6)}{(n-1)(n-3)(n-5)(n-7)} \cdot \frac{Cos.\phi}{Cos.\phi^{n-7}} -$$

$$\ldots + \frac{(n-2)(n-4)(n-6)\ldots 1}{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots 2} \int \frac{\delta\phi}{Sin.\phi},$$

als n een oneven poſitief getal is; is n daarentegen een poſitief even getal, zoo is het laatſte lid dezer reeks:

$$+ \frac{(n-2)(n-4)(n-6)\ldots 1}{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots 2} \int \frac{\delta\phi}{Sin.\phi^{2}},$$

Daar voorts $\delta \dfrac{1}{Sin.\phi^{n-1}} = \dfrac{-(n-1)\,Cos.\phi\delta\phi}{Sin.\phi^{n}}$,

alzoo $\displaystyle\int \frac{Cos.\phi\delta\phi}{Sin.\phi^{n}} = \frac{-1}{n-1} \cdot \frac{1}{Sin.\phi^{n-1}}$;

$$\int \frac{\delta\phi}{Sin.\phi^{2}} = -Cot.\phi \text{ en} \int \frac{\delta\phi}{Sin.\phi} = \int \frac{Sin.\phi\delta\phi}{Sin.\phi^{2}} =$$

$$\int \frac{Sin.\phi\delta\phi}{1-Cos.\phi^{2}} = \tfrac{1}{2}\int \frac{Sin.\phi\delta\phi}{1+Cos.\phi} + \tfrac{1}{2}\int \frac{Sin.\phi\delta\phi}{1-Cos.\phi} =$$

$$\frac{-1}{2} Log.(1+Cos.\phi) + \tfrac{1}{2} Log.(1-Cos.\phi) =$$

$$\tfrac{1}{2} Log.\frac{1-Cos.\phi}{1+Cos.\phi} = Log.\sqrt{\frac{1-Cos.\phi}{1+Cos.\phi}} = Log.Tang.\tfrac{1}{2}\phi$$

is,

is, zoo zijn alle integralen, welke men tot de integratie van elke differentiaal-uitdrukking. $\frac{\delta\phi}{Sin.\phi^q} \int \frac{\delta\phi}{Sin.\phi^p}$, waarin p en q geheele positieve getallen zijn, benoodigd heeft, insgelijks bekend.

Ik heb mij bij de integratie van de opgegevene differentiaal, alleen van de eigenschappen der trigonometrische functien bediend; zij zijn meer geschikt dan de algebraische uitdrukkingen, om van den eenen tot den anderen vorm overgebragt te worden. De handelwijze, welke men in sommige Wiskundige werken aantreft, van namelijk de trigonometrische differentiaal-functien, tot de integratie, in algebraische differentialen over te brengen, komt mij daartoe minder sierlijk voor, en in vele gevallen niet zoo kort te zijn, dan de integratie der trigonometrische *differentialen* zelf.

N°. 161. Door

H. F. Fijnje, Jan Pauw, P. van Eeghen Chr., R. LOBATTO, *N. Bondt, A. van der Swan, Moses Lemans*, en *J. B. Cantor*.

Stel dat het eene stuk lijnwaad lang is x ellen, dan is het andere $x + 6$ ellen; x ellen, tegen x stuivers de el, is x^2 stuivers, en $x + 6$ ellen, tegen $x + 6$ stuivers de el, is $x^2 + 12x + 36$ stuivers; zij bedragen dus te zamen $2x^2 + 12x + 36$ stuivers, en het eene stuk heeft meer gekost dan het andere, $12x + 36$ stuivers. Dit met elkander multiplicerende, komt

$$24x^3 + 216x^2 + 864x + 1296 = 226800$$

Men deele deze vergelijking door 24, komt

$$x^3 + 9x^2 + 36x + 54 = 9450$$

dus $x^3 + 9x^2 + 36x - 9396 = 0$

Van

Van deze vergelijking wordt bevonden $x = 18$ een wortel en dus $x - 18$ een deeler te zijn; de vergelijking dan door $x - 18$ deelende, komt:

$$x^2 + 27x + 522 = 0$$

waar van de beide wortels zijn:

$$x = -13\tfrac{1}{2} + \sqrt{339\tfrac{1}{4}} \text{ en } x = -13\tfrac{1}{2} - \sqrt{339\tfrac{1}{4}}$$

Wij vinden dus maar eenen rationalen wortel, namelijk $x = 18$, dus moet het eene ſtuk 18 en het andere 24 ellen lang geweest zijn.

N°. 162. Door

Jan Pauw.

NB. In de opgaaf van dit Voorſtel, zijn twee aanmerkelijke fouten ingeſlopen. Vooreerst moet het grondtal van de datum één meer dan dat van de maand en één minder dan dat van het jaartal zijn: en ten tweede is het niet het jaartal, maar de ſom van maand en jaartal; dat een vierkant getal moet zijn.

Oplossing. — Stel dat alle de getallen in het tientallig ſtelſel overgebragt zijnde, z de ſom der maand en datum is; dan is $3z + 3$ de wortel uit de ſom van maand en jaartal, en dus is deze ſom van maand en jaartal $9(z + 1)^2$; $9(z + 1)^2 + z$ is bij gevolg tweemaal de maand met de ſom van jaartal en datum, en wij hebben alzoo de vierkants vergelijking $9(z + 1)^2 + z = 1777$, waar uit gevonden wordt $z = 13$ voor de ſom van maand en datum, en dus $9(z + 1)^2 = 1764$ voor de ſom van maand en jaartal.

Stel verder het grondtal, van het talſtelſel tot het jaar gebezigd x, dan is het grondtal van de datum $x - 1$, en het grondtal van de maand $x - 2$; wanneer wij dan de bedekte cijfer

 door

door * voorgesteld y, en dus die door Δ afgebeeld $y+1$ noemen, dan is:

de datum $y(x-1)+(y+1)$ .. of $xy+1$
de maand $(y+1)(x-2)+y$ .. of $xy+x-y-2$
het jaar $(y+1)x^4+4x^3+x+(y+1)$

Wij moeten dus de som der twee eersten gelijk 13 en de som der twee laatsten gelijk 1764 stellen, en dit verschaft ons de twee volgende vergelijkingen

$$2xy+x-y-1=13$$

en $(y+1)x^4+4x^3+(y+2)x-1=1764$

uit de eerste vindt men oogenblikkelijk $y=\frac{14-x}{2x-1}$

en brengende deze waarde in de laatste, gaat zij over in

$$\frac{(13+x)x^4}{2x-1}+4x^3+\frac{(12+3x)x}{2x-1}-1765=0$$

welke met $2x-1$ vermenigvuldigd, en herleid, geeft:

$$x^5+21x^4-4x^3+3x^2-3518x+1765=0$$

waaruit $x=5$ en dus $y=\frac{14-x}{2x-1}=1$; zoo dat $xy+1=6$ de datum, $xy+x-y-2=7$ de maand, en $(y+1)x^4+4x^3+x+(y+1)=1757$ het jaartal is, zijnde verder $*=y=1$ en $\Delta=y+1=2$.

Hieruit blijkt dus dat ik geboren ben den 6e. Julij A°. 1757 of wel den 12en dag (grondtal 4) van de 21e maand (grondtal 3) des jaars 24012 (grondtal 5.)

N°. 163. Door

JAN PAUW, *R. Lobatto*, *A. van der Swan*, *P. van Eeghen Chz.*, en *N. Bondt*

Stel de jaren van den ouden vriend $=x$, die zijner beminde $=y$ en het zekere getal $=z$;

voorts

voorts $x + z = a^2$, $y + z = b^2$ en $x + y - z = c^2$; dan is $a = c - 1$, $c = 2b$ en $a - b = 2z$. Als men nu de twee eerste vergelijkingen addeert en daar van de derde vergelijking aftrekt, komt $3z = a^2 + b^2 - c^2$, en vermenigvuldigt men deze met $a - b = 2z$, zoo heeft men $3(a - b) = 2(a^2 + b^2 - c^2)$. Maar $a = c - 1$ en $b = \frac{1}{2}c$; dus $a - b = \frac{1}{2}c - 1$, $a^2 = c^2 - 2c + 1$ en $b^2 = \frac{1}{4}c^2$; brengt men deze waarden over in $3(a - b) = 2(a^2 + b^2 - c^2)$, zoo heeft men

$$3(\tfrac{1}{2}c - 1) = 2(c^2 - 2c + 1 + \tfrac{1}{4}c^2 - c^2)$$
$$= 2(\tfrac{1}{4}c^2 - 2c + 1)$$
$$= \tfrac{1}{2}c^2 - 4c + 2$$

en deze vergelijking met 2 vermenigvuldigende, zoo heeft men,

$$3c - 6 = c^2 - 8c + 4$$
waar door $c^2 = 11c - 10$
dus $c = 1$ of $c = 10$.

Door de eerste waarde van c vinden wij $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}(a - b) = -\frac{1}{4}$, $x = a^2 - z = \frac{1}{4}$ en $y = b^2 - z = \frac{1}{2}$.

De tweede waarde van c geeft, $a = 9$ $b = 5$, $z = \frac{1}{2}(a - b) = 2$, $x = a^2 - z = 79$ en $y = b^2 - z = 23$. Daar nu de eerste waarden van x en y in eenen natuurkundigen zin onbestaanbaar zijn, zoo volgt daar uit, dat $x = 79$ voor den ouderdom van den vriend en $y = 23$ voor dien zijner beminde genomen moeten worden.

N°. 164. Door

P. van Eeghen Chz., J. B. Cantor, R. Lobatto, Moses Lemans, Jan Pauw, A. van der Swan, H. F. Fynje en *N. Bondt.*

Stel de jaren van *Titus* x^2 en die van *Cajus* $(x +$

$(x+1)^2$, dan moet $\sqrt{(2x+1)} = x - 1$ zijn, dus $2x+1 = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$; gevolgelijk $2x = x^2 - 2x$, $4x = x^2$ en $x = 4$; dus is de ouderdom van *Titus* 16 en die van *Cajus* 25 jaar.

No. 165. Door

Jan Pauw, P. van Eeghen Chz., A. van der Swan, H. F. Fynje, J. B. Cantor, N. Bondt, Moses Lemans en R. Lobatto.

Stel de deelen $520 + x$ en $520 - x$, zoo moet

$$\frac{520+x}{520-x} + \frac{520-x}{520+x} = 80 \text{ zijn}$$

De beide leden van deze vergelijking met $(520 - x)(520 + x)$ vermenigvuldigende, zoo heeft men

$$(520+x)^2 + (520-x)^2 = 80(520-x)(520+x)$$

of $2 \times 520^2 + 2x^2 = 80(520^2 - x^2)$

$520^2 + x^2 = 40(520^2 - x^2)$

dus $41x^2 = 39 \times 520^2$ en $x = 520\sqrt{\tfrac{39}{41}}$.

bijgevolg zijn de deelen $520(1 + \sqrt{\tfrac{39}{41}})$ en $520(1 - \sqrt{\tfrac{39}{41}})$.

No. 166. Door

Mozes Lemans, A. van der Swan, R. Lobatto, N. Bondt, Jan Pauw, H. F. Fynje, J. B. Cantor en P. van Eeghen Chz.

Stel de reeks $x - 1$, x, $x + 1$, $x + 2$, dan zijn de vierkanten van dezelve $x^2 - 2x + 1$, x^2, $x^2 + 2x + 1$, $x^2 + 4x + 4$; deze vierkanten succesſivelijk met 2, 3, 4 en 5 vermenigvuldigende, en bij de producten [illegible]

2,

2, 3, 4 en 5 optellende, zoo heeft men voor de deelen van het getal 144, $2x^2 - 4x + 4$, $3x^2 + 3$, $4x^2 + 8x + 8$, $5x^2 + 20x + 25$, waar van de ſom $14x^2 + 24x + 40 = 144$ zijn moet, dus

$$7x^2 + 12x + 20 = 72$$
$$7x^2 + 12x + 52$$
$$49x^2 + 12 . 7x = 364 \quad 7$$
$$\sqrt{49x^2 + 12 . 7x + 36 = 400}$$
$$7x + 6 = \pm 20$$
dus $x = 2$ of $x = -3\frac{5}{7}$

door de eerſte waarde van x vindt men voor de deelen 4, 15, 40, 85; en door de tweede waarde van x : $46\frac{22}{49}$, $44\frac{19}{49}$, $33\frac{23}{49}$, $19\frac{34}{49}$.

No. 167. Door

R. Lobatto, A. van der Swam, Moſes Lemans, Jan Paauw, N. Bonda, en H. F. Fynje.

Men ſtelle voor de termen der meetkundige reeks x, xy, xy^2 en xy^3, dan moet $x - 1$, $xy - 5$, $xy^2 - 25$ en $xy^3 - 93$ de arithmetiſche reeks zijn, dus

$$xy^2 + x - 26 = 2xy - 10$$
en $xy^3 + xy - 98 = 2xy^2 - 50$
of $xy^2 + x - 2yx = 16$
en $xy^3 + xy - 2xy^2 = 48$

de tweede vergelijking door de eerſte deelende, zoo heeft men $y = 3$, en deze waarde ſtellende in $xy^2 + x - 2xy = x(y - 1)^2 = 16$, komt $x = 4$; dus is de geometriſche reeks 4, 12, 36, 108 en de arithmetiſche reeks 3, 7, 11, 15.

N°. 168. Door

A. VAN DER SWAN, *B. van Eeghen Chz.*, *Jan Pauw*, *Moses Lemans*, *R. Lobatto*, *N. Bondt*, *G. Dulman*, *H. Foekes Bakker* en *J. B. Cantor*.

Stel de jaren des zoons x, dan zijn die der dochter $21 - x$; het verschil der vierkanten dezer getallen is $(21 - x)^2 - x^2 = 441 - 42x$; dit nu moet gelijk zijn aan $(21 - x) \times 10 + x$; dus

$$441 - 42x = 210 - 9x$$

en $231 = 33x$; dus $x = 7$ en $21 - x = 14$.

N°. 169. Door

R. Lobatto, *Moses Lemans*, A. VAN DER SWAN, *Jan Pauw*, *P. van Eeghen Chz.*, *N. Bondt*, *H. Foekes Bakker* en *G. Dulman*.

Stel den ouderdom des mans $x + 1$, dan is die van de vrouw $x - 1$; stel voorts den ouderdom van den zoon $y + 3$, dan is die van de dochter y; en dan heeft men vooreerst $2y + 3 = x$; voorts $(2x)^2 - x^2 = 3x^2 = 2x \times 100 + x = 201x$, waaruit $x = 67$; dus is de man 68 en de vrouw 66 jaar oud; en hier uit volgt $2y + 3 = 67$ of $2y = 64$, dus $y = 32$ de ouderdom der dochter en $y + 3 = 35$ de ouderdom des zoons.

N°. 170. Door

O. S. BANGMA en *R. Lobatto*.

Laat ABC (*Fig.* 136) de voorgestelde driehoek zijn; beschrijf op de zijden van denzelven, de vier-

vierkanten ABED, ACIH en BCKL; verleng HI, KL en DE, tot dat deze laatste door de beide eerste gesneden worde in G en F; trek GA en FB, tot dat zij elkander ontmoeten in M; trek eindelijk MC, dan zijn AMB, AMC en BMC de begeerde deelen van den driehoek.

Om dit te bewijzen, trekke men CG en BG; dan is $\triangle$ AMC : $\triangle$ AGC = AM : AG

en $\triangle$ AMB : $\triangle$ AGB = AM : AG

dus $\triangle$ AMC : $\triangle$ AMB = $\triangle$ AGC : $\triangle$ AGB

maar $\triangle$ AGC = $\frac{1}{2}$ AC^2 en $\triangle$ AGB = $\frac{1}{2}$ AB^2

dus $\triangle$ AMC : $\triangle$ AMB = AC^2 : AB^2 . . . . . (1)

op dezelfde wijze kan men aantoonen,

dat $\triangle$ BMC : $\triangle$ AMB = BC^2 : AB^2 . . . . . (2)

en uit deze beide evenredigheden volgt,

dat $\triangle$ AMC : $\triangle$ BMC = AC^2 : BC^2 . . . . . (3)

waardoor het Voorstel bewezen is.

No. 171. Door

Moses Lemans en *R. Lobatto.*

Het spreekt van zelf, dat de driehoek tweemaal zoo hoog als de regthoek zijn moet; stel dan de hoogten $2x$ en x en laat de basis $2a$ zijn, dan is de omtrek des regthoeks $= 2a + 2a + x + x = 4a + 2x$ en die des driehoeks $= 2a + \sqrt{(a^2 + 4x^2)} + \sqrt{(a^2 + 4x^2)} = 2a + 2\sqrt{(a^2 + 4x^2)}$ en daar deze omtrekken gelijk aan elkander moeten zijn, heeft men

$$4a + 2x = 2a + 2\sqrt{(a^2 + 4x^2)}$$

$$\text{of } a + x = \sqrt{(a^2 + 4x^2)}$$

en door de beide leden dezer vergelijking in het vierkant te brengen

$$a^2 + 2ax + x^2 = a^2 + 4x^2$$

waaruit volgt $2ax = 3x^2$ en $x = \frac{2}{3}a$; dat is: de

de hoogte des regthoeks moet gelijk ⅓ en die des driehoeks gelijk ⅔ van de basis zijn.

N°. 172. Door

O. S. Bangma.

Laten A, B, C en D (*Fig.* 137.) de vier gegevene stippen zijn; trek door A en D eene onbepaalde regte PQ, en uit C, loodregt op dezelve, de regte CE; maak CF = AD en trek door F, de regte BF; voorts uit C eene evenwijdige aan BF, en uit A en D loodlijnen op BF; deze zullen, door hare onderlinge snijdingen in G, H, I en K, een vierkant GHIK voortbrengen;

want *Rad*: AD = *Sin*. ∠ DAG : GK
en *Rad*: CF = *Sin*. ∠ FCI : KI

maar CF = AD en ∠ FCI = ∠ CFB = 180° — ∠ GFE = ∠ GAE = ∠ DAG; dus . . . GK = KI; terwijl de hoeken in G, H, I en K, volgens de Constructie regt zijn. Dus is GHIK een vierkant.

I. Aanmerking. Wanneer men CF = AD aan den anderen kant van het punt C neemt, als in Figuur 138, en voorts op dezelfde wijze handelt als boven, zal men een ander vierkant GHIK verkrijgen, zoo als op dezelfde wijze als boven bewezen kan worden;

want *Rad*: AD = *Sin*. ∠ ADI : HI
en *Rad*: CF = *Sin*. ∠ CFK : KI

maar CF = AD en ∠ CFK = ∠ ECF = 180 — ∠ EDI = ∠ ADI: dus KI = HI, terwijl de hoeken in G, H, I en K regt zijn.

II. Aanmerking. Als men eene onbepaalde regte lijn PQ door de punten D en C trekt, als in

in Figuur 139 en 140; voorts uit een van de beide overige punten, als B, eene loodlijn BE op dezelve trekt, BF = DC maakt, de regte AF trekt, door B eene evenwijdige aan AF en uit D en C loodlijnen op AF trekt, zal men twee andere vierkanten GHIK verkrijgen.

III. Aanmerking. Als men eindelijk eene onbepaalde regte lijn PQ door de punten D en B trekt, als in [illegible] 141 en 142; voorts uit een van de overige punten, als C, eene loodlijn CE op dezelve trekt, CF = DB maakt, de regte AF trekt, door C eene evenwijdige aan AF en uit D en B loodlijnen op AF trekt, zal men wederom twee andere vierkanten GHIK verkrijgen.

IV. Aanmerking. In het algemeen zal elke stelkundige oplossing van een Voorstel, voor elk van de onbekenden, zoo veel verschillende waarden opleveren, als met de bekende dingen bestaanbaar zijn. Hier echter schijnt zulks niet plaats te hebben; want als men AD (*Fig.* 137.) $= m$, BC $= n$, $\angle$ BCE $= a$ en $\angle$ DAG $= \angle$ BFC $= x$ stelt, heeft men, uit de beschouwing van den driehoek BCF,

$$Sin.\angle BFC : BC = Sin.\angle CBF : FC$$

$$\text{dus } FC = BC \times \frac{Sin.\angle CBF}{Sin.\angle BFC} = n.\frac{Sin.(x+a)}{Sin.x}$$

Voorts KI $=$ FC. $Sin.\angle$ FCI $=$ FC. $Sin.\angle$ BFC $=$ FC. $Sin.x = n\ Sin.(x+a)$, en KG $=$ AD. $Sin.\angle$ DAG $= m\ Sin.x$ zijnde, heeft men, om dat KI $=$ KG zijn moet,

$$m\ Sin.x = n\ Sin.(x+a)$$

$$= n\ Sin.x\ Cos.a + n\ Cos.x\ Sin.a$$

$$(m - n\ Cos.a)\ Sin.x = n\ Cos.x\ Sin.a$$

$$\text{waaruit volgt } Tang.x = \frac{n\ Sin.a}{m - n\ Cos.a}$$

Deze formule levert voor den hoek DAG $= x$ maar eene waarde op, terwijl echter de lijn AG, ten opzigte van AD, ten minste zes verschillende stellingen hebben kan, zoo als uit de bovenstaande de oplossing gebleken is.

Wanneer men FC berekent, zal men, door de vergelijkingen FC $= n \frac{Sin.(x + a)}{Sin.x}$ en ... $m Sin.x = n\ Sin.(x + a)$, vinden: FC $= m$ en niet FC $= \pm m$, terwijl echter FC (*Fig.* 137 en 138), op de loodlijn CE, ter wederzijden van het punt C genomen kan worden, blijkens het geen hier voren bewezen is.

Wanneer de punten A, B, C en D, zelve een vierkant vormen, is het Voorstel geheel onbepaald, dat is: AG (*Fig.* 137.) kan getrokken worden met eenen hoek DAG naar welgevallen; de vergelijking $Tang.x = \frac{n\ Sin.a}{m - n\ Cos.a}$ geeft echter in dit geval voor den hoek DAG de bepaalde waarde van 45 graden; want $a = 90°$ en $m = n$ zijnde, zoo heeft men $Tang.x = 1$ en $x = 45$ graden.

Dit Voorstel is niet alleen onbepaald, wanneer ABCD een vierkant is, maar ook wanneer AD $=$ BC is en deze lijnen loodregt op elkander staan, als in Figuur 143; want trek AG naar welgevallen, DK evenwijdig aan dezelve, en CI en BK loodregt op dezelve, dan zal GHIK altijd een vierkant zijn; want vermits de hoeken in E en G regt zijn, zoo is, uit de beschouwing der driehoeken BGR en AER, ∠ RBG $=$ ∠ RAE; voorts HG $=$ BC $Sin.$∠ RBG en HI $=$ AD $Sin.$∠ RAE; dus HG $=$ HI; derhalve GHIK een vierkant.

De vergelijking $Tang.x = \frac{n\ Sin.a}{m - n\ Cos.a}$, leert ons echter in dit geval niets anders, dan

dan

dat de lijn AG op AD moet vallen; want als men overeenkomstig de veronderstelling, $m = n$ en $\alpha = 180$ stelt, verkrijgt men *Tang*. $x = 0$, dat is $x = \angle$ DAG $= 0$ of 180 graden.

Dit Voorstel behelst mijns dunkens, vele zonderlinge omstandigheden, die wel eens opzettelijk verdienden onderzocht en verklaard te worden.

Anders door *J. R. Schmidt* en *R. Lobatto.*

§. 1. Laten A, B, C en D (*Fig.* 144.) de gegevene punten, en PQRS het begeerde quadraat zijn. Dan moeten de hoeken P, Q en R om dat zij regt zijn in de cirkels liggen, welke op AB, AD en BC beschreven zijn, en het Voorstel komt dus eigenlijk hierop neder „ om tusschen die gegeven „ cirkels, PQ en RP zoodanig door A en B te „ trekken, dat PQ = PR zij."

§. 2. Laat nu door *B* eenige andere willekeurige lijn P′R′ getrokken worden en uit P′ door A eene lijn P′Q′ = P′R′; wanneer dan alle andere lijnen, die in *Fig.* 144. zijn aangewezen, getrokken worden, is $\angle$ BR′V = $\angle$ BRV en $\angle$ BP′V = $\angle$ BPV, omdat zij in dezelfde cirkelsegmenten liggen, waaruit dan volgt, dat de driehoeken VR′P′ en VRP gelijkvormig zijn, en dus VP : PR = VP′ : P′R′ is.

Maar PR = PQ en P′R′ = P′Q′ zijnde, is dan ook VP : PQ = VP′ : P′Q′ en wijl daarenboven de ingeslotene hoeken VPQ en VP′Q′, als in het zelfde cirkelsegment liggende, gelijk zijn, zijn ook de driehoeken VPQ en VP′Q′ gelijkvormig en dus $\angle$ PQV = $\angle$ P′Q′V, dat is $\angle$ AQV = $\angle$ AQ′V; waaruit volgt, dat de meetkundige plaats van het punt Q een cirkel is, die door de punten A en V gaat. Het punt Q, waarin deze cirkel den cirkel op AD snijd, zal alzoo een hoekpunt van het begeerde quadraat zijn, en dit gevonden heb-

hebbende, is het geheele quadraat bepaald. Wij moeten hierbij opmerken dat deze oplossing slechts één antwoord geeft, omdat de gevondene cirkel door A gaande, dat een punt van den cirkel op AD is, dien cirkel op AD nog slechts in één ander punt kan snijden.

§. 3. Wij kunnen ondertusschen uit ieder punt P′ twee perpendiculairen P′Q′ op P′R′ stellen, welke gelijk aan P′R′ zijn; zoo wij dan alle de perpendiculairen PQ, P′Q′ enz. naar den anderen kant stellen, zal de plaats van het punt Q een anderen cirkel zijn, welke door A en V gaat; en waarvan het snijpunt met den cirkel op AD eene tweede oplossing zal geven; het is nu duidelijk, dat gene dezer twee oplossingen, in eenig geval onmogelijk kan worden, omdat deze gevondene cirkels, door het punt A gaande, dat een *punt van* den cirkel op AD is, dien cirkel op AD noodzakelijk nog in een ander punt moeten *snijden*.

§. 4. Uit het geen gezegd is volgt *dan deze* eenvoudige Constructie.

1°. Laat (*Fig.* 145.) C*r* perp. op AB getrokken worden, en door A, *qq′* perp. op AB getrokken hebbende, A*q* = A*q′* = A*r* genomen worden, dan zijn *q* en *q′* punten *van de gezochte* cirkels, waarin Q moet liggen.

2°. Wanneer dan door *q*, A en V en door *q′*, A en V cirkels getogen worden, zullen de punten Q en Q′, waarin deze cirkels den cirkel op AD snijden, de begeerde hoekpunten zijn, en hierdoor zullen wij de quadraten QPRS en Q′P′R′S′ verkrijgen.

§. 5. Bij deze oplossing is stilzwijgend ondersteld, dat de lijnen door A en C gaande, parallel moeten zijn, en dit gaf ons twee oplossingen. Maar wij kunnen even eens onderstellen dat de *lijnen* door A en D, of dat de lijnen door A *en* B gaande, parallel moeten zijn; iedere onderstelling zal ons weder twee oplossingen verschaffen, en

daar

daar wij reeds aangemerkt hebben, daar gene dezer oplossingen ooit onmogelijk kan worden, volgt hieruit, dat ons Voorstel altoos zes onderscheidene oplossingen toelaat.

§. 6. Van het bestaan dezer zes oplossingen kunnen wij ons ook aldus overtuigen. Bij onze oplossing hebben wij AB gecombineerd met AD en BC, maar wij kunnen even eens AB met AC en BD combineren (*Fig.* 146.) en zoo wij hierop onze Constructie toepassen, zullen wij twee oplossingen verkrijgen, waar bij de lijnen door A en D parallel zijn, en wij bekomen dus vier oplossingen door middel van AB als de middelste der drie lijnen te beschouwen. Dit nu kan even zoo goed op ieder der zes lijnen, die A, B, C en D vereenigen, als op de lijn AB worden toegepast, en wij bekomen dus 4 . 6 dat is 24 oplossingen. Maar nu moet vooral opgemerkt worden, dat wij op deze wijze alle de hoekpunten der quadraten in het bijzonder construeren, en alzoo ieder der quadraten viermaal bekomen, waaruit volgt, dat er in het geheel $\frac{24}{4}$, dat is 6 verschillende oplossingen zullen zijn, welke in *Fig.* 147. alle zijn aangewezen.

§. 7. Aanmerking. — Wanneer de ligging der gegevene punten zoodanig is, dat het middelpunt M (*Fig.* 144.) des cirkels, welke de plaats van het punt Q is, in het middelpunt U van den cirkel op AD valt, dan liggen die cirkels geheel op elkander: en wijl het punt, waarin die cirkels elkander snijden, eene oplossing geeft, zal in dit geval ieder punt van den cirkel op AD aan de vraag voldoen, en er zal dus als dan een oneindig getal antwoorden zijn. Zie hier een paar gevallen, waarin deze omstandigheid plaats heeft.

§. 8. 1°. Wanneer de vier punten A, B, C en D zelve een quadraat vormen. — In dit geval

val (*Fig*. 148.) geeft onze Conſtructie twee quadraten AQBP en DQCS, waarbij de lijnen door A en D parallel zijn; twee quadraten AQDR en BQCT, waarbij de lijnen door A en B parallel loopen, maar een oneindig aantal, waarbij de lijnen door A en C parallel zijn. Want pasſen wij hierop onze Conſtructie toe, dan valt (*Fig*. 149.) *r* in B en *q* in D, en daar de cirkel op AD zelve door V gaat, valt *M in U*. Ieder punt van den cirkel op AD kan dus voor het punt Q genomen worden, en wij verkrijgen alzoo een oneindig getal quadraten, waarvan er in de Figuur ſlechts een paar zijn aangewezen, en waartoe niet alleen het quadraat ABCD *zelve*, maar ook het enkele punt V behoort, hetgeen in dit geval mede een oplosſing is. Wij *merken* hier nog bij aan, dat de tweede oplosſing, dat is de cirkel, die door *q'*, A en V gaat, hier niets anders, dan dit quadraat ABCD, *en het punt* V aanwijst.

§. 9. Deze omſtandigheid heeft 2°. ook altoos plaats, wanneer een der lijnen DB, die twee der punten vereenigt, of derzelver verlengde, perp. is op het midden der lijn AC, *die de* twee anderen punten vereenigt, en dat daarbij BD = AC is. (*Fig*. 150 en 151.) Er zijn in dit geval weder twee oplosſingen *pqrs* en PQRS, waarbij de lijnen door D en A; en twee quadraten *p'q'r's'* en P'Q'R'S', waarbij de lijnen door D en C parallel zijn. Er zijn ondertusſchen oneindig veel quadraten, waarbij de lijnen door B en D parallel zijn; want zoo wij, om deze te vinden, (*Fig*. 151.) C*r* perp. BA maaken, en A*q* = A*r* perp. op BA ſtellen, vallen *q* en V beide in den cirkel op AD, waaruit volgt, dat M weder in U valt. Wij hebben aan de eene zijde eenige van die quadraten, waartoe ook het punt V behoort, in *Fig*. 151. geteekend, en het is duidelijk, dat het voorige geval in dit is opgeſloten.

§. 10.

§. 10. Wanneer de vier gegevene punten alle op eene regte lijn liggen, en wel op gelijken afstand van elkander, neemt de Figuur (*Fig.* 152) eene zeer regelmatige gedaante aan; bij de quadraten PQRS en P′Q′R′S zijn de lijnen, die door A en C gaan parallel, de lijnen, die door A en D gaan, zijn parallel in de quadraten PQ′R′S′ en P′QR″S″, en het zijn de quadraten *pqrs* en *p′q′r′s*, waarbij de lijnen, door A en B gaande, parallel zijn.

§. 11. Er heeft nog een merkwaardig geval plaats, wanneer de punten A, B en C (*Fig.* 153) eenen gelijkzijdigen driehoek vormen, en het vierde punt D in het punt ligt, waar de drie perpendiculairen elkander snijden. In dit geval onze Constructie volgende, zullen wij de drie punten S, T en U verkrijgen, welke als quadraten moeten worden aangemerkt, en er zullen buiten deze drie punten gene andere oplossingen mogelijk zijn, wijl ieder van die punten twee oplossingen in zich vereenigd: dit zal nog duidelijker worden, wanneer wij de drie paar quadraatjes van *Fig.* 154. beschouwen, welke de zes oplossingen van die Figuur uitmaken. Deze zullen meer en meer tot elkander naderen, naarmate de Figuur meer tot die van *Fig.* 153. nadert, tot dat eindelijk, wanneer *Fig.* 154. in *Fig.* 153. overgaat, ieder paar quadraatjes zich in een enkel punt vereenigt. Op dezelfde wijze zullen alle de oneindige quadraaten van *Fig.* 151. zich in het enkelde punt V vereenigen, zoodra BD groter of kleiner dan AC wordt, en in het algemeen zal de omstandigheid, waarin twee quadraten zich in een punt vereenigen, plaats hebben in het geval, waarin een der lijnen, die twee der gegevene punten vereenigt, perp. is op de lijn, die de twee andere gegevene punten te zamen voegt.

§. 12. De eenige zwarigheid welke misschien

nog zou kunnen overblijven, bestaat hierin, hoe men de lijnen, die de gegevene punten vereenigen, moet combineren, om niet tweemaal eenzelfde quadraat te vinden? deze zwarigheid is van te weinig aanbelang om er lang bij stil te blijven staan, het zal bij de minst aandagtige beschouwing van onze oplossing blijken, dat drie der lijnen van *Fig.* 155. combineerende, de lijnen door A en D en de lijnen door B en C parallel zullen zijn. Dat drie der lijnen van *Fig.* 156. gecombineerd, de oplossingen geven, waarbij de lijnen door A en C en door B en D parallel zijn, en dat de combinatie van drie lijnen uit *Fig.* 157. de antwoorden geeft, waarbij de lijnen door A en B gaande, en de lijnen door C en D gaande, parallel zijn.

N°. 173. Door

O. S. Bangma.

Laten FE en GD (*Fig.* 158.) de deellijnen zijn, elkander in H snijdende; zoo dat HFGH, HGBE, HECD, en HDAF, de vier gelijke deelen van den driehoek ABC zijn. Stel $AG = x$, $BF = y$, $AD = u$, $BE = z$ en $FG = m$; voorts $BC = a$, $AC = b$ en $AB = c$; dan heeft men door deze stellingen alleen, de vergelijking

$$x + y = m + c \; \ldots \ldots \ldots (1)$$

Verder is volgens DE GELDER (*Beg. der Meetk.* §. 625.)

$$\Delta FHG = \tfrac{1}{2} m^2 . \frac{Sin.F \times Sin.G}{Sin.(F + G)} = \tfrac{1}{4} \Delta ABC$$

Maar (*Beg. der Meetk.* §. 6[illegible]), uit de beschouwing van den driehoek ADG, $Cot.G = \frac{x - u\,Cos.A}{u\,Sin.A}$, en uit de beschouwing van den driehoek BEF, $Cot.F = \frac{y - z\,Cos.B}{z\,Sin.B}$; dus

Cot.

$Cot.G + Cot.F = \frac{x}{u\,Sin.A} + \frac{y}{z\,Sin.B} - Cot.A - Cot.B$

maar $Cot.G + Cot.F = \frac{Cos.G}{Sin.G} + \frac{Cos.F}{Sin.F} =$
$\frac{Sin.F.Cos.G + Cos.F.Sin.G}{Sin.F.Sin.G} = \frac{Sin.(F+G)}{Sin.F\,Sin.G}$,
en op gelijke wijze $Cot.A + Cot.B = \frac{Sin.(A+B)}{Sin.A.Sin.B}$;
dus $\frac{Sin.(F+G)}{Sin.F.Sin.G} = \frac{x}{u\,Sin.A} + \frac{y}{z\,Sin.B} -$
$\frac{Sin.(A+B)}{Sin.A.Sin.B}$; multipliceert men hier mede de boven gevondene vergelijking $m^2 \frac{Sin.F.Sin.G}{Sin.(F+G)} =$
$\frac{1}{2} \triangle ABC$, zoo heeft men

$$m^2 = \left(\frac{x}{u\,Sin.A} + \frac{y}{z\,Sin.B} - \frac{Sin.A\,Sin.B}{Sin.(A+B)}\right) \times \tfrac{1}{2} \triangle ABC$$

maar $Sin.(A+B) = Sin.C$ en $\triangle ABC = \frac{1}{2} ab\, Sin.C$, dus

$$m^2 = \left(\frac{x\,Sin.C}{u\,Sin.A} + \frac{y\,Sin.C}{z\,Sin.B} - \frac{Sin.C^2}{Sin.A\,Sin.B}\right) \times \tfrac{1}{4} ab$$

maar $\frac{Sin.C}{Sin.A} = \frac{c}{a}$ en $\frac{Sin.C}{Sin.B} = \frac{c}{b}$, waar uit volgt,

$$m^2 = \left(\frac{xc}{ua} + \frac{yc}{zb} - \frac{c^2}{ab}\right) \times \tfrac{1}{4} ab$$

of $4\,m^2 = \left(\frac{bcx}{u} + \frac{acy}{z} - c^2\right)$.........(2)

Daar verder $\triangle$ DAG de helft is van $\triangle$ ABC, zoo heeft men $\triangle DAG : \triangle ABC = AD \times AG : AC \times AB = xu ; bc = 1 : 2$, dus $bc = 2 \times xu$, en $\frac{bc}{u} = 2x$. Op gelijke wijze uit de driehoeken EBF en CBA, $\frac{ac}{z} = 2y$; deze waarden

 van

van $\frac{ac}{z}$ en $\frac{bc}{u}$ in de vergelijking (2) brengende, verkrijgt men $4m^2 = 2x^2 + 2y^2 - c^2$, dus $2x^2 + 2y^2 = 4m^2 + c^2$; maar volgens vergelijking (1) is $x + y = m + c$, dus $x^2 + 2xy + y^2 = m^2 + 2mc + c^2$, en deze aftrekkende van $2x^2 + 2y^2 = 4m^2 + c^2$, komt $x^2 - 2xy + y^2 = 3m^2 - 2mc$, dus $x - y = \surd(3m - 2c)m$; waar uit blijkt dat m op zijn kleinst gelijk $\frac{2}{3}c$ zijn kan; stellende dan $m = \frac{2}{3}c$, zoo wordt $x = y$; dus $2x = m + c = 1\frac{2}{3}c$; dus $x = y = \frac{5}{6}c$; derhalve AF = BG = $\frac{1}{6}$AB. Om u en z te bepalen, hebben wij (zie boven), $bc = 2xu$ en $ac = 2zy$, dus $bc = \frac{5}{3}cu$ en $ac = \frac{5}{3}cz$, waar door $u = \frac{3}{5}b$ en $z = \frac{3}{5}a$. Hier uit volgt deze eenvoudige *constructie: maak* AF = BG = $\frac{1}{6}$AB, AD = $\frac{3}{5}$AC en BE = $\frac{3}{5}$BC, dan zullen FE en GD den voorgestelden driehoek ABC in vier gelijke deelen verdeelen, *terwijl de punten* F *en* G *tevens zoo digt bij elkander genomen zijn als mogelijk is.*

N°. 174. Door

J. R. Schmidt en *R. Lobatto.*

Laten de algemeene termen der vier gevraagde reeksen gesteld worden $a + bx$; $a' + b'x$; $a'' + b''x$; en $a''' + b'''x$; dan zullen de algemeene termen der vier andere reeksen, welke er ingevolge de oplossing voortkomen, zijn:

(α) $a + a' - a'' + (b + b' - b'')x$
(β) $a' + a'' - a''' + (b' + b'' - b''')x$
(γ) $a'' + a''' - a + (b'' + b''' - b)x$
(δ) $a''' + a - a' + (b''' + b - b')x$

en het product van deze vier Formulen zal dan gelijk moeten zijn, aan den algemeenen term van de reeks 0, 4, 25, 84, 210, 440 enz. gemult. met 24.

Om

Om nu dezen algemeenen term te vinden, nemen wij de achtervolgende verschillen, en vinden:

reeks	0,	4,	25,	84,	210,	440 enz.
1e verschillen . .		4,	21,	59,	126,	230 enz.
2e			17,	38,	67,	104 enz.
3e				21,	29,	37 enz.
4e					8,	8 enz.

waaruit voor de algemeene term wordt gevonden (*zie* DE GELDER 2e *Curs.*)

$$0 + 4(x-1) + 17\frac{(x-1)(x-2)}{2} + \ldots 21\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{2\cdot3} + \ldots 8\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{2\cdot3\cdot4}$$

dit volgens de magten van x gerangschikt, en met 24 gemultipliceerd, geeft ons derhalven

$$(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta) = 8x - 20x^2 + 4x^3 + 8x^4$$

en schrijvende het laatste lid in hare factoren.

$$(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta) = 4x(-1+x)(2+x)(-1+2x)$$

daar nu (α); (β); (γ): en (δ) alle van den vorm $(p+qx)$ zijn, stellen wij

(α) of $(a+a'-a'')+(b+b'-b'')x = (-1+x)$
(β) of $(a'+a''-a''')+(b'+b''-b''')x = (2+x)$
(γ) of $(a''+a'''-a)+(b''+b'''-b)x = 4x$
(δ) of $(a'''+a-a')+(b'''+b-b')x = (-1+2x)$

de som dezer vier vergelijkingen is

$$(\alpha)+(\beta)+(\gamma)+(\delta)$$

of $(a+a'+a''+a''')+(b+b'+b''+b''')x = 8x$ (E)

maar nu is ook

$$(\alpha) - 2(\beta) + 2(\gamma) \text{ of}$$
$$(-a-a'-a''+4a''')+(-b-b'-b''+4b''')x = -5+7x$$
$$(\beta) - 2(\gamma) + 2(\delta) \text{ of}$$
$$(4a-a'-a''-a''')+(4b-b'-b''-b''')x = -3x$$
$$(\gamma) - 2(\delta) + 2(\alpha) \text{ of}$$
$$(-a+4a'-a''-a''')+(-b+4b'-b''-b''')x = 2x$$
$$(\delta) - 2(\alpha) + 2(\beta) \text{ of}$$
$$(-a-a'+4a''-a''')+(-b-b'+4b''-b''')x = 5+2x$$

de laatste vier vergelijkingen ieder in het bijzonder opgeteld bij (E) komt er

$$\left.\begin{aligned} 5a + 5bx &= 5x \\ 5a' + 5b'x &= 10x \\ 5a'' + 5b''x &= 5 + 10x \\ 5a''' + 5b'''x &= -5 + 15x \end{aligned}\right\} \text{ dus } \left\{\begin{aligned} a + bx &= x \\ a' + b'x &= 2x \\ a'' + b''x &= 1 + 2x \\ a''' + b'''x &= -1 + 3x \end{aligned}\right.$$

hetwelk de algemeene termen der gevraagde reeksen zijn, en bij gevolg zijn de reeksen

1 .	2 .	3 .	4 .	5	enz. alg. term	x
2 .	4 .	6 .	8 .	10	enz. . .	$2x$
3 .	5 .	7 .	9 .	11	enz. .	$1+2x$
2 .	5 .	8 .	11 .	14	enz.	$-1+3x$

AANMERKING. — Dit Voorstel behoort eigenlijk tot de onbepaalde Voorstellen, en men kan voor het zelve zoo veel antwoorden vinden als men wil. Want wij hebben slechts de vergelijking

$$(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta) = 4x(-1+x)(2+x)(-1+2x)$$

en kunnen dus voor (α); (β); (γ): en (δ) die factoren neemen wel wij verkiezen, zoo wij slechts zorgen dat zij allen van den vorm $(p + qx)$ zijn, en dat hun product het tweede lid voortbrengt: zoo kunnen wij bij voorbeeld $(\alpha) = 2nx$; $(\beta) = 2m(-1+x)$; $(\gamma) = \frac{2+x}{n}$ en $(\delta) = \frac{-1+2x}{m}$ nemen, waarin m en n alle mogelijke geheelen en gebroken getallen verbeelden, en wij zullen op dezelfde wijze als boven handelende, voor ieder geval vier reeksen verkrijgen, welke aan de vraag voldoen.

N°. 175.

N°. 175. Door

J. R. SCHMIDT en *R. Lobatto.*

Stellen wij de algemeene termen onzer drie gevraagde arithmetische reeksen P; Q en R te zijn, dan zijn de algemeene termen, die naarleiding van de opgaaf tot de reeksen behooren, die uit deze eerste, door vermenigvuldiging gevonden worden, PQ; QR en PR; en de algemeene termen der reeksen, die door de additie van deze laatsten twee aan twee ontstaan, zijn bijgevolg PQ + QR; QR + RP; en RP + PQ; of wel Q (P + R); R (Q + P) en P. (R + Q): het vermenigvuldigde van deze drie, dat is PQR (P + Q) (Q + R) (R + P) moet dus gelijk zijn aan den algemeenen term van de reeks 3240; — 480, enz., welke in de opgave van het voorstel is opgegeven.

Om dan de algemeene term der reeks te vinden, nemen wij de achtervolgende verschillen, en wij hebben

de reeks	3240 :	— 480 :	864 :	0 :	— 3000 :	0 :	0 :	— 80256	enz.
de 1e verf.		— 3720 :	1344 :	— 864 :	— 3000 :	3000 :	0 :	— 80256	enz.
2e verf.			5064 :	— 2208 :	— 2136 :	6000 :	— 3000 :	— 80256	enz.
3e verf.				— 7272 :	72 :	8136 :	— 9000 :	— 77256	enz.
4e verf.					7344 :	8064 :	— 17136 :	— 68256	enz.
5e verf.						720 :	— 25200 :	— 51120	enz.
6e verf.							— 25920 :	— 25920	enz.

en de algemeene term is bijgevolg (*zie* DE GELDER 2e *Curf.*)

$$3240 - 3720\,(x-1) + 5064\,.\,\frac{(x-1)(x-2)}{2} - 7272\,\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{2\,.\,3}$$

$$\ldots\ldots + 7344\,.\,\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-4)}{2\,.\,3\,.\,4} + 720\,\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-5)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots - 25920\,.\,\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-6)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}$$

en wanneer wij dit volgens de magten van x ontwikkelen, hebben wij bijgevolg

$$PQR(P+Q)(Q+R)(R+P) = 25200\,x - 39300\,x^2 + 22698\,x^3 - 6084\,x^4 + 762\,x^5 - 36\,x^6.$$

of het laatste lid in deszelfs factooren oplossende

$$PQR\,(P+Q)(Q+R)(R+P) = 6\,x\,(7-x)(6-x)(5-2x)(4-x)(6-3x)$$

het eerste lid der vergelijking bestaat uit zes factooren (welke alle van den vorm $p + qx$ zijn) waarvan de drie eerste, de algemeene termen der gezochte reeksen, en de drie anderen hunne sommen twee aan twee zijn. Wij moeten dus beproeven of wij onder de factooren van het tweede lid, er drie kunnen vinden, zoodanig dat hunne sommen twee aan twee, de drie overige geven, na eenige kleine beproevingen, vinden wij dat, schrijvende dit laatste lid aldus:

$$x(-5+2x)(12-3x)\times(-5+3x)(12-2x)(7-x)$$

de drie laatste factooren juist de sommen der drie eerste zijn, en wij hebben dus voor de algemeene termen onzer reeksen,

$$P = x,\ Q = -5 + 2x,\ R = 12 - 3x$$

zoo dat de reeksen zelve zijn:

1 .	2 .	3 .	4 .	5 .	6 .	enz.	alg. term x
-3 .	-1 .	1 .	3 .	5 .	7 .	enz.	$-5+2x$
9 .	6 .	3 .	0 .	-3 .	-6 .	enz.	$12-3x$

N°. 176. Door

J. R. SCHMIDT en *R. Lobatto.*

Om den n^{den} term en de som van n termen van de eerste reeks te vinden, vinden wij, even als bij de oplossing der voorgaande voorstellen,

reeks	2 .	7 .	11 .	17 .	28 .	enz.
1ste vers.		5 .	4 .	6 .	11 .	enz.
2de vers.			-1 ,	2 .	5 .	enz.
3de vers.				3 .	3 .	enz.

dus de n^{de} term : $2 + 5(n-1) - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

$\ldots\ldots + 3 \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}$

de som van n termen : $2n + 5 \cdot \frac{n(n-1)}{2} - \ldots\ldots$

$\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} + 3 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$

voor de tweede reeks hebben wij op dezelfde wijze;

reeks	3	5	6	7	9	enz.
1ste verſch.		2	1	1	2	enz.
2de verſch.			— 1	0	1	enz.
3de verſch.				1	1	enz.

dus de m^{de} term: $3 + 2(m-1) - \frac{(m-1)(m-1)}{2}$

$\ldots\ldots + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2 . 3}$.

de ſom van m termen: $3m + 2 . \frac{m(m-1)}{2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2 . 3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 . 3 . 4}$

en wij hebben alzoo, naar aanleiding van het Voorſtel, de twee volgende vergelijkingen:

1°. $22 + 5(n-1) - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \ldots 3 . \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 . 3} = 3m + 2 . \frac{m(m-1)}{2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2 . 3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 . 3 . 4}$

2°. $2(n-1) + 5 . \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 . 3} + 3 . \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 . 3 . 4} = 36 + \ldots 18(n-2) - 9 . \frac{(n-2)(n-3)}{2} + \ldots\ldots 9 . \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{2 . 3}$.

of alles in magten van m en n geſchreven:

1°. $12(n^3 - 7n^2 + 24n + 26) = \ldots m^4 - 10m^3 + 47m^2 + 34m$

2°. $3n^4 - 70n^3 + 621n^2 - 2234n + 1680 = 0$

uit de laatſte is $n = 8$ een wortel; deze waar-

de

de van n in de eerste overbrengende, wordt dezelve

$$m^4 - 10m^3 + 47m^2 + 34m - 3384 = 0$$

waaruit $m = 9$, en dus zijn de beide getallen gevonden.

Aanmerking. Wij hebben hier niets anders dan de wortels in geheele getallen opgegeven; eigenlijk gezegd kunnen er 16 oplossingen plaats hebben; want de eerste vergelijking geeft voor n vier waarden, namelijk 8, 1, en twee imaginaire waarden; deze een voor een in de tweede vergelijking overgebragt zijnde, heeft de vergelijking in m voor elk geval vier wortels, en er kunnen dus 16 oplossingen plaats hebben. Wij hebben dezelve echter niet opgegeven, om dat zij alle of imaginaire of irrationnale getallen opleveren.

N°. 177. Door

Abraham Fock, *N. Bondt*, en *P. van Eeghen Chz.*

Het verschil in lengte tusschen de plaatsen A en B, 212° 10′ en dus ook 360° — (212° 10′) = 147° 50′ zijnde, terwijl de afstand van elk dezer plaatsen tot de naaste pool 90° — (52° 22′) = 37° 38′ is, zoo is de afstand van deze plaatsen de basis van eenen gelijkbeenigen klootschen driehoek, waar van de beenen ieder 37° 38′ zijn en de tophoek 147° 50′.

dus *Sin*. ½ afst. = *Sin*. ½ Toph. × *Sin*. (37° 38′)
= .96086 × .610606
= .5867069 = *Sin*. 35° 55′½
                                   2
                      71° 51°
                      60
                      4311
                    4
dus de is de afstand = 1077¾ mijl.

 N°. 178.

No. 178. Door

J. R. SCHMIDT.

Aannemende dat de zonsweg eene bepaalde cirkel op den aardbol is (zoo als zulks bij voorbeeld op alle de aardgloben plaats heeft) hebben wij de volgende oplossing.

Laat FG (*Fig.* 158.) de *evenagtscirkel* en HI de zonsweg zijn, laaten verder P de pool en A en B de gegevene plaatsen verbeelden, dan zijn EC en AC benevens ED en DB gegeven, en bovendien is de hoek HEF, welke de zonsweg met de evenagtscirkel maakt bekend: wij *zullen* dus moeten aantoonen, hoe door middel van deze gegevens de punten *L* en *K* benevens *L′ en* K′ kunnen bepaald worden.

Ten eerste is in den driehoek PAB *bekend*, PA = compl. AC; PB = *compl. van BD*, en ∠ APB = *CD* = *ED* — EC, en hierdoor kan ∠ A berekend worden.

Verder is hierdoor in den driehoek LAC bekend, de regte hoek C, de hoek A en de zijde AC, waardoor de hoek L benevens de *zijde* LC gevonden wordt, trekken wij hier af de gegevene EC, dan blijf er LE, en hierdoor is dus het punt L en bijgevolg ook L′ bepaald.

Eindelijk hebben wij in den driehoek LKE, de zijde LE benevens de hoeken L en E bekend, waardoor EK berekend wordt en dus de punten K en K′ gevonden worden.

No. 179. Door

O. S. BANGMA.

De gezigteinders van twee plaatsen snijden elkander in twee punten; ieder van deze punten staat 90 graden van het toppunt van elke plaats

en

en is bijgevolg de pool van den boog, die de beide plaatsen vereenigt; voorts is het verschil in lengte tusschen de beide plaatsen gelijk aan het verschil der regte opklimmingen van hare toppunten, en de breedte van elke plaats gelijk aan de declinatie van het toppunt dezer plaats. Wanneer nu de regte opklimming van een der toppunten voor een zeker tijdstip gegeven is, zal men aan den hemel de plaatsen van de snijpunten der beide gezigteinders op de volgende wijze kunnen bepalen. Laten A en B (*Fig.* 159.) de toppunten zijn van twee plaatsen *a* en *b* op de aarde, C en D de snijpunten van de gezigteinders dezer plaatsen en P de pool; dan zijn AP en BP bekend door de breedten van *a* en *b*, en ∠ APB door de lengten van *a* en *b*, dus kan, uit den driehoek PAB, de hoek PAB berekend worden; hier aftrekkende ∠ DAB = 90 graden (omdat D de pool van AB is), zoo heeft men den hoek PAD; maar AD = 90 graden zijnde, zoo kan uit den driehoek PAD, de zijde PD en ∠ APD berekend worden, zijnde PD het complement van de declinatie van het punt D en ∠ APD het verschil in regte opklimming tusschen de punten A en D, waardoor dus de plaats van het punt D bepaald is; maar PD verlengende, zal dezelve door het punt C gaan; dus is PC = 180° − PD en ∠ APC = 180° − ∠ APD, waardoor ook de plaats van het punt C bepaald is.

N°. 180. Door

R. Lobatto, *Mozes Lemans*, *P. van Eeghen Chz.*, *N. Bondt*, *Jan Pauw*, en *A. van der Swan*.

Volgens opgave is (*Fig.* 160), BE — BD = AB + BC — BE, of 2 BE = BD + AB + BC. Vermits nu de lijnen BD, AB en BC, rekenkundig

dig evenredig zijn, verandert de vergelijking in de volgende: 2 × BE = 3 × AB; deze met BD vermenigvuldigende, komt 2 × BE × BD = 3 × AB × BD; dat is 2 AB × BC = 3 AB × BD (VAN SWINDEN *pag.* 222), of 2.BC = 3.BD en 2 (BD + 4) = 3 × BD, waaruit BD = 8; dus AB = 10, BC = 12 en BE = 15.

N°. 181. Door

A. van der Swan, R. LOBATTO, *P. van Eeghen Chz.*, *Mozes Lemans*, *N. Bondt*, en *J. B. Cantor*.

Daar *ah* (*Fig.* 161) = *hi* = *ai* is, volgens onderstelling, zoo is ook *dh* = *bi*. Men stelle de zijde des vierkants = *a* en *dh* = *bi* = *x*; dan is *hc* = *ci* = *a* — *x* en dus $2(a - x)^2 = hi^2 = ab^2 + bi^2 = a^2 + x^2$, waaruit verder volgt:

$$2a^2 - 4ax + 2x^2 = a^2 + x^2$$
$$x^2 - 4ax + 4a^2 = 3a^2$$
$$\text{dus } x - 2a = \pm a\sqrt{3} \text{ en } x = 2a \pm a\sqrt{3}\ .$$

Hieruit volgt deze Constructie:

Beschrijf uit C, met den radius *cd*, den boog *db*, en uit *d* en *b*, met denzelfden radius, twee bogen, welke den boog *db* zullen snijden in *g* en *f*; trek voorts uit *a* door *g* en *f*, de lijnen *ai* en *ah*, als ook *hi*; dan zal *ahi* de begeerde driehoek zijn: want de loodlijn van den gelijkzijdigen driehoek *dgc* is $\frac{1}{2}\sqrt{3a^2}$, dus $gp = a - \frac{1}{2}\sqrt{3a^2}$ en $2gp = bi = x = 2a - \sqrt{3a^2}$.

NB. In dit Voorstel staat *des driehoeks*: moet zijn *des vierkants*; dewijl anders het Voorstel onverstaanbaar is.

N°. 182. Door

R. LOBATTO, *Jan Pauw*, *N. Bondt*, *P. van Eeghen Chz.*, *H F. Fynje*, *Mofes Lemans*, en *A. van der Swan*.

Daar ∠ BEC = 112° 37′ 11″,95 is, is ∠ BEA + ∠ CED = 180° — 112° 37′ 11″,95 = 67° 22′ 48″,05; maar ∠ BEA = ∠ CED, dus ieder van deze hoeken 33° 41′ 24″,025. Wijders is

ED : CD = *Rad* : *Taug* . ∠ CED
en AE : AB = *Rad* : *Tang* . ∠ BEA
dus AE — ED : AB — CD = *Rad* : *Tang* . ∠ BEA

$$\text{dus } AE - ED = \frac{AB - CD}{Tang.\,BEA} = (AB - CD)\,Cot.\,BEA$$
$$= 100 : Tang.\ 33^\circ 41' 24'',025$$
$$= 150$$
$$\tfrac{1}{2}(AE - ED) = 75$$
$$\tfrac{1}{2}(AE + ED) = 525$$
dus AE = 600 en ED = 450

Om wijders AB en DC te vinden, heeft men deze evenredigheid : AE : ED = AB : DC of AE — ED : AE = AB — DC : AB en AE — ED : ED = AB — DC : DC; hierdoor wordt gevonden AB = 400 en DC = 300.

N°. 183. Door

J. R. SCHMIDT.

Dit Voorftel ftaat met het 98e van dit deel in zulk een naauw verband, dat het genoeg zal zijn dit verband te hebben aangewezen, om de oplosfing van ons voorftel uit die van het 98e afteleiden.

Laten dan *Fig.* 88. de zijden AB, BC en AC door *p*, *q* en *r* worden aangetoond. Zoo wij dan de middellijn des omgefchreven cirkels, als gegeven

ven zijnde, a noemen; de radius des ingeschreven cirkels y noemen en den afstand der middelpunten van deze cirkels z stellen, hebben wij in het 7e voorstel 1e deel der wiskunstige oeffeningen bewezen dat wij zullen hebben

$$a = \frac{2pqr}{\sqrt{(p+q+r)(p+q-r)(p-q+r)(-p+q+r)}}$$

$$y = \frac{\sqrt{(p+q+r)(p+q-r)(p-q+r)(-p+q+r)}}{2(p+q+r)}$$

$$\text{en } z = \sqrt{\Big(\frac{p^2q^2r^2}{(p+q+r)(p+q-r)(p-q+r)(-p+q+r)}}$$

$$\ldots\ldots\ldots - \frac{pqr}{p+q+r}\Big)$$

multiplicerende nu de twee eersten, komt $ay = \frac{pqr}{p+q+r}$ en substitüerende deze waarde en die van a in de waarde van z komt er . . . . .

$z = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - ay)}$ of $z = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4ay}$ waaruit blijkt.. „ *Dat de middellijn des omgeschreven cirkels van eenigen driehoek constant zijnde, de afstand der middelpunten van in- en omgeschreven cirkel, een maximum of minimum zal zijn, naarmate de radius des ingeschreven cirkels een minimum of maximum is.*"

Daar nu in het 98e voorstel gebleken is, dat voor onze driehoek de radius des ingeschreven cirkels alleen een maximum is in het geval van $\angle B = 39^\circ 57' 42''73$ waarmede overeenstemt $AB = a \cdot \frac{1}{54}\sqrt{(1174 + 286\sqrt{13})}$, $BC = a \cdot \frac{1}{9}(16 + \sqrt{13})$ en $AC = a \cdot \frac{1}{3}\sqrt{22 - \sqrt{13}}$ (zijnde aldaar in de twee eerste waarden een drukfout ingeslopen); zoo zijn het deze zelfde waarden welke onze afstand der middelpunten een minimum maken, bij welk minimum . . . .
$z = a \cdot \frac{1}{18}\sqrt{3(97 - 26\sqrt{13})}$ is.

De waarde van ϕ of $\angle B = \phi$ welke in het 98e verschil gebleken is de middellijn des inge-

schre-

ſchreven cirkels tot een minimum te maken, doch welke in de ſtrikſten zin op geen driehoek past, omdat de driehoek dan geheel verdwijnt, geeft bij gevolg voor onzen afſtand een maximum waarbij $z = \frac{1}{4}a$ is, en men zal zich het beſtaan van dit maximum en minimum nog duidelijker kunnen voor oogen ſtellen, wanneer men zich de moeite geeft, van de kromme lijn te conſtrueeren, waarin zich het middelpunt des ingeſchreven cirkels in de onderſcheidene ſtanden des driehoeks bevindt.

N°. 184. Door

J. R. Schmidt.

Wijl het verſchil der hoeken A en B (*Fig.* 88) een conſtanten grootheid moet zijn, ſtellen wij $\angle A = \varphi + \alpha$ en $\angle B = \varphi - \alpha$, dan is $\angle C = 180^\circ - 2\varphi$: ſtellen wij dan de middellijn des omgeſchreven cirkels a, dan vinden wij, even als in het 96e voorſtel handelende, $AB = a\ Sin.\ 2\varphi$; $BC = a\ Sin.(\varphi + \alpha)$ en $AC = a\ Sin.(\varphi - \alpha)$.

Stellen wij verder den inhoud x den omtrek y, de radius des ingeſchreven cirkels z, en den afſtand der middelpunten van om en ingeſchreven cirkel v, dan zullen wij hebben

$x = \frac{1}{2}a^2\ Sin.(\varphi + \alpha)\ Sin.(\varphi - \alpha)\ Sin.\ 2\varphi$ . . . . (zie opl. 96e voorſtel)

$y = a\ Sin.(\varphi + \alpha) + Sin.(\varphi - \alpha) + Sin.\ 2\varphi$ . . . . (zie opl. 97e voorſtel)

$$z = a.\frac{Sin.(\varphi + \alpha)\ Sin.(\varphi - \alpha)\ Sin.\ 2\varphi}{Sin.(\varphi + \alpha) + Sin.(\varphi - \alpha) + Sin.\ 2\varphi}$$ . . . . (zie opl. 98e voorſtel)

$v = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - 4az)}$ . . . (zie opl. 183e voorſtel)

Nu is $Sin.(\varphi \pm \alpha) = Sin.\varphi\ Cos.\alpha \pm Cos.\varphi\ Sin.\alpha$;

$Sin.\ 2\varphi = 2\ Sin.\varphi\ Cos.\varphi$

en

en $Sin.(\phi+\alpha).Sin.(\phi-\alpha)=Cos^2.\alpha-Cos^2.\phi$
en bijgevolg

$Sin.(\phi+\alpha)\,Sin.(\phi-\alpha)\,Sin.2\phi= \ldots\ldots$
$\ldots\ldots 2(Cos^2.\alpha-Cos^2.\phi)\,Sin.\phi.Cos.\phi$

$Sin.(\phi+\alpha)+Sin.(\phi-\alpha)+Sin.2\phi= \ldots$
$\ldots\ldots 2(Cos.\phi+Cos.\alpha)\,Sin.\phi$

en $\dfrac{Sin.(\phi\times\alpha)\times Sin.(\phi-\alpha)\times Sin.2\phi}{Sin.(\phi+\alpha)+Sin.(\phi-\alpha)+Sin.2\phi}=$
$\ldots\ldots (Cos.\alpha-Cos.\phi)\,Cos.\phi$

substituerende nu deze uitdrukkingen in de waarden van x, y, z en v, verkrijgen wij

$$x=-a^2(Cos^3.\phi-Cos.\phi.Cos^2.\alpha)\,Sin.\phi$$
$$y=2a(Cos.\phi+Cos.\alpha)\,Sin.\phi$$
$$z=-a(Cos^2.\phi-Cos.\phi\;Cos.\alpha)$$
$$v=\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-4az}$$

en wij moeten nu onderzoeken wanneer ieder dezer formulen in het bijzonder een *maximum* of *minimum* wordt.

I°. Nemen wij dan den inhoud, dan hebben wij

$$x=-a^2(Cos^3.\phi-Cos.\phi\,Cos^2.\alpha)\,Sin.\phi$$
$$\frac{\partial x}{\partial\phi}=-a^2(4Cos^4.\phi-(3+2Cos^2.\alpha)\,Cos^2.\phi+Cos^2.\alpha)$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial\phi^2}=2a^2(8\,Cos^3.\phi-(3+2\,Cos^2.\alpha)\,Cos.\phi)\,Sin.\phi$$

Wanneer nu $\frac{\partial x}{\partial\phi}=0$ gesteld wordt, hebben wij door een 4e magts vergelijking van de 2e magtsform optelossen

$$Cos.\phi=\pm\ldots\ldots\ldots$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{3+2Cos^2.\alpha\pm\sqrt{((3+2Cos^2.\alpha)^2-16\,Cos^2.\alpha)}}{2}},$$

maar $(3+2\,Cos^2.\alpha)^2-16\,Cos^2.\alpha=9-4$ $Cos^2.\alpha+4\,Cos^4.\alpha=9-4\,Cos^2.\alpha\,(1-Cos^2.\alpha)$ $=9-4\,Cos^2.\alpha\,Sin^2.\alpha=9-(2\,Sin.\alpha\,Cos.\alpha)^2$ $=9-Sin^2.2\alpha$

en

en $Cos.2\alpha = Cos^2.\alpha - Sin^2.\alpha = 2Cos^2.\alpha - 1$ zijnde, is $2Cos^2.\alpha = Cos.2\alpha + 1$, waardoor $3 + 2Cos^2.\alpha = 4 + Cos.2\alpha$, zoo dat,

$$Cos.\varphi = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{4 + Cos.2\alpha \pm \sqrt{(9 - Sin^2.2\alpha)}}{2}}$$

welke formule vier verschillende waarden voor $Cos.\varphi$ bevat.

Zonder nu alle deze waarden van $Cos.\varphi$ aan de verkennings vergelijking $\frac{\delta^2 x}{\delta\varphi^2} = 2a^3 (8\,Cos^2.\varphi - (4 + Cos.2\alpha))\,Cos.\varphi\;Sin.\varphi$ te beproeven, merken wij op, dat $\angle C = 180^0 - 2\varphi$ zijnde $2\varphi < 180^0$ of $\varphi < 90^0$ moet zijn, en dat dus $Cos.\varphi$ en $Sin.\varphi$ beide positief moeten genomen worden. Wij verwerpen alzoo oogenbliklijk de twee waarden van $Cos.\varphi$, welke met het teeken $-$ aangedaan zijn, en behouden dus alleen, om aan de verkennings vergelijking getoetst te worden,

$$Cos.\varphi = +\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{4 + Cos.2\alpha \pm \sqrt{(9 - Sin^2.2\alpha)}}{2}}$$

en wij moeten dus onderzoeken of deze waarden van $Cos.\varphi$,

$$\frac{\delta^2 x}{\delta\varphi^2} = 2a^3(8\,Cos^2.\varphi - (4 + Cos.2\alpha))\,Cos.\varphi\;Sin.\varphi$$

positief of negatief maken: maar $Cos.\varphi$ en $Sin.\varphi$ beide positief zijnde zal $\frac{\delta^2 x}{\delta\varphi^2}$ positief of negatief zijn, naarmate de factoor $8\,Cos^2.\varphi - (4 + Cos.2\alpha)$ positief of negatief is, brengen wij dan in deze factoor de waarde van $Cos.\varphi$, komt er $\pm \sqrt{(9 - Sin^2.2\alpha)}$, waaruit blijkt dat van de twee waarden van $Cos.\varphi$ de bovenste tot een minimum en de benedenste tot een maximum van den inhoud x behoort.

Nu is nit $Cos.\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{4 + Cos.2\alpha - \sqrt{(9 - Sin^2.2\alpha)}}{2}}$

Mm Sin.

$$Sin.\,\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{4 - Cos.\,2\alpha \mp \sqrt{(9 - Sin^2.\,2\alpha)}}{2}}$$

en dus $Sin.\,\varphi\; Cos.\,\varphi = \frac{1}{8}\sqrt{(6 + 2\,Sin^2.\,2\alpha \mp 2\,Cos.\,2\alpha\,\sqrt{(9 - Sin^2.\,2\alpha)})}$ en substituerende dit in de waarde van den inhoud, dat is in $x = -a^2\,(Cos^2.\,\varphi - Cos^2.\,\alpha)\; Sin.\,\varphi\; Cos.\,\varphi$ komt er na herleiding en in aanmerking nemende dat $Cos^2.\,\alpha = \frac{1 + Cos.\,2\alpha}{2}$ is,

$$x = -a^2.\,\tfrac{1}{64}\,(-3\,Cos.\,2\alpha \pm \sqrt{(9 - Sin^2.\,2\alpha)}) \times \ldots \sqrt{(6 + 2\,Sin^2.\,2\alpha \mp 2\,Cos.\,2\alpha\,\sqrt{(9 - Sin^2.\,2\alpha)})}$$

zal nu de waarde van $Cos.\,\varphi$ een wezenlijk maximum of minimum voor onze driehoek geven, moet de inhoud positief en dus de factoor . . . $-3\,Cos.\,2\alpha \pm \sqrt{(9 - Sin^2.\,2\alpha)}$ negatief zijn, stellen wij dan dien factoor onder deze gedaante:

$$-3\,Cos.\,2\alpha \pm \sqrt{(9\,Cos^2.\,2\alpha + 8\,Sin^2.\,2\alpha)}$$

dan is het blijkbaar, dat alleen de benedenste waarde aan dit vereischte voldoet, daar . . . . $\sqrt{(9\,Cos^2.\,2\alpha + 8\,Sin^2.\,2\alpha)} > 3\,Cos.\,2\alpha$ zijnde, de bovenste waarde altoos positief zal zijn, en dus den inhoud negatief zal maken

Wij besluiten hier dan uit dat alleen $Cos.\,\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4 + Cos.\,2\alpha - \sqrt{(9 - Sin^2.\,2\alpha)}}{2}}$ welke den inhoud tot een maximum maakt, op onzen driehoek past. Zijnde voor dit maximum de inhoud

$$x = \tfrac{1}{64}\,a^2\,(3\,Cos.\,2\alpha + \sqrt{(9 - Sin^2.\,2\alpha)}) \times \ldots \sqrt{(6 + 2\,Sin^2.\,2\alpha + 2\,Cos.\,2\alpha\,\sqrt{(9 - Sin^2.\,2\alpha)})}$$

VOORBEELD. — Laat $\alpha = 30^\circ$ gegeven zijn, dan is $2\alpha = 60^\circ$, $Cos.\,2\alpha = \frac{1}{2}$ $Sin.\,2\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; hierdoor wordt, voor het maximum van den inhoud $Cos.\,\varphi = \frac{1}{4}\sqrt{(9 - \sqrt{33})}$; $Sin.\,\varphi = \frac{1}{4}\sqrt{(7 + \sqrt{33})}$;

AB

$AB = a\,Sin.\,2\varphi = a.\frac{1}{8}\sqrt{(30+2\sqrt{33})}$, $BC = a\,Sin.(\varphi+\alpha) = a.\frac{1}{8}(\sqrt{7\sqrt{3}+3\sqrt{11}}+\sqrt{(9-\sqrt{33})})$ en $AC = a\,Sin.(\varphi-\alpha) = .\frac{1}{8}(\sqrt{(7\sqrt{3}+3\sqrt{11})}-\sqrt{(9-\sqrt{33})})$ voor de drie zijden, terwijl de inhoud wordt $x = a^2.\frac{1}{256}(3+\sqrt{33})\sqrt{(30+2\sqrt{33})}$ dat is $x = a^2.\frac{1}{128}\sqrt{6}(69+11\sqrt{33}.)$

II°. Om het maximum of minimum van den omtrek te vinden, hebben wij $y = 2a(Cos.\varphi + Cos.\alpha)\,Sin.\varphi$,

$\frac{\delta y}{\delta\varphi} = 2a\,(2Cos^2.\varphi + Cos.\varphi\;Cos.\alpha - 1)$;

$\frac{\delta^2 y}{\delta\varphi^2} = -2a(4\,Cos.\varphi + Cos.\alpha)\,Sin.\varphi$; wordt

nu $\frac{\delta y}{\delta\varphi} = 0$ gesteld, vindt men $Cos.\varphi = \ldots$

$\frac{-Cos.\alpha \pm \sqrt{(8+Cos^2.\alpha)}}{4}$ en daar wij reeds boven opgemerkt hebben, dat $Cos.\varphi$ en $Sin.\varphi$ positief moeten zijn, om op onzen driehoek te kunnen worden toegepast, hebben wij alleen de eerste waarde van $Cos.\varphi$, dat is $Cos.\varphi = \ldots\ldots$

$\frac{-Cos.\alpha + \sqrt{(8+Cos^2.\alpha)}}{4}$, welke altoos positief is; aan $\frac{\delta^2 y}{\delta\varphi^2}$ te toetsen, brengen wij dan die waarde van $Cos.\varphi$ in de waarde van $\frac{\delta^2 y}{\delta\varphi^2}$, komt

er $\frac{\delta^2 y}{\delta\varphi^2} = -2a\sqrt{8+Cos^2.\alpha}\;Sin.\varphi$ welke aantoont, dat $Cos.\varphi = \frac{-Cos.\alpha + \sqrt{(8+Cos^2.\alpha)}}{4}$ den omtrek een maximum maakt, omdat $Sin.\varphi$ positief zijnde, $\frac{\delta^2 y}{\delta\varphi^2}$ negatief wordt.

Nu is $Sin.\varphi = \sqrt{1 - Cos^2.\varphi} = \ldots$

 $\frac{1}{4}\sqrt{}$

$\frac{1}{4} \sqrt{} (8 - 2 Cos^2 . \alpha + 2 Cos . \alpha \sqrt{} (8 + Cos^2 . \alpha))$
dat is, herleidende,

$$Sin . \phi = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{8 + 8 Sin . \alpha - 2 Cos^2 . \alpha}{2}} + \ldots \sqrt{\frac{8 - 8 Sin . \alpha - 2 Cos^2 . \alpha}{2}} \right)$$

en brengende de waarden van $Cos . \phi$ en $Sin . \phi$ in' de waarde van y, zoo is in het algemeen, voor dit maximum, de omtrek

$$y = 2a (3 Cos . \alpha + \sqrt{} (8 + Cos^2 . \alpha)) \times \ldots \left(\sqrt{\frac{8+8Sin.\alpha-2Cos^2.\alpha}{2}} + \sqrt{\frac{8-8Sin.\alpha-2Cos^2.\alpha}{2}} \right)$$

VOORBEELD. — Pasſen wij dit weder toe op het geval van $\alpha = 30^\circ$, is $Sin . \alpha = \frac{1}{2}$; $Cos . \phi = \frac{1}{2} \sqrt{} 3$; en voor ons maximum, $Cos . \phi = \frac{1}{8} (-3 + \sqrt{} 35)$, $Sin . \phi = \frac{1}{8} (\sqrt{} 5 + \sqrt{} 21)$; $AB = a Sin . 2\phi = a . \frac{1}{16} (3 \sqrt{} 15 + \sqrt{} 7)$; $BC = a Sin . (\phi + \alpha) = a . \frac{1}{16} (\sqrt{} 15 + 3 \sqrt{} 7 - \sqrt{} 3 + \sqrt{} 35)$; $AC = a . \frac{1}{16} (\sqrt{} 15 + 3 \sqrt{} 7 + \sqrt{} 3 - \sqrt{} 35)$, zoo dat de omtrek $y = a . \frac{1}{16} (5 \sqrt{} 15 + 7 \sqrt{} 7.)$

III°. Voor het maximum of *minimum* van den ſtraal des ingeſchreven cirkels hebben wij

$$z = - a (Cos . \phi - Cos . \alpha) Cos . \phi$$

$$\frac{\delta z}{\delta \phi} = a (2 Cos . \phi - Cos . \alpha) Sin . \phi;$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta \phi^2} = a (4 Cos^2 . \phi - Cos . \phi Cos . \alpha - 2).$$

ſtellen wij dan $\frac{\delta z}{\delta \phi} = 0$, vinden wij 1°. $Sin . \phi = 0$. of 2°. $Cos . \phi = \frac{1}{2} Cos . \alpha$.

De eerſte oplosſing $\phi = 0$ is, ofſchoon zij $\frac{\delta^2 z}{\delta \phi^2} = a$ makende, een minimum aantoont, niet dan in eenen oneigenlijken zin op onze driehoek toetepasſen, wijl zij $\angle B = \phi - \alpha = - \alpha$, en dus negatief maakt.

Maar

Maar de tweede oplossing $Cos.\phi = \frac{1}{2}\,Cos.\alpha$ maakt $\frac{\delta^2 z}{\delta\phi^2} = a\,(\frac{1}{2}\,Cos^2.\alpha - 2)$, welke waarde negatief zijnde, een maximum aantoont, bij welk maximum de straal des ingeschreven cirkels gelijk is aan

$$z = -a\,(Cos.\phi - Cos.\alpha)\,Cos.\phi = \tfrac{1}{4}\,a\,Cos^2.\alpha$$

VOORBEELD. — Nemende nogmaals $\alpha = 30^\circ$ is $Sin.\alpha = \frac{1}{2}$; $Cos.\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, dus $Cos.\phi = \frac{1}{4}\sqrt{3}$, $Sin.\phi = \frac{1}{4}\sqrt{13}$; verder voor de zijden, $AB = a\,Sin.2\,\phi = a\,.\,\frac{1}{8}\sqrt{39}$; $BC = a\,Sin.(\phi + \alpha) = \frac{1}{8}\,(\sqrt{39} + \sqrt{3})$, $AC = a\,Sin.(\phi - \alpha) = a\,.\,\frac{1}{8}\,(\sqrt{39} - \sqrt{3})$ en eindelijk voor den straal des ingeschreven cirkels $z = \frac{1}{4}\,a\,Cos^2.\alpha = \frac{3}{16}\,a$.

IV°. Om den afstand der middelpunten tot een maximum of minimum te maken is . . . . . $v = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4az}$, waaruit even als in het 183e voorstel, blijkt, dat v grooter of kleiner wordende naar mate z kleiner of grooter wordt, het gevonden maximum voor z een minimum voor v zal geven, bij welk minimum, om dat als dan $z = \frac{1}{4}aCos^2\alpha$ is, $v = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4az} = \frac{1}{2}\,a\sqrt{1 - Cos^2.\alpha} = \frac{1}{2}\,a\,Sin.\alpha$ zal zijn.

VOORBEELD. Is dus $\alpha = 30^\circ$ zal de afstand der middelpunten van omgeschreven en ingeschreven cirkels op zijn kleinst $= \frac{1}{4}\,a$ zijn.

N°. 185. Door

J. R. SCHMIDT.

Stel (*Fig.* 85.) den hoek $A = \phi + \phi'$, den hoek $B = \phi - \phi'$, dan is de hoek $C = 180^\circ - 2\phi$. Zoo wij nu den gegevenen omtrek $= s$ en de radius des ingeschreven cirkels z stellen, hebben wij in het vorige voorstel gevonden, dat

voor de middellijn des omgefchreven cirkels $= a$ zijn zal.

$AB = a\ Sin.2\phi$, $BG = a\ Sin.(\phi + \phi')$, $AC = a\ Sin.(\phi - \phi')$ en verder $s = 2a\ (Cos.\phi + Cos.\phi')\ Sin.\phi$ en $z = -a\ (Cos^2.\phi - Cos.\phi.Cos.\phi')$, welke laatfte formule alzoo in ons geval een maximum of minimum moet zijn.

Zoeken wij nu uit de 1°. aequatie de waarde van $Cos.\phi'$ zoo vinden wij $Cos.\phi' = \ldots\ldots$

$$\frac{s - 2a\ Cos.\phi.Sin.\phi}{2a\ Sin.\phi} = \frac{s}{2a\ Sin.\phi} - Cos.\phi$$

en brengende dit over in de waarde van z, verandert dezelve in

$$z = -a(2Cos^2.\phi - \frac{s}{2a} Cot.\phi) = \text{max. of minimum.}$$

nu is $\frac{\partial z}{\partial \phi} = a\left(4\ Cos.\phi\ Sin.\phi - \frac{s}{2a}.\frac{1}{Sin^2.\phi}\right)$

en $\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2} = a\left(4\ Cos^2.\phi - 4\ Sin^2.\phi + \frac{s}{a}.\frac{Cos.\phi}{Sin^3.\phi}\right)$

ftellende dan $\frac{\partial z}{\partial \phi} = 0$, is $4\ Cos.\phi\ Sin.\phi = \frac{s}{2a}.\frac{1}{Sin^2.\phi}$; of $4\ Cos.\phi.\ Sin^3.\phi = \frac{s}{2a}$.

Onder de verfchillende manieren, waarop deze vergelijking kan worden opgelost, komt ons deze de eenvoudigfte voor. Men quadratere dezelve, dan komt er $16\ Cos^2.\phi\ Sin^6.\phi = \frac{s^2}{4a^2}$, of $16\ (1 - Sin^2.\phi)\ Sin^6.\phi = \frac{s^2}{4a^2}$; waaruit $Sin^8.\phi - Sin^6.\phi + \frac{s^2}{64a^2} = 0$, of ftellende $Sin^2.\phi = x$; $x^4 - x^3 + \frac{s^2}{64a^2} = 0$, welke aequatie men, wanneer de betrekking tusfchen s en

s in getallen gegeven is, gevolglijk door middel der Logarithmen bij benadering oplosfen kan, om dat dezelve kan gefchreven worden onder den vorm $x^3(1-x) = \frac{s^2}{64a^2}$; dat is $3\,Log.x + Log.(1-x) = Log.\frac{s^2}{64a^2}$. Wanneer men dus de wortels van onze aequatie op deze of eenige andere wijze gevonden heeft, moeten dezelve niet alleen aan de verkennings vergelijking $\frac{\partial^2 z}{\partial\phi^2}$ getoetst worden, maar men moet nog bovendien toezien dat $2\phi < 180°$ en $\phi' < \phi$ worde, terwijl anders $\angle$ C of $\angle$ B negatief zou zijn, en dus op geene driehoek in den eigentlijken zin toepasfelijk zou zijn, een voorbeeld zal dit alles duidelijk maken.

VOORBEELD. — Laat $s = \frac{9}{4}a$ zijn, dan is $\frac{s^2}{64a^2} = \frac{81}{16.64} = 0.07910156$ en dus de aequatie $x^4 - x^3 + 0,07910156 = 0$. Wij hebben deze aequatie door middel der Logarithmen benaderd en gevonden $Sin^2.\phi = x = 0,5677336$ en $Sin^2.\Phi = x = 0,8864351$, terwijl de andere wortels imaginair zijn; laten wij nu deze twee wortels ieder in het bijzonder onderzoeken.

1°. $Sin^2.\phi = 0,5677336$ geeft $Log.Sin.\phi = 9,8770743$; $\phi = 48°53'34''13$; $Log.Cos.\phi = 9,8178758$ en $Cos.\phi = 0,6574696$; dus $2\phi = 97°47'8''26$, waaruit $Log.Sin.2\phi = Log.(2\,Sin.\phi\,Cos.\phi) = 9,9959780$, dus $Sin.2\phi = 2\,Sin.\phi\,Cos.\phi = 0,9907819$.

Nu is $\frac{\partial^2 z}{\partial\phi^2} = a\left(4\,Cos^2.\phi - 4\,Sin^2.\phi + \frac{s}{a}.\frac{Cos.\phi}{Sin^3.\phi}\right) = a\left(4 - 8\,Sin^2.\phi + \frac{s}{2a}\right.$

$$+\frac{2\,Cos.\phi.Sin.\phi}{Sin^4.\phi}\Big) = a\,\Big(4 - 8\,Sin^2.\phi + \tfrac{9}{8}.\frac{2\,Cos.\phi.Sin.\phi}{Sin^4.\phi}\Big).$$

Nu is $Log.Sin^4.\phi = 4\,Log.Sin.\phi = 9{,}5082891$, dus $Log.\frac{2\,Sin.\phi\,Cos.\phi}{Sin^4.\phi} = 0{,}4876889$ en . . . $\frac{2\,Sin.\phi.Cos.\phi}{Sin^4.\phi} = 3{,}0738935$, waardoor dan $\frac{\partial^2 z}{\partial\phi^2} = + a\,.\,2{,}9162614$; welke positief waarde aantoont, dat $\phi = 48°53'34''13$ een minimum voor z geeft.

Om nu den driehoek nader te bepalen, is $Cos.\phi' = \frac{s}{2a}.\frac{1}{Sin.\phi} - Cos.\phi = \frac{9}{8}.\frac{1}{Sin.\phi} - Cos.\phi = 0{,}8356004$, $Log.Cos.\phi' = 9{,}9219986$, $\phi' = 33°19'17''75$, waaruit $\angle A = \phi + \phi' = 82°12'51''88$, $\angle B = \phi - \phi' = 15°34'16''38$, $\angle C = 180° - 2\,\phi = 82°12'51''74$, $AB = a\,Sin.2\phi = a\,.\,0{,}9907819$; $BC = a\,Sin.(\phi + \phi') = 0{,}9907820\,.\,a$ en $AC = a.Sin.(\phi - \phi') = 0{,}2684359\,a$, waarvan de som $2{,}2499998.a$ slechts $0{,}0000002$ van $2\tfrac{1}{4}a$ afwijkt.

2°. Voor $Sin^2.\phi = 0{,}8864351$ is $Log.Sin.\phi = 9{,}9738235$; $\phi = 70°18'22''27$; $Log.Cos.\phi = 9{,}5276217$; $Cos.\phi = 0{,}3369936$; $2\,\phi = 140°36'44''54$ en dus $Log.Sin.2\,\phi = Log.(2\,Sin.\phi\,Cos.\phi) = 9{,}8024752$; $Sin.2\,\phi = 2\,Sin.\phi\,Cos.\phi = 0{,}6345636$; $Log.Sin^4.\phi = 9{,}8952940$; $Log.\frac{2\,Sin.\phi\,Cos.\phi}{Sin^4.\phi} = 9{,}9071812$; $\frac{2\,Sin.\phi\,Cos.\phi}{Sin^4.\phi} = 0{,}8075719$; dit gesubstitueerd in $\frac{\partial^2 z}{\partial\phi^2} = a\,\Big(4 - 8\,Sin^2.\phi + \tfrac{9}{8}.\frac{2\,Cos.\phi.Sin.\phi}{Sin^4.\phi}\Big)$

komt

komt $\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} = - a \cdot 2{,}1829624$, welke negative waarde aantoont, dat $\varphi = 70°18'22''27$ een maximum voor z geeft.

Om den driehoek nader te bepalen is hier $Cos. \varphi' = \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{Sin. \varphi} - Cos. \varphi = 0{,}8578994$, $Log. Cos. \varphi' = 9{,}9334364$, $\varphi' = 30°55'6''25$, zoo dat $\angle$ A $= \varphi + \varphi' = 101°13'28''52$; $\angle$ B $= (\varphi - \varphi') = 39°23'16''02$; $\angle$ C $= 180° - 2\varphi = 39°23'15''46$, AB $= a\, Sin. 2\varphi = 0{,}6345636 \cdot a$, BC $= a\, Sin. (\varphi + \varphi') = 0{,}6345652 \cdot a$ en AC $= a\, Sin. (\varphi - \varphi') = 0{,}9808714 \cdot a$, waar van de som $2{,}2500002 \cdot a$ mede slechts $0{,}0000002$ van $2\frac{1}{4} a$ verschilt.

N°. 186. Door

ABRAHAM FOCK, *P. van Eeghen Chz.*, en *R. Lobatto*.

Laten Mm' en $M'm$ (*Fig.* 163.) de twee toegevoegde middellijnen zijn, Aa de groote *as* en Bb de kleine as; stel AC $= a$, BC $= b$, MC $= p$, m C $= q$, $\angle$ MC A $= \alpha$, MP $= y$ en CP $= x$; dan is

$$MP = MC . Sin. \angle MCA = p . Sin. \alpha = y$$
$$CP = MC . Cos. \angle MCA = p . Cos. \alpha = x$$

Voorts is $p^2 + q^2 = a^2 + b^2$ (*kunstoef.* I D. 134) en $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, dus $p^2\, Sin. \alpha^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - p^2 + p^2\, Sin. \alpha^2)$; waaruit $(a^2 - b^2)\, p^2\, Sin. \alpha^2 = b^2 (a^2 - p^2)$; maar $a^2 = p^2 + q^2 - b^2$, dus $(p^2 + q^2 - 2 b^2)\, p^2\, Sin. \alpha^2 = b^2 (q^2 - b^2) = q^2 b^2 - b^4$, en

$$b^4 = (q^2 + 2 p^2\, Sin. \alpha^2)\, b^2 - (p^2 + q^2)\, p^2\, Sin. \alpha^2$$

uit deze vergelijking volgt

 $b^2 =$

$b^2 = \frac{1}{2}(q^2 + 2p^2 \, Sin.\alpha^2) \pm \surd(\frac{1}{4}q^4 - p^4 \, Sin.\alpha^2 Cos.\alpha^2)$
dit afgetrokken van $a^2 + b^2 = p^2 + q^2$, komt
$a^2 = \frac{1}{2}(q^2 + 2p^2 \, Cos.\alpha^2) \mp \surd(\frac{1}{4}q^4 - p^4 \, Sin.\alpha^2 Cos.\alpha^2)$
dus $a = \surd \, [\frac{1}{2} \, (q^2 + 2 \, p^2 \, Cos.\alpha^2) \mp \ldots\ldots$
$\ldots\ldots \surd \, (\frac{1}{4} \, q^4 - p^4 \, Sin.\alpha^2 \, Cos.\alpha^2)]$
en $b = \surd \, [\frac{1}{2} \, (q + 2 \, p^2 \, Sin.\alpha^2) \pm \ldots\ldots$
$\ldots\ldots \surd \, (\frac{1}{4} \, q^4 - p^4 \, Sin.\alpha^2 \, Cos.\alpha^2)]$

N°. 187. Door

J. R. Schmidt.

Laten AB en DE (*Fig.* 164.) de asfen der ellips zijn, en GK en IH de gevraagde toegevoegde. diameters, welke den kleinften of grootften hoek maken. Zoo dan alles gefteld wordt zoo als in de Figuur is aangewezen, hebben wij uit de bekende eigenfchappen der ellips.

1°. $p^2 + q^2 = a^2 + b^2$; 2°. $pq \, Sin.\phi = ab$

uit de 2e aequatie is $Sin.\phi = \frac{ab}{pq}$ en dit moet dus een maximum of minimum zijn.

Stellende dan $\frac{\delta \, . \, Sin.\phi}{\delta p} = - \frac{ab}{p^2 q^2} \ldots\ldots$
$\left(p \, . \, \frac{\delta q}{\delta p} + q\right) = 0$, komt er $p \frac{\delta q}{\delta p} + q = 0$.

Maar differenteerende de 1e aequatie, hebben wij
$\frac{\delta q}{\delta p} = - \frac{p}{q}$, en dit fubftitueerende, komt

$$\frac{-p^2}{q} + q = 0$$

waaruit $p = q$ en dus door middel van de eerfte aequatie,

$$p = q = \frac{1}{2} \surd 2 \, (a^2 + b^2)$$

„ De toegevoegde diameters, welke alzoo den
„ grootften hoek ICG of kleinften hoek GCH
„ maken, zijn aan elkander gelijk en kunnen

„ door

„ door de formule $p = q = \frac{1}{2} \sqrt{2 (a^2 + b^2)}$
„ reeds gemakkelijk geconstrueert worden."

Wij kunnen echter op de volgende wijze eene nog eenvoudiger constructie vinden.

Wijl $x^2 + y^2 = p^2$ en $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ (zijnde dit de middelpunts aequatie des ellips) zoo is $x^2 = \frac{(p^2 - b^2) a^2}{a^2 - b^2}$ en substituerende hierin de waarde van $p^2 = \frac{1}{2} (a^2 + b^2)$,

$$x^2 = \frac{1}{2} a^2 \text{ of } x = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$$

en hieruit hebben wij deze Constructie.

1°. Beschrijf op de groote as AB eenen halven cirkel en deel ∠ DCB midden door, dan is boog BF = 45°.

2°. Trek een perp. FH door AB, snijdende de ellips in G en H, dan zijn GK en HI de gevraagde diameters:

want dan is $CL = x = a \,Cos. 45° = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$.

N°. 188. Door

O. S. Bangma, en *N. Bondt*.

Uit hoofde van de gelijkvormigheid der driehoeken, die in de figuur voorkomen, is (*Fig.* 165) DE : EG = CE : AE = BE : FE; dus DE × FE = BE × EG, en daarom △ DEF = △ BEG.

Gevolg. Daar △ AHD = △ AHB is
en △ EHD = △ EHB
zoo is △ EAD = △ EAB
maar △ EFD = △ EGB bewezen
dus △ AEF = △ AEG

N°. 189.

N°. 189. Door

O. S. Bangma, en *N. Bondt.*

Stel △ AFD (*Fig.* 166.) $= x$, △ BFE $= y$, △ AFB $= z$ en △ DFE $= d$, dan is $a : b + y =$ DF : BF $= d : y$; dus $a : d = b + y : y$; dus $a - d : d = b : y$; dus $y = \frac{bd}{a-d}$ en $y + b = \frac{ab}{a-d}$. Op dezelfde wijze $x = \frac{ad}{b-d}$ en $x + a = \frac{ab}{b-d}$. Voorts is $z = \frac{1}{2}$ AF × BF × *Sin.* ∠ AFB; maar $x = \frac{1}{2}$ AF × DF × *Sin.* ∠ AFB, $y = \frac{1}{2}$ BF × EF × *Sin.* ∠ AFB en $d = \frac{1}{2}$ DF × EF × *Sin.* ∠ AFB; dus $\frac{xy}{d} = \frac{1}{2}$ AF × BF × *Sin.* ∠ AFB $= z$; dus △ ABC $= x + a + y + b + z = \frac{ab}{b-d} + \frac{ab}{a-d} + \frac{xy}{d} = \frac{ab}{b-d} + \frac{ab}{a-d} + \frac{abd}{(b-d)(a-d)}$ $= ab\left(\frac{1}{b-d} + \frac{1}{a-d} + \frac{d}{(b-d)(a-d)}\right)$ $= ab \cdot \frac{a+b-d}{(a-d)(b-d)}$; maar $a + b = c + d$ en $d = a + b - c$, dus △ ABC $= \ldots\ldots$ $\frac{abc}{(a-d)(b-d)} = \frac{abc}{(c-b)(c-a)}$.

N°. 190. Door

N. Bondt.

Neem CD (*Fig.* 167) tot BE; als 113 tot 355; trek DF evenwijdig aan BE en trek de regte CEF, dan is DF gelijk aan den halven omtrek, 2 × DF gelijk aan den geheelen omtrek en

$\frac{1}{2}$ DF

$\frac{1}{2}$ DF gelijk aan een vierde van den omtrek, in veronderstelling, dat 113 tot 355 de rede van de middellijn tot den omtrek is.

N°. 191. Door

N. BONDT.

De vergelijking $xy = 125x + 300y$ geeft $x = \frac{300y}{y - 125}$; deze waarde gesubstitueerd in $y^2 - x^2 = a$, geeft

$$y^2 - \frac{90000y^2}{y^2 - 250y + 15625} = a$$

of $y^4 - 250y^3 - (74375 + a)y^2 + 250ay - 15625a = 0$ zoo nu a in getallen gegeven is, kan men y vinden, doch zoo men deze vergelijking letterlijk begeert op te lossen, zoo make men den tweeden term uit dezelve weg, door $y = z + 62\frac{1}{2}$ te stellen en zoeke z volgens den regel van *Pombelli*, dan heeft men $y = 62\frac{1}{2} + z$ en $x = \frac{300y}{y - 125}$.

N°. 192. Door

O. S. BANGMA.

Om de voorgestelde vergelijking te vereenvoudigen, zoo stel $y = a + u$ en $x = \frac{1}{2}a + z$, dan zal men hebben

$$\frac{y}{a} = \frac{u}{a} + 1 = \frac{x^2 - (c + 2d)x + 2cd}{x^2 - ax + 6a^2}$$

en ter wederzijden de eenheid aftrekkende

$$\frac{u}{a} = \frac{(a - c - 2d)x + 2cd - 6a^2}{x^2 - ax + 6a^2}$$

en hier in $x = \frac{1}{2}a + z$ overbrengende:

$$\frac{u}{a} = \frac{(a - c - 2d)z + 2cd - \frac{1}{2}ac - ad - 5\frac{1}{2}a^2}{z^2 + 5\frac{1}{2}a^2}$$

Laat a voor éénheid genomen worden, $5\frac{1}{2}a^2 = n^2$, $5\frac{1}{2}a^2 + ad + \frac{1}{2}ac - 2cd = b$ en $(a - c - 2d) = e$ gesteld worden, dan heeft men

$$u = \frac{ez - b}{z^2 + n^2}$$

$$\frac{\delta u}{\delta z} = \frac{-ez^2 + 2bz + en^2}{(z^2 + n^2)^2}$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta z^2} = \frac{2ez^3 - 6bz^2 - 6en^2z + 2bn^2}{(z^2 + n^2)^3}$$

De uitdrukking voor de subtangens is

$$s = u\frac{\delta z}{\delta u} = \frac{(ez - b)(z^2 + n^2)}{-ez^2 + 2bz + en^2}$$

Laat nu (*Fig.* 169) MN de as der abscissen z, MR de as der ordinaten u, en PAQ de kromme zijn, dan zal deze kromme de as MN snijden in A, als $u = 0$ en bijgevolg $z = \frac{b}{e}$ is; derhalve MA $= \frac{b}{e}$. Laat MD de abscis, DE de ordinant en CE de raaklijn van het punt E der kromme zijn, en AB evenwijdig aan MR, dan is

$$CD = \frac{(ez - b)(z^2 + n^2)}{-ez^2 + 2bz + en^2} = s \ldots$$

$$\ldots = \frac{ez^3 - bz^2 + en^2z - bn^2}{-ez^2 + 2bz + en^2}$$

voorts $MC = MD - CD = z - CD = \ldots$

$$\ldots = \frac{-2ez^3 + 3bz^2 + bn^2}{-ez^2 + 2bz + en^2}$$

en $AC = MA - MC = \frac{b}{e} - MC = \ldots$

$$\ldots\ldots = \frac{2e^2z^3 - 4ebz^2 + 2b^2z}{-e^2z^2 + 2ebz + e^2n^2} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots = \frac{2z\,(ez - b)^2}{-e^2z^2 + 2ebz + e^2n^2}$$

maar $\partial z : \partial u = AC : AB = AC \times \frac{\partial u}{\partial z}$,

dus $AB = \frac{2z\,(ez - b)^2}{e\,(z^2 + n^2)^2}$.

Uit de vergelijking tusfchen u en z blijkt, dat u pofitief zal zijn voor alle waarden van z, grooter dan $\frac{b}{e}$, en negatief, voor alle waarden van z, kleiner dan $\frac{b}{e}$, en dat bijgevolg de kromme twee oneindige takken heeft; waar van de eene geheel boven de lijn MN, en de andere geheel beneden dezelve gelegen is. Daar wijders AC oneindig en AB nul wordt wanneer men $z = \pm \infty$ ftelt, zoo blijkt daar uit, dat als dan de raaklijk CB op MN valt, en dat bijgevolg de as MN eene asfymptote is aan beide de takken.

Om de buigpunten te bepalen, moet men $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ ftellen, waar uit volgt

$$ez^3 - 3bz^2 - 3en^2z + bn^2 = 0$$

Deze vergelijking heeft drie reëele, doch irrationale wortels, te kennen gevende, dat onze kromme even zoo veele buigpunten heeft, welke door de waarden van z, in deze vergelijking, aangewezen zullen worden.

Om de grootfte en kleinfte ordinaten te vinden, ftelle men $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, waar door

$$ez^2 - 2bz - en^2 = 0$$

$$\text{of } z^2 = \frac{2b}{e}\,z + n^2$$

dus

dus $z = \frac{b}{c} \pm \frac{1}{c} \sqrt{(b^2 + c^2 n^2)}$

Hier uit volgt

$$z^2 = \frac{2b^2 + c^2 n^2 \pm 2b \sqrt{(b^2 + c^2 n^2)}}{c^2}$$

$$z^2 + n^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 n^2 \pm 2b \sqrt{(b^2 + c^2 n^2)}}{c^2}$$

en $cz - b = \pm \sqrt{(b^2 + c^2 n^2)}$

dus $u = \frac{cz - b}{z^2 + n^2} = \frac{\pm 1}{2\sqrt{(b^2 + c^2 n^2)} \pm 2b}$

$$= \frac{\pm \sqrt{(b^2 + c^2 n^2)} - b}{2c^2 n^2}$$

Waar uit blijkt, dat $u = \frac{\sqrt{(b^2 + c^2 n^2)} - b}{2c^2 n^2}$ de grootste positieve en $u = \frac{-\sqrt{(b^2 + c^2 n^2)} - b}{2c^2 n^2}$ de grootste negatieve ordinaat zijn zal. Deze uitkomsten schijnen strijdig te zijn met de noot die het voorstel vergezeld, als waarin gezegd wordt, dat voor sommige bepaalde abscisſen de ordinaten oneindig groot en asſymptoten der kromme worden; maar als men in aanmerking neemt, dat de benamingen van abscis en ordinaat relatief tot elkander zijn, dat MR voor de lijn der abscisſen en MN voor de lijn der ordinaten genomen kan worden, dan zal u = DE = MH de abscis en z = MD = HE de ordinaat zijn, en de zaak zoodanig beschouwende, zal men kunnen zeggen, dat de ordinaat z = HE oneindig en asſymptote der kromme wordt, voor de bepaalde waarde van u = MH = o.

N°. 193.

N°. 193. Door

J. R. Schmidt.

§. 1. Schrijven wij de aequatie aldus . . . . .
$\frac{Y}{a} = Sin.\varphi.Sin.2\varphi.Sin.3\varphi$, en stellen wij
$\frac{Y}{a} = y$, dan heeft zij deze gedaante

$$y = Sin.\varphi.Sin.2\varphi.Sin.3\varphi \ldots\ldots (1)$$

onder welken vorm wij dezelve behandelen zullen: wij zullen verder in den loop van deze oplossing de punten meestal door cijfers aanwijzen, en op dat dit geene verwarring veroorzake, de volgende notatie gebruiken: (0; 2) zal verbeelden de lijn begrepen tusschen de punten 0 en 2; (12; 24) de lijn tusschen de punten 12 en 24 begrepen, en zoo met al de overige.

§. 2. Onze aequatie is dan $y = Sin.\varphi.Sin.2\varphi.Sin.3\varphi$; laat dan in *Fig.* 170 PQ de as der abscissen of der waarden van φ, en KL de as der ordinaten of der waarden van y zijn; dan is 0 de oorsprong der coördinaten.

Nu wordt $y = 0$, in deze 3 gevallen, ... $Sin.\varphi = 0$; $Sin.2\varphi = 0$ of $Sin.3\varphi = 0$; de eerste waarde $Sin.\varphi = 0$ geeft $\varphi = \pm n\pi$ (n een geheel getal en π de halve omtrek zijnde wanneer de radius de eenheid is), zoo wij dus eene willekeurige lijn a als eenheid aannemen en wij (0; 12) = (12; 24) = (0; — 12) = (0; — 24) enz. $= \pi \times a = a.3,14159$ enz. nemen, zullen al deze lijnen de waarde van π voorstellen, en dus zullen de punten — 24; — 12; 0; 12; 24 enz. punten zijn, waarin de kromme de lijn PQ snijdt.

De tweede waarde $Sin.2\varphi = 0$ geeft $\varphi = \pm \frac{n}{2}\pi$; waaruit volgt, dat indien wij (— 12; 0);

(0; 12); (12; 24) enz. midden door deelen, al de punten — 18; — 6; 6; 18 enz. mede punten zullen zijn, waarin de kromme de lijn PQ doorfnijdt.

De derde waarde *Sin*. $3\phi = 0$ geeft eindelijk $\phi = \pm \frac{n}{3}\pi$; zoo dus de lijnen (0; 12), welke de achtervolgende waarden van π voorftellen, in drie gelijke deelen gedeeld worden, zullen de hier uit voortkomende punten 4; 8; 16; 20 enz. als mede — 4; — 8; — 16; — 20 enz. wederom punten zijn, waarin de kromme de lijn der abscisfen doorfnijdt.

§. 3. Stellen wij in de aequatie ($\phi \pm n\pi$) in plaats van ϕ, dan verandert de waarde van y in geenen deele, omdat *Sin*. ϕ als dan verandert in *Sin*. $(\phi \pm n\pi) = \mp$ *Sin*. ϕ, *Sin*. 2ϕ in *Sin*. $(2\phi \pm 2n\pi) = $ *Sin*. 2ϕ en *Sin*. 3ϕ in *Sin*. $(3\phi \pm 3n\pi) = \mp$ *Sin*. 3ϕ; hieruit volgt dan, dat wanneer de kromme wordt gefneden door een oneindig aantal ordinaten, welke op eenen afftand gelijk π van elkander verwijderd zijn, de ftukken van de kromme, begrepen tusfchen deze ordinaten, alle volmaakt gelijk en gelijkvormig zullen zijn en dus volkomen op elkander zullen pasfen; zoo pasfen b. v. de ftukken der kromme, begrepen tusfchen — 12 en 0, tusfchen 0 en 12, tusfchen 12 en 24, volkomen op elkander.

§. 4. Stellen wij — ϕ in plaats van ϕ; zoo ondergaat y geene andere verandering, dan dat zij van teekens verwisfelt, en dit toont aan, dat de kromme aan beide zijden van KL dezelfde gedaante heeft, alleen met dit onderfcheid, dat zij ter linker zijde van 0, eveneens beneden, als ter regter zijde van 0, boven PQ geplaatst is.

Maar nu volgt uit de vorige §, dat dit dan ook eveneens voor de punten 12; 24 enz., als mede voor — 12; — 24 enz., moet plaats heb-

hebben. Waaruit dan blijkt, dat de ſtukken der kromme begrepen tusſchen o en 6, tusſchen 6 en 12, tusſchen 12 en 18 enz, tot in het oneindige, zoowel ter linker zijde als ter regter zijde, alle gelijk en gelijkvormig aan elkander zijn, en niet anders dan in hunne poſitive of negative toeſtand ten opzigte van PQ, verſchillen, en hieruit volgt reeds voorloopig, dat de punten o, 6, 12, 18 enz., noodzakelijk buigpunten moeten zijn.

Het zal dan genoeg zijn, ons bij al het geene wij verder over deze kromme lijn willen zeggen, alleen tot het ſtuk tusſchen o en 12 begrepen, dat is tot de waarden van φ tusſchen o en π begrepen, te bepalen; wijl dit dan van zelf op al de overige gedeelten der kromme toepasſelijk zal zijn.

§. 5. Gaan wij dan over tot de Conſtructie van onze kromme lijn door punten. Het zou zeer bezwaarlijk zijn, dezelve uit onze gegevene aequatie te vinden, indien wij dezelve niet op de volgende wijze herleiden:

Wijl $Sin.p.Sin.q = \frac{1}{2}Cos.(q-p) - \frac{1}{2}(Cos.q+p)$, zoo is ook $Sin.\varphi.Sin.2\varphi = \frac{1}{2}Cos.\varphi - \frac{1}{2}Cos.3\varphi$ en dus

$Sin.\varphi.Sin.2\varphi.Sin.3\varphi = \frac{1}{2}Cos.\varphi.Sin.3\varphi -$
$\ldots\ldots\ldots \frac{1}{2}Cos.3\varphi.Sin.3\varphi$

maar $Cos.p.Sin.q = \frac{1}{2}Sin.(q+p) + \frac{1}{2}Sin.(q-p)$ zijnde, is $Cos.\varphi.Sin.3\varphi = \frac{1}{2}Sin.4\varphi + \frac{1}{2}Sin.2\varphi$ en $Cos.3\varphi.Sin.3\varphi = \frac{1}{2}Sin.6\varphi$, dus $Sin.\varphi.Sin.2\varphi.Sin.3\varphi = \frac{1}{4}Sin.2\varphi + \frac{1}{4}Sin.4\varphi - \frac{1}{4}Sin.6\varphi$ en dus wordt onze aequatie herleid tot

$$y = \frac{1}{4}(Sin.2\varphi + Sin.4\varphi - Sin.6\varphi) \ldots (2)$$

en wij hebben hier uit deze Conſtructie.

Laat (*Fig.* 171) met een' radius gelijk de eenheid a een' cirkel beſchreven worden, en deszelfs halven omtrek in even veel gelijke deelen worden verdeeld, als de lijn (o; 12) (*Fig.* 170),

 waar

waaraan die halve omtrek gelijk is, (in de Figuur zijn er 12 zulke deelen) en uit de deelpunten lijnen (1; 1'); (2; 2') (3; 3') enz. op de middellijn loodregt worden nedergelaten, dan zullen deze lijnen de Sinusſen van de overeenkomſtige bogen, dat is van de abscisſen van (*Fig.* 171) zijn, welke met dezelfde cijfers zijn aangedaan.

Niets is dan nu gemakkelijker, dan de kromme door punten te conſtrueren, want rigten wij uit al de deelpunten van PQ perpendiculairen op, dan zullen wij voor eenig punt, bijv. het punt 1, de waarde van de ordinaat (1; M) op de volgende wijze vinden.

Wijl voor het punt 1 van (*Fig.* 170) $= \phi$ boog (24, 1) van *Fig.* 171 is, zijn (2; 2'); (4'; 4) en (6', 6') de Sinusſen van 2ϕ; 4ϕ en 6ϕ en wij hebben dus $(1; M) = \frac{(2;2') + (4;4') + (6;6')}{2}$;

en wanneer wij deze eenvoudige Conſtructie op een genoegzaam aantal punten toepasſen, zullen wij niet alleen den geheelen loop van een der ſtukken, tusſchen 0 en 12 vinden, maar men zal zich, door deze Conſtructie voort te zetten, als het ware, proefondervindelijk kunnen overtuigen van de waarheid van al wat in de vorige § gezegd is.

Men moet echter bij deze Conſtructie zeer omzigtig zijn ten opzigte van de teekens, en al de Sinusſen, beneden de middellijn gelegen, als negatief aanmerken. Waaruit volgt, dat *Sin*. 6ϕ in het 2e of 3e quadrant vallende, in plaats van, *Sin*. 2ϕ + *Sin*. 4ϕ te worden afgetrokken, bij dezelve moet worden opgeteld: Een paar voorbeelden zal zulks nog duidelijker maken.

Nemen wij het punt 3 van PQ, dan is boog (24; 3) (*Fig.* 171) de waarde van ϕ, en dus (6; 6'), (12'; 12) en (18'; 18), de waarde van *Sin*. 2ϕ; *Sin*. 4ϕ en *Sin*. 6ϕ, de middelſte van de-

deze waarden is gelijk o, en de laatste negatief, en dus wordt voor het punt 3; (3; M') =

$$\frac{(6;\,6')+(18';\,18)}{4} = \tfrac{1}{2}\,(6;\,6')$$

Voor het punt 5 van PQ is *Sin*. 2φ = (10; 10'), *Sin*. 4φ = (20'; 20) en *Sin*. 6φ = (30'; 30), van welke drie Sinussen alleen de middelste negatief is; wij hebben dus (5; M') = ...

$$\frac{(10;\,10')-(20';\,20)-(30';\,30)}{4},$$

welke waarde negatief zijnde, aantoont, dat het punt M' beneden de lijn PQ moet genomen worden.

§. 6. De loop van een der gelijkvormige stukken (o; M; 4; M'; 6) is dan nu in zoo verre bepaald, dat hetzelve tusschen o en 4 geheel boven PQ, en tusschen 4 en 6 geheel beneden PQ ligt; tusschen 6 en 8 ligt dus de kromme even zoo boven PQ, als zij tusschen 6 en 4 beneden dezelve ligt, en tusschen 8 en 12 is zij eveneens beneden de lijn PQ geplaatst, als zij tusschen 4 en o boven dezelve ligt. Laat ons nu onderzoeken, hoe verre zij zich in deze stukken boven en beneden de lijn PQ verwijdert; dat is: laat ons onderzoeken, wanneer y een maximum of minimum wordt, voor waarden van φ, welke tusschen o en ½ π begrepen zijn, en waarbij dus *Cos*. φ en *Sin*. φ beide positief zijn.

In het 96e voorstel is voor de 1e en 2e differentiaal vergelijking van onze aequatie (zie aeq. 1) gevonden.

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -2\,(Cos.^4\varphi - 16\,Cos^2.\varphi + 1)\,(Cos^2.\varphi - 1)\ (3)$$

en $\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} = +\,2\,(144\,Cos^4.\varphi - 160\,Cos^2.\varphi + 34)$

$Sin.\varphi\,.\,Cos.\varphi$ .... (4)

Verder is aldaar gebleken dat door de eerste dezer aequatien gelijk o te stellen en de daar uit gevonden waarden van *Cos*. φ aan de tweede te toet-

zoetsen, de volgende waarden y een maximum of minimum maken.

$Cos.\phi = +\frac{1}{8}\sqrt{12+3\sqrt{10}}$ maakt y tot een maximum

$Cos.\phi = +\frac{1}{8}\sqrt{12-3\sqrt{10}}$ . . y tot een minimum

$Cos.\phi = -\frac{1}{8}\sqrt{12+3\sqrt{10}}$ . . y tot een minimum

$Cos.\phi = -\frac{1}{8}\sqrt{12-3\sqrt{10}}$ . . y tot een maximum

de eerste waarde stemt overeen met $\phi = 39^{\circ}24'54''85$ of. $\phi = 0,2203624 . \pi$, makende dan $(o; D) = (12; D') = (-12; D'')$ enz. $= 0,2203624 \times (o; 12)$, zullen de punten $E''E'E$ enz. de begeerde maxima zijn, bij welken $DE = D'E'$ enz. $= 0,5487370$ a zal zijn.

De tweede waarde van $Cos.\phi$ stemt overeen met $\phi = 74^{\circ}40'46''61$, dat is met $\phi = 0,4148858 . \pi$, nemende dan $(o: F) = (12; F') = (-12; F'')$ enz. $= 0,4148858 \times (o; 12)$, zullen de punten $G; G' G''$ enz. de begeerde minima zijn, waarbij $FG = F'G' = F''G''$ enz. $= 0,3416937 . a$ is.

Bij de twee andere waarden van $Cos.\phi$ zullen wij ons niet langer ophouden, zij geven de overige maxima en minima van onze kromme, welke echter uit den regelmatigen loop van dezelve geheel met de reeds gevondene overeenkomen, behalve dat zij van teeken verschillen.

§. 7. Om de Tangens aan eenig punt van onze kromme te trekken, zouden wij de waarde van $\frac{y\delta\phi}{\delta y}$, dat is de waarde van de subtangens moeten opmaken, dit geeft voor de subtangens

$$\frac{-y}{2(Cos^4.\phi - 16Cos^2.\phi + 1)(Cos^2.\phi - 1)^2}$$

welke waarde niet gemakkelijk te construeren is.

Maar nemen wij de herleide aequatie (a), namelijk

$$y = \frac{1}{2}(Sin.2\phi + Sin.4\phi - Sin.6\phi)$$

en differentieren wij dezelve, komt er

$$\frac{\delta y}{\delta\phi} = \frac{1}{2}(Cos.2\phi + 2Cos.4\phi - 3Cos.6\phi)$$

daar

daar nu deze uitdrukking, de trigonometrifche Tangens is van den hoek, die de raaklijn van eenig punt met de as der abscisfen maakt, hebben wij hierdoor eene gemakkelijke Constructie voor de raaklijn van eenig punt, omdat wij de Cosinusfen van $2\phi . 4\phi$ en 6ϕ wederom in *Fig.* 171 voorhanden hebben.

Begeeren wij bijv. de tangens aan het punt M van de kromme, dan is boog (24; 1) $= \phi$, en dus zijn (A; 2′) (A; 4′) en (A; 6′) de Cosinusfen van 2ϕ 4ϕ en 6ϕ; makende dan $(1; S) = \frac{(A; 2') + 2(A; 4')}{2}$ en $(1; R) = (A; 24) = a$; zal, RS en MF evenwijdig RS getrokken zijnde, MT de begeerde Tangens zijn.

Men moet hier ondertusfchen weder zorgvuldig op de teekens acht geven; en zorg dragen, dat (1; R) ter linker of regter zijde van het punt 1 genomen worde, naarmate $Cos.2\phi + 2\,Cos.4\phi - 3\,Cos.6\phi$ pofitief of negatief is: wel te verftaan, wanneer men (1; S) altoos boven PQ neemt, doch indien men (1; S) boven of beneden PQ neemt, naarmate $\frac{\delta y}{\delta\phi}$ pofitief of negatief is, dan moet $(1; R) = a$ altoos ter linker zijde van de ordinaat genomen worden.

§. 8. Voor den inhoud nemen wij mede onze herleide vergelijking $y = \frac{1}{4}(Sin.2\phi + Sin.4\phi - Sin.6\phi)$, dan is $y\delta\phi = \frac{1}{4}(Sin.2\phi.\delta\phi + Sin.4\phi.\delta\phi - Sin.6\phi.\delta\phi)$ en

Inhoud $= \int y\delta\phi = \frac{1}{4}(\int Sin.2\phi.\delta\phi + \ldots$
$\ldots \int Sin.4\phi\delta\phi - \int Sin.6\phi\delta\phi)$,

hetwelk geintegreerd zijnde geeft:

Inhoud $= \frac{1}{4}(-\frac{1}{2}Cos.2\phi - \frac{1}{4}Cos\,4\phi + \frac{1}{6}Cos.6\phi) +$ conft.

wijl nu de inhoud verdwijnen moet in de onderftelling van $\phi = 0$ en dat in deze onderftelling $Cos.2\phi = 1$, $Cos.4\phi = 1$ en $Cos.6\phi = 1$

 is,

is, hebben wij conſt. $= \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}) = \frac{7}{4 \cdot 12}$; waaruit
Inhoud $= \frac{1}{48}(2 Cos. 6\phi - 3 Cos. 4\phi - 6 Cos. 2\phi + 7)$ ſtellen wij hier in $\phi = \frac{1}{3}\pi$, is $Cos. \phi = \frac{1}{2}$; $Cos. 2\phi = -\frac{1}{2}$, $Cos. 4\phi = -\frac{1}{2}$ en $Cos. 6\phi = 1$ en dus is de inhoud van het ſtuk (0; M; M′; 4; 0) $= \frac{9}{32}$ dat is $= \frac{9}{32} a^2$,

Maar ſtellen wij $\phi = (0; 6) = \frac{1}{2}\pi$, is ... $Cos. 2\phi = -1$, $Cos. 4\phi = 1$ en $Cos. 6\phi = -1$, waardoor de inhoud wordt $\frac{1}{6}$ of $\frac{1}{6} a^2$. Wij moeten nu wel in het oog houden, dat het ſtuk (4; G : M″; 6) geheel beneden PQ liggende als negatief moet worden aangemerkt en dat dus $\frac{1}{6} a^2 =$ (0; E; M″; 4; 6) — (4; G; M″; 6; 4) is; waaruit (4; G; M″; 6; 4) = (0; E; M′; 4; 0) $- \frac{1}{6} a^2 = \frac{9}{32} a^2 - \frac{1}{6} a^2 = \frac{11}{96} a^2$ is; waardoor dan de inhoud van alle ſtukken der kromme, welke boven en beneden PQ liggen, *bepaald is.*

Stellen wij $\phi = (0; 12) = \pi$, wordt de inhoud $= 0$, om dat dan $Cos. 2\phi = Cos. 4\phi = Cos\ 6\phi = 1$ is, en dit beveſtigt nogmaals de waarheid, dat de deelen onder en boven de lijn der abscisſen even groot zijn.

§. 9. Laat ons nu tot het bepalen der buigpunten overgaan. De aequatie (4) is:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} = 2(144 Cos^4. \phi - 160 Cos^2. \phi + 34) Sin. \phi Cos. \phi$$

en zoo wij dezelve weder differentieren komt er

$$\frac{\partial^3 y}{\partial \phi^3} = 4(432 Cos^6. \phi - 680 Cos^4. \phi + 274 Cos^2. \phi - 17)$$

ſtellen wij nu $\frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} = 0$, hebben wij oogenblikkelijk deze twee oploſſingen. 1°. $Sin. \phi = 0$. 2°. $Cos. \phi = 0$.

De 1e $Sin. \phi = 0$ geeft $\frac{\partial^3 y}{\partial \phi^3} = 9 \cdot 4$ en dus zijn de punten 0, 12, 24 enz. als mede — 12;

— 24

— 24 enz. alle buigpunten, 200 als dit ook reeds in §. 4. gebleken is.

De 2e geeft $\frac{\partial^3 y}{\partial\phi^3} = -17.4$ en dus zijn de punten, 6, 18 enz. als mede — 6 : — 18; enz. ook alle buigpunten, hetgeen wij in §. 4 beide reeds hebben opgemerkt.

Losfen wij nu de vergelijking

$$144\, Cos^4.\phi - 160\, Cos^2.\phi + 34 = 0$$

op, dan vinden wij $Cos.\phi = \pm \frac{\sqrt{20 \pm \sqrt{94}}}{6}$, daar nu geene dezer vier waarden $\frac{\partial^3 y}{\partial\phi^3} = 0$ maakt, blijkt het, dat zij alle buigpunten voor onze kromme aanwijzen, welke wij nu nog in de Figuur moeten aantoonen.

$$Cos.\phi = \tfrac{1}{6}\sqrt{20+\sqrt{94}} = 0{,}9082087 \text{ geeft}$$
$$\phi = 24^\circ 44' 27'' 74 = 0{,}1374501 . \pi$$

nemen wij dan (o; V) = 0,1374501 × (o; 12) zal het punt V een buigpunt zijn, en op gelijke wijze worden de buigpunten V′, V″ enz. in de andere gelijkvormige gedeelten der kromme gevonden.

$$Cos.\phi = \tfrac{1}{6}\sqrt{20-\sqrt{94}} = 0{,}5350402 \text{ geeft}$$
$$\phi = 57^\circ 39' 12'' 05 = 0{,}3203889 . \pi$$

wanneer dan (o; X) = 0,3203889 × (o; 24) genomen wordt, zullen wij het buigpunt Y en bijgevolg ook de buigpunten Y′, Y″ enz. verkrijgen.

$Cos.\phi = -\tfrac{1}{6}\sqrt{20+\sqrt{94}}$ geeft op dezelve wijze de buigpunten v, v', v'' enz, en . . .

$Cos.\phi = -\tfrac{1}{6}\sqrt{(20-\sqrt{94})}$ de buigpunten x x' x'' enz, welke volkomen met de reeds gevondene, behalve in de teekens, overeenkomen.

N°. 194. Door

J. R. Schmidt.

§. 1. De oplossing van het vorige voorstel wel begrepen hebbende, kan de oplossing van dit voorstel geene moeite kosten. De aequatie is hier $y = Sin.\phi + Sin.2\phi + Sin.3\phi$ en heeft dus eenen soortgelijken vorm, als de herleide aequatie van ons vorige voorstel, en het zal dus niet noodig zijn, om op de constructie door punten, welke even als in het vorige voorstel afloopt, en ons *Fig.* 172 en 173 verschaft, langer stil te staan.

§. 2. Om de punten te vinden, waarin onze kromme de lijn PQ snijdt, maken wij van de herleiding van het 97e voorstel gebruik, dat is, wij substitueren $2 Sin.\phi\ Cos.\phi$ in plaats van $Sin.2\phi$ en $(4 Cos^2.\phi - 1)\ Sin.\phi$ in plaats van $Sin.3\phi$ en dan verandert onze vergelijking in

$$y = 2 Sin.\phi . Cos.\phi\ (2 Cos.\phi + 1)$$

stellende dan $y = 0$, hebben wij

1°. $Sin\ \phi = 0$ en dus $\phi = \pm n\pi$ en dit toont de punten 0; 12; 24 enz., als mede $-$ 12; $-$ 24 enz. aan, waar in de kromme de lijn PQ snijdt.

2°. $Cos.\phi = 0$, dit geeft $\phi = \pm \frac{2n+1}{2}\pi$; hetwelk ons de punten 6; 18 : 30 enz., als mede $-$ 6; $-$ 18; $-$ 30 enz., aantoont, waarbij $y = 0$ is.

3°. $2 Cos.\phi + 1 = 0$, of $Cos.\phi = -\frac{1}{2}$, hiermede stemt overeen $\phi = \pm (2n + 1 \pm \frac{1}{3})\pi$ en dit geeft ons de punten 8; 16; 32; 40 enz., als mede $-$ 8; $-$ 16; $-$ 32; $-$ 40 enz., waarin de kromme de lijn der abscissen doorsnijdt.

§. 3. Stellen wij in de aequatie $y = Sin.\phi + Sin.2\phi + Sin.3\phi$, ϕ negatief, verandert y al-

alleen van teeken, het welk aantoont, dat de kromme ter linker zijde van o even zoo beneden als ter regter zijde van o boven de lijn PQ is gesitueerd.

Stellen wij algemeener voor ϕ; $n\pi + \phi$ en $n\pi - \phi$ dan wordt in het 1e geval $y = \mp Sin.\phi + Sin.2\phi \mp Sin.3\phi$ en in het 2e geval $y = \pm Sin.\phi - Sin\,2\phi \pm Sin.3\phi$, welke waarden alleen in het teeken verschillende, aantoonen, dat niet alleen voor het punt o, maar voor alle punten o; 12; 24 enz., en o; — 12; — 24 enz., de eigenschap bestaat, dat de kromme aan de eene zijde even zoo boven als aan de andere zijde beneden PQ geplaatst is.

Stellen wij eindelijk $\phi + 2n\pi$ in plaats van ϕ, dan ondergaat y volmaakt geene verandering.

Deze aanmerkingen te zamen trekkende, blijkt uit dezelve 1°. dat de stukken der kromme begrepen tusschen achtervolgende ordinaten, welke eenen afstand gelijk 2π van elkander hebben, volkomen op elkander passen, zoo passen bij voorbeeld de stukken, begrepen tusschen — 17 en 7, en tusschen 7 en 31, volkomen op elkander. 2°. Dat van het punt o af te beginnen, de stukken begrepen tusschen op elkander volgende ordinaten, welke op eenen afstand gelijk aan π van elkander verwijderd zijn, mede gelijk en gelijkvormig en dus op elkander passende zijn, doch dat twee van zulke achtervolgende stukken in verschillende rigting, niet alleen van den as PQ der abscissen, maar ook van de as LK der ordinaten gelegen zijn. Er moeten dan noodzakelijk buigpunten in o; 12; 24; 36 enz., als mede in o; — 12; — 24; — 36 enz., bestaan, en er moeten voor waarden van ϕ, kleiner dan π, noodzakelijk 3 maxima of minima, en wel 2 maxima en een minimum bestaan.

§. 4. Deze maxima en minima zijn reeds in het 97e voorstel gevonden; aldaar is aangewezen,

zen, dat de formule $Sin.\phi + Sin.2\phi + Sin.3\phi$ een maximum of minimum wordt in de volgende gevallen:

1°. $Cos.\phi = + 0{,}7855010$ of $\phi = 38°13'59''95 = 0{,}2124073.\pi$ geeft het maximum E, waar mede de maxima E', E'' enz., en de minima e; e'; e'' overeenstemmen, en bij welke maxima en minima DE $= 2{,}5013.a$ is.

2°. $Cos.\phi = - 0{,}2419762$ of $\phi = 104°0',10''25 = 0{,}5777936.\pi$ geeft het minimum G, waarmede de minima G', G'' enz., en de maxima g; g'; g'' enz., overeenkomen, zijnde bij deze maxima en minima FG $= 0{,}2423.a$.

3°. $Cos.\phi = - 0{,}8768581$ of $\phi = 151°15'56''35 = 0{,}8403647.\pi$, toont het maximum I aan, en hiermede komen de maxima I'; I'' enz., en de minima i; i', i'' enz.; overeen, zijnde hier HI $= 0{,}6354.a$.

§. 5. Om de Tangens te construeren hebben wij uit $y = Sin.\phi + Sin.2\phi + Sin.3\phi$.

$$\frac{\delta y}{\delta \phi} = +(Cos.\phi + 2\,Cos.2\phi + 3\,Cos.3\phi)$$

en dus voor de Subtangens

$$\frac{y\delta\phi}{\delta y} = \frac{y}{Cos\ \phi + 2\,Cos.2\phi + 3\,Cos.3\phi} = \ldots$$

$$\ldots \frac{Sin.\phi + Sin.2\phi + Sin.3\phi}{Cos.\phi + 2\,Cos.2\phi + 3\,Cos.3\phi}$$

door welke formule wij voor eene gegevene waarde van ϕ de Subtangens kunnen berekenen.

Doch wij kunnen even als in het voorgaande voorstel de tangens ook construeren, door uit *Fig.* 173 de waarde $Cos.\phi + 2\,Cos.2\phi + 3\,Cos.3\phi$ te construeren, en na deze op de ordinaat afgezet te hebben, op PQ ter regter zijde van de ordinaat een stuk gelijk de radius a te nemen, en dan MR evenwijdig ST, te trekken. Men ziet echter duidelijk, dat ook dit slechts eene benaderde constructie is, welke wij in de Figuur bij het punt $9\frac{1}{2}$ hebben aangewezen.

§. 6.

§. 6. Den inhoud vinden wij gemakkelijk aldus, wijl $y = Sin.\phi + Sin.2\phi + Sin.3\phi$, zoo hebben wij $y\partial\phi = Sin.\phi\partial\phi + Sin.2\phi\partial\phi + Sin.3\phi\,\partial\phi$ en dit integrerende:
Inhoud $= -(Cos.\phi + \frac{1}{2}Cos.2\phi + \frac{1}{3}Cos.3\phi) +$ const.
maar $\phi = 0$ zijnde, moet de inhoud verdwijnen en dus const. $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$, zoodat
Inhoud $= \frac{11}{6} - (Cos.\phi + \frac{1}{2}Cos.2\phi + \frac{1}{3}Cos.3\phi)$

1°. Stellen wij $\phi = \frac{1}{2}\pi$, dan is $Cos.\phi = 0$, $Cos.2\phi = -1$, $Cos.3\phi = 0$, zoodat wij voor den inhoud van het stuk (o, E, 6, o) vinden: $\frac{11}{6} + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{3}$ dat is $= 2\frac{1}{3}.a^2$.

2°. Stellen wij $\phi = \frac{2}{3}\pi$, dan is $Cos.\phi = -\frac{1}{2}$, $Cos.2\phi = -\frac{1}{2}$ en $Cos.3\phi = 1$, in dit geval is de inhoud eigenlijk *Fig.* (o, E, 6, o) — *Fig.* (6, G, 8, 6), en dit verschil wordt dan gelijk $\frac{11}{6} - (-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}) = \frac{9}{4}.a^2$, dus *Fig.* (6; G; 8; 6) $= (\frac{7}{3}) - (\frac{9}{4}) = \frac{1}{12}.a^2$.

3°. Stellen wij $\phi = \pi$, is $Cos.\phi = -1$, $Cos.2\phi = 1$, $Cos.3\phi = -1$, wij hebben alzoo (o, E, 6, o) — (6; G; 8; 6) + (8, I, 12, 8) $= \frac{11}{6} - (-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = \frac{8}{3}a^2$, zoodat (8, I, 12, 8) $= \frac{8}{3} - \frac{9}{4} = \frac{5}{12}.a^2$.

§. 7. Laat ons nu de buigpunten van onze kromme trachten te bepalen.

Wij nemen hiertoe de herleide aequatie van §. 2, namelijk $y = 2Sin.\phi.Cos.\phi(2Cos.\phi + 1)$ waaruit

$$\frac{\partial y}{\partial\phi} = 2(6Cos^3.\phi + 2Cos^2.\phi - 4Cos.\phi - 1)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\phi^2} = -4(9Cos^2.\phi + 2Cos.\phi - 2)Sin.\phi$$

wij behoeven hier de derde differentiaal coëfficient niet te berekenen, daar het uit den loop der kromme klaar is, dat de drie waarden, welke $\frac{\partial^2 y}{\partial\phi^2} = 0$ verschaffen kan, alle wezenlijk tot buigpunten moeten behooren.

Stel-

Stellen wij dan $\frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} = 0$, zoo hebben wij terstond $Sin\ \phi = 0$ of $\phi = \pm n\pi$, het geen de buigpunten 0, 12, 24 enz., als mede 0, — 12, — 24 enz., welker bestaan ons reeds in §. 3. gebleken is, aantoont.

Doch, de Factor $9 Cos^2.\phi + 2 Cos.\phi - 2 = 0$ stellende, geeft ons $Cos.\phi = \frac{1}{9}(1 \pm \sqrt{19})$ waarvan wij de overeenkomstige buigpunten nu nog in de figuur moeten aanwijzen.

$Cos.\phi = \frac{1}{9}(1 + \sqrt{19}) = 0,5954332$ geeft ons

$\phi = 53°27'23''33 = 0,2969804.\pi$

nemende dus $(0; U) = 0,2969804 \times (0; 12)$, zal V het begeerde buigpunt zijn, en hierdoor zijn ook de buigpunten V, V' enz., als mede v, v' enz., gevonden.

$Cos.\phi = \frac{1}{9}(1 - \sqrt{19}) = -0,3732110$ geeft ons

$\phi = 111°54'49''64 = 0,6217433.\pi$

zoo wij dan $(0; X) = 0,6217433 \times (0; 12)$ nemen, zal Y het begeerde buigpunt zijn, en hier door zijn de overige buigpunten Y'; Y'' als mede y; y'; y'' enz., bepaald.

No. 195. Door

O. S. Banema.

Laten de regthoekszijden AF en AE (*Fig.* 172) onbepaaldelijk verlengd worden tot in R en Q, dan zal de hypothenuse EF in alle mogelijke stellingen, tusschen AF en AQ, raaklijn moeten zijn aan eene zekere kromme, waarvan de vergelijking enz. gevraagd wordt. Stel verder dat deze regte, in de stelling van $\angle$ AEF $= \alpha$, de kromme is rakende met het punt D, dan zal men dit punt D op de volgende wijze kunnen bepalen: trek DB loodregt op AQ, en DC loodregt op AR; stel AB $=$ CD $= x$, BD $=$ AC $= y$ en EF $= a$; dat is AF $= a\ Sin.\alpha$

en

en CF = x *Tang*. α; maar AC + CF = AF; dus y + x *Tang*. α = a *Sin*. α, of

$$x\, Sin.\alpha + y\, Cos.\alpha = a\, Sin.\alpha\, Cos.\alpha \;..(1)$$

Deze vergelijking tusſchen x en y zal plaats hebben voor elk ander punt D van de regte EF, en is dus de vergelijking van deze regte. De betrekking tusſchen x en y in deze vergelijking zal dezelfde blijven, zoo lang α dezelfde waarde behoudt, maar zoodra α van waarde verandert, zal ook de betrekking tusſchen x en y veranderen, uitgezonderd in één geval, wanneer namelijk x en y de coördinaten zijn van dat punt der regte EF, waarmede zij de kromme aanraakt; want naardien de regte EF altijd raaklijn is, en bijgevolg niet dan rakende van ſtelling veranderen kan, zal zij op het eerſte oogenblik van hare beweging, of bij de eerſte verandering van den hoek AEF, om het raakpunt moeten draaijen; bijgevolg zullen de coördinaten van dit punt der regte EF, bij de eerſte verandering van den hoek AEF = α dezelfde waarde moeten behouden; als men dan de vergelijking tusſchen x en y ten opzigte van α differentieert, x en y als ſtandvastig beſchouwende, zal men eene andere vergelijking tusſchen x en y bekomen, die niet meer voor de geheele uitgeſtrektheid van de lijn EF, maar alleen voor het raakpunt van dezelve geldig is; nu is $\partial\, Sin.\alpha = Cos.\alpha\, \partial\alpha$, $\partial\, Cos.\alpha = - Sin.\alpha\, \partial\alpha$, en $\partial\, Sin.\alpha\, Cos.\alpha = (Cos.\alpha^2 - Sin.\alpha^2)\, \partial\alpha$; deze differentialen van *Sin*. α, *Cos*. α, en *Sin*. α *Cos*. α, in plaats van de grootheden zelve ſtellende, en de vergelijking door $\partial\alpha$ deelende, zal men hebben:

$$x\, Cos.\alpha - y\, Sin.\alpha = a(Cos.\alpha^2 - Sin.\alpha^2) \;(2)$$

Door deze beide vergelijkingen kunnen de coördinaten x en y van het raakpunt D, op de volgende wijze bepaald worden; men multiplicere vergelijking (1) door *Sin*. α, en vergelijking (2) door

door $Cos.\alpha$, en addere dezelve tot elkander, dan heeft men

$$x = a\,Cos.\alpha^3 \ldots\ldots (3)$$

Als men de eerste vergelijking multipliceert door $Cos.\alpha$ en de tweede door $Sin.\alpha$, en deze van gene aftrekt, zal men hebben

$$y = a\,Sin.\alpha^3 \ldots\ldots (4)$$

Door deze waarden van x en y zal men alle punten van de kromme kunnen vinden, aangezien het raakpunt altijd een punt van de kromme is; maar om de vergelijking van de kromme te hebben, moet men α uit vergelijking (1) en (2), of (3) en (4), verdrijven, om alzoo eene vergelijking tusschen x en y onafhankelijk van α te verkrijgen. Nu is (3) $\frac{x^2}{a^2} = Cos.\alpha^6$ en (4) $\frac{y^2}{a^2} = Sin.\alpha^6$; dus $\sqrt[3]{\frac{x^2}{a^2}} = Cos.\alpha^2$ en ... $\sqrt[3]{\frac{y^2}{a^2}} = Sin.\alpha^2$; dus,

$$\sqrt[3]{\frac{x^2}{a^2}} + \sqrt[3]{\frac{y^2}{a^2}} = 1 \ldots\ldots (5)$$

Om deze vergelijking van wortelteekens te ontdoen, verheffe men dezelve tot de derde magt, komt

$$\frac{x^2}{a^2} + 3\sqrt[3]{\frac{x^2y^2}{a^4}}\left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{a^2}} + \sqrt[3]{\frac{y^2}{a^2}}\right) + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\text{of } \frac{x^2}{a^2} + 3\sqrt[3]{\frac{x^2y^2}{a^4}} + \frac{y^2}{a_2} = 1$$

$$\text{of } 3\sqrt[3]{a^2x^2y^2} = a^2 - x^2 - y^2$$

$$\text{of } 27a^2x^2y^2 = (a^2 - x^2 - y^2)^3 \ldots (6)$$

hetwelk eene zesde magts vergelijking is, van de derde magts vorm, en waardoor het in den eer-

eerſten opſlag onmogelijk zou ſchijnen, om x in y, of y in x te bepalen; maar als wij nagaan, dat deze vergelijking, door terug werking, weder gebragt kan worden tot den vorm van vergelijking (5), dan hebben wij terſtond . . . . .

$$\sqrt[3]{\frac{x^2}{a^2}} = 1 - \sqrt[3]{\frac{y^2}{a^2}};\ \frac{x^2}{a^2} = \left(1 - \sqrt[3]{\frac{y^2}{a^2}}\right)^3 \text{ en}$$

$$x = a\sqrt{\left(1 - \sqrt[3]{\frac{y^2}{a^2}}\right)^3} \ldots (7)$$

op gelijke wijze

$$y = a\sqrt{\left(1 - \sqrt[3]{\frac{x^2}{a^2}}\right)^3} \ldots (8)$$

Men kan echter de punten van de kromme op eene veel eenvoudiger wijze vinden, dan door deze vergelijkingen; want laat AG loodregt op EF ſtaan, dan is EF : AE = AE : EG; maar EF = a en AE = a $Cos.\alpha$; dus EG = a $Cos.\alpha^2$. Voorts is FD = CD $Sec.\alpha$ en CD = AB = x = a $Cos.\alpha^3$; dus FD = a $Cos.\alpha^2$ = EG. Hieruit volgt deze Conſtructie: trek AG loodregt op EF en maak FD = EG, dan is D het raakpunt op de regte EF en bijgevolg een punt van de kromme.

De rectificatie van onze kromme is allereenvoudigst; want door vergelijking (3) en (4) hebben wij $\partial x = - 3a\,Cos.\alpha^2\,Sin.\alpha\,\partial\alpha$, $\partial y = 3a\,Sin.\alpha^2\,Cos.\alpha\,\partial\alpha$; dus $\partial x^2 + \partial y^2 = 9a^2\,Sin.\alpha^2\,Cos.\alpha^2\,\partial\alpha^2$ en $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = 3a\,Sin.\alpha\,Cos.\alpha.\partial\alpha$, hetwelk de differentiaal is van den boog QD en waarvan de integraal is

$$QD = \tfrac{3}{2}\,a\,Sin.\alpha^2 \ldots\ldots (9)$$

Deze integraal heeft geen verbetering noodig, om dat dezelve nul wordt, als $\alpha = 0$ en dus BD = y = a $Sin.\alpha^3$ = 0 is. Maar vermits FD = a $Cos.\alpha^2$ is, zoo is ED = a — FD = a — a $Cos.\alpha^2$ = a $Sin.\alpha^2$; bijgevolg is de

boog QD gelijk anderhalf maal de raaklijn ED, en dienvolgens de geheele kromme, van Q tot R, gelijk anderhalf maal de lijn EF, hetwelk ook blijkt uit vergelijking (9), door $\alpha = 90°$ te stellen.

Voor de quadratuur van onze kromme hebben wij $y = a\,Sin.\,\alpha^3$ en $\partial x = - 3a\,Cos.\,\alpha^2\,Sin.\,\alpha\,\partial\alpha$, dus $y\partial x = - 3a^2\,Sin.\,\alpha^4\,Cos.\,\alpha^2\,\partial\alpha$, hetwelk de differentiaal is van de oppervlakte ABDR; dus

$ABDR = Const. - 3a^2 \int Sin.\,\alpha^4\,Cos.\,\alpha^2\,\partial\alpha.$

De integraal van $Sin.\,\alpha^4\,Cos.\,\alpha^2\,\partial\alpha$ is $- \frac{1}{6}\,Sin.\,\alpha^3\,Cos.\,\alpha^3 + \frac{1}{8}\,Sin.\,\alpha^3\,Cos.\,\alpha - \frac{1}{16}\,Sin.\,\alpha\,Cos.\,\alpha^3 + \frac{1}{16}\,\alpha$, waarvan men zich door differentiatie overtuigen kan; dus

$ABDR = a^2 (\frac{1}{2}\,Sin.\,\alpha^3\,Cos.\,\alpha^3 - \frac{3}{8}\,Sin.\,\alpha^3\,Cos.\,\alpha$ $\ldots + \frac{3}{16}\,Sin.\,\alpha\,Cos.\,\alpha^3 - \frac{3}{16}\,\alpha) + C.$

Deze integraal, genomen van $\alpha = 90° = \frac{1}{2}\pi$ tot $\alpha = 0$, geeft voor den geheelen inhoud van het kromlijnig vlak,

$$AQDRA = \frac{3}{32}\,a^2\pi \ldots \ldots (10)$$

Hiermede zullen wij, om niet al te uitvoerig te zijn, de analijsis van onze kromme staken, of schoon dezelve meer fraaije eigenschappen bezit; zoo is, bij voorbeeld de kromtestraal van het punt D altijd gelijk aan het drievoud van de loodlijn AG.

No. 196. Door

Q. S. BANGMA.

Laat (Fig. 175) GAH de voorgestelde hoek zijn; B en C twee gegevene punten in AG, D en E twee gegevene punten in AH, en F een punt in het vlak van den hoek GAH, zoodanig, dat $BF^2 + CF^2 + DF^2 + EF^2 = 4 \times AF^2$ zij. Stel $AB = b$, $AC = c$, $AD = d$, $AE = e$, $AF = a$, $\angle\,GAF = \alpha$ en $\angle\,HAF = \beta$, dan is

$BF^2 =$

$$BF^2 = b^2 + a^2 - 2\, b\, a\,.\, Cos\,.\, \alpha$$
$$CF^2 = c^2 + a^2 - 2\, c\, a\,.\, Cos\,.\, \alpha$$
$$DF^2 = d^2 + a^2 - 2\, d\, a\,.\, Cos\,.\, \beta$$
$$EF^2 = e^2 + a^2 - 2\, e\, a\,.\, Cos\,.\, \beta$$

en hiervan de som nemende en ter wederzijden $BF^2 + CF^2 + DF^2 + EF^2 = 4a^2$ aftrekkende:

$$0 = b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - \ldots$$
$$\ldots 2a\,(b\, Cos\,.\,\alpha + c\, Cos\,.\,\alpha + d\, Cos\,.\,\beta + e\, Cos\,.\,\beta)$$

waaruit volgt $a =$

$$AF = \frac{1}{2}\, \frac{b^2 + c^2 + d^2 + e^2}{(b + c)\, Cos\,.\,\alpha + (d + e)\, Cos\,.\,\beta}$$

Uit deze vergelijking blijkt, dat AF, voor elke waarde van α of β, maar eene waarde heeft, en dat bijgevolg alle punten F, die aan den eisch van het voorstel voldoen, gelegen zijn in eene regte lijn, waarvan de ligging op de volgende wijze bepaald kan worden: stel $\alpha = 0$ of $\beta = A$, dan is $Cos\,.\,\alpha = 1$, en maak $AG = \frac{1}{2}\, \frac{b^2 + c^2 + d^2 + e^2}{b + c + (d + e)\, Cos\,.\,A}$. Stel verder $\beta = 0$ of $\alpha = A$, dan is $Cos\,.\,\beta = 1$, en maak $AH = \frac{1}{2}\, \frac{b^2 + c^2 + d^2 + e^2}{(b + c)\, Cos\,.\,A + d + e}$. Trek door G en H eene onbepaalde regte lijn, dan zal deze de plaats van het punt F zijn.

No. 197. Door

O. S. BANGMA.

Stel (Fig. 196) ∠ ACD $= \alpha$, ∠ BCD $= \beta$; AC $= a$, BC $= b$ en DC $= d$, dan is

$$AD^2 = a^2 + d^2 - 2\, a\, d\, Cos\,.\,\alpha$$
$$BD^2 = b^2 + d^2 - 2\, b\, d\, Cos\,.\,\beta$$

dus $2d^2 = a^2 + b^2 + 2d^2 - 2ad\, Cos\,.\,\alpha - 2bd\, Cos\,.\,\beta$

en $d = \frac{1}{2}\,.\, \frac{a^2 + b^2}{a\, Cos\,.\,\alpha + b\, Cos\,.\,\beta} = CD.$

 waar-

waaruit blijkt, dat CD, voor elke waarde van α of β, maar eene waarde heeft, en dat bijgevolg het punt D gelegen is in eene regte lijn, die op de volgende wijze gevonden kan worden: stel $\alpha = o$ of $\beta = \angle$ ACB, dan zal D in CA of het verlengde van deze regte vallen, als in E, zoo dat $CE = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a + b \, Cos. ACB}$ worden zal. Stel vervolgens $\beta = o$ of $\alpha = \angle$ ACB, dan zal D in CB of het verlengde van CB vallen, als in F, zoo dat men hebben zal $CF = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a \, Cos. ACB + b}$; hierdoor de punten E en F bepaald hebbende, zal EF de begeerde plaats van het punt D zijn.

N°. 198. Door

O. S. Bangma, en *N. Bondt*.

Stel de radius van het grondvlak des eersten kegels R, en des tweeden kegels r, de hoogte des eersten kegels X, en die van den tweeden x, en den omtrek van den cirkel, welks middellijn één is, gelijk p, dan is het grondvlak van den eersten kegel $= pR^2$ en van den tweeden kegel $= pr^2$, de ronde oppervlakte van den eersten $= pR\sqrt{(R^2 + X^2)}$ en van den tweeden $= pr\sqrt{(r^2 + x^2)}$; dus $pR^2X = pr^2x$ en

$$pR^2 + pR\sqrt{(R^2 + X^2)} = pr^2 + pr\sqrt{(r^2 + x^2)}$$

Door deze vergelijking hebben wij vooreerst

$$R^2 - r^2 = r\sqrt{(r^2 + x^2)} - R\sqrt{(R^2 + X^2)}$$

en de beide leden tot de tweede magt verheffende:

$$R^4 + r^4 - 2R^2r^2 = r^4 + r^2x^2 + R^4 + R^2X^2 \ldots$$
$$\ldots\ldots - 2Rr\sqrt{(r^2 + x^2)(R^2 + X^2)}$$

of $R^2X^2 + r^2x^2 + 2R^2r^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$$\ldots\ldots 2Rr\sqrt{(R^2r^2 + R^2x^2 + r^2X^2 + X^2x^2)}$$

De

De beide leden dezer vergelijking wederom tot de tweede magt verheffende:

$$R^4X^4 + r^4x^4 + 2R^2r^2X^2x^2 + 4R^4r^4 + \ldots\ldots 4R^2r^2(R^2X^2 + r^2x^2) = 4R^4r^4 + 4R^2r^2X^2x^2 \ldots\ldots + 4R^2r^2(R^2x^2 + r^2X^2)$$

of

$$R^4X^4 + r^4x^4 - 2R^2r^2X^2x^2 = \ldots\ldots 4R^2r^2(R^2x^2 + r^2X^2 - R^2X^2 - r^2x^2) \ldots = 4R^2r^2(R^2 - r^2)(x^2 - X^2)$$

stellen wij in het tweede lid van deze vergelijking voor X zijne waarde $x.\frac{r^2}{R^2}$, dan hebben wij

$$R^4X^4 + r^4x^4 - 2R^2r^2X^2x^2 = \ldots\ldots 4\frac{r^2}{R^2}(R^2 - r^2)(R^4 - r^4)x^2$$

en hieruit den wortel trekkende

$$R^2X^2 - r^2x^2 = 2\frac{r}{R}(R^2 - r^2)x\sqrt{(R^2 + r^2)}$$

stellen wij nu in het eerste lid van deze vergelijking voor X zijne waarde $x\frac{r^2}{R^2}$, dan hebben wij

$$x^2\frac{r^4}{R^2} - r^2x^2 = 2\frac{r}{R}(R^2 - r^2)x\sqrt{(R^2 + r^2)}$$

of

$$x^2r^2(r^2 - R^2) = 2Rr(R^2 - r^2)x\sqrt{(R^2 + r^2)}$$

of

$$xr = -2R\sqrt{(R^2 + r^2)}$$

dat is

$$x = 2.\frac{R}{r}\sqrt{(R^2 + r^2)}$$

want het wortelteeken kan zoo wel *plus* als *minus* genomen worden; en daar $X = x\frac{r^2}{R^2}$ is, zoo hebben wij

$$X = 2\frac{r}{R}\sqrt{(R^2 + r^2)}$$

dus is de inhoud van iederen kegel

$$\tfrac{1}{3}pR^2X = \tfrac{1}{3}pr^2x = \tfrac{2}{3}pRr\sqrt{(R^2 + r^2)}$$

Voorts is, om de oppervlakte te vinden,

$$r^2 + x^2 = r^2 + \frac{4R^4}{r^2} + 4R^2 = \left(r + \frac{2R^2}{r}\right)^2 =$$

 $r^2 +$

$\left(\frac{r^2 + 2R^2}{r}\right)^2$; dus $\sqrt{(r^2 + x^2)} = \frac{r^2 + 2R^2}{r}$;

$x + \sqrt{(r^2 + x^2)} = \frac{2(r^2 + R^2)}{r}$; en . . . . . .

$pr^2 + pr\sqrt{(r^2 + x^2)} = 2p(r^2 + R^2)$, het de begeerde oppervlakte is.

N°. 199. Door

O. S. Bangma, en N. Bondt.

Laten R en r de radien der grondvlakken zijn, H en h de hoogten, en p de omtrek van eenen cirkel die de eenheid tot middellijn heeft, dan zijn de inhouden der grondvlakken pR^2 en pr^2, de bultige oppervlakten $2pRH$ en $2prh$, en de inhouden pR^2H en pr^2h; dus moet men hebben $pR^2H = pr^2h$ en

$$2pR^2 + 2pRH = 2pr^2 + 2prh$$

$$\text{of } R^2 + RH = r^2 + rh$$

deze vergelijking met R vermenigvuldigende en voor R^2H zijne waarde r^2h stellende, heeft men

$$R^3 + r^2h = r^2R + Rrh$$

Hieruit volgt:

$$h = \frac{(R^2 - r^2)R}{(R - r)r} = \frac{R}{r}(R + r)$$

dus $H = \frac{r}{R}(R + r)$, en hierdoor vinden wij voor den inhoud $pr^2h = pR^2H = pRr(R + r)$, en voor de oppervlakte: $2pR^2 + 2pRH = 2pR^2 + 2pr(R + r) = 2p(R^2 + Rr + r^2)$.

N°. 200. Door

J. R. Schmidt.

§. 1. Laat AB $= a$, AP $= y$ en $\angle$ PAM $= \phi$ gesteld worden, dan zal AP $=$ GH $= a\,Sin.\,2\phi$ zijn,

zijn; en dus zullen wij voor de polaire vergelijking van onze kromme hebben

$y = a\,Sin.\,2\,\phi = 2\,a\,Sin.\,\phi.\,Cos.\,\phi \ldots\ldots (1)$

§. 4. Door middel van deze vergelijking laat zich de vorm of loop van onze kromme zeer gemakkelijk opmaken, want wij behoeven slechts na te gaan; welke waarden AP of y verkrijgt, wanneer wij aan ϕ alle mogelijke waarden geven, dat is wanneer wij het punt F den geheelen omtrek laten doorwandelen.

Is $\phi = o$, dan is ook $y = o$, en de kromme gaat dus door het middelpunt A; maar wordt ϕ grooter en grooter genomen, dan neemt ook y allengskens in grootte toe, tot dat $\phi = \frac{1}{4}\pi = 45^\circ$, $y = a$ maakt; hetwelk de grootste waarde is, welke y verkrijgen kan, omdat $Sin.\,2\,\phi$ nooit grooter dan 1 kan worden. Deelende dan den hoek CAB midden door, zal I een punt van de kromme lijn, en wel een raakpunt van dezelve met den cirkel zijn. Hierdoor is dan den loop van het stuk API reeds eenigermate bepaald.

Stellen wij $\phi = 45^\circ + \psi$. of $\phi = 45^\circ - \psi$, verkrijgen wij in beide gevallen $y = a\,Cos.\,2\,\psi$. Wanneer dus $\angle$ IAP′ $= \angle$ IAP genomen wordt, zal AP′ $=$ AP zijn: waaruit dan volgt, dat het gedeelte AP′I van de kromme volkomen aan het stuk API gelijkvormig zal zijn, en dat dus iedere lijn PP′, loodregt door AI gaande, door AI in M′ zal worden midden doorgedeeld.

Onderzoeken wij nu; wat y wordt, voor de waarden van ϕ, begrepen tusschen $\frac{1}{2}\pi$ en π dat is tusschen 90° en 180°, dan blijkt het ras; dat $\phi = 90^\circ \pm \psi$ stellende, y hierdoor zal overgaan in $y = \mp a\,Sin.\,2\,\psi$; deze waarden nu alleen in het teeken verschillende, toonen aan, dat, wanneer het punt F, van C tot D voortgaat, de punten P niet meer op AF, maar op derzelver verlengde moeten genomen worden, doch dat voor het overige alle de waarden van

AP zoodanig met die van het eerfte quadrant overeenftemmen, dat het blad 2. volmaakt gelijk en gelijkvormig aan het blad 1. zal zijn.

Gaan wij nu voort met het punt F of liever de lijn AF rondom het punt A te laten bewegen, zoo vinden wij, dat voor eenige waarde van $\phi = 180^\circ \pm \psi$ zal wezen $v = \mp a\,Sin.\,2\,\psi$. Deze waarden verfchillen flechts weder in de tekens; en uit dit en het voorengezegde is dus blijkbaar, dat voor eenige ftelling van het punt F, tusfchen D en E, het punt P op de bewegende lijn AF zelve; maar voor F, tusfchen E en B, het punt P wederom op het verlengde van AF zal moeten genomen worden. Voor het overige de waarden van AP het zelfde zijnde, moeten de twee bladen 3 en 4 wederom geheel aan de twee reeds gevondene gelijk en gelijkvormig zijn.

Wilden wij de lijn AF nu eene tweede omwenteling laten doen, zouden wij vinden, dat de volgende takken geheel op de reeds gevondene vallen, omdat $Sin.\,2\,(360^\circ + \phi) = Sin.\,2\phi$ zijnde, v door de ftelling van $360 + \phi$ in plaats van ϕ, volftrekt geene verandering ondergaat.

De kromme beftaat alzoo uit vier gelijke en in alles overeenkomende bladen, welke elkander in de orde opvolgen, die in de Figuur door de cijfers 1, 2, 3, 4 is aangewezen; deze bladen raken den cirkel in de punten I, K, L en N, welke de quadranten midden door deelen, en zij fnijden elkander in het punt A, in welk vierdubbeld punt A de middellijnen DB en CE raaklijnen der kromme zijn. Wij merken hier nog bij aan, dat het even gemakkelijk is, om, door de conftructie op een genoegzaam aantal achtervolgende punten toetepasfen, uit het beurtelings grooter en kleiner; en pofitief en negatief worden der Sinusfen in de achtervolgende quadranten, tot dezelfde refultaten te komen.

§. 3.

§. 3. Laat nu door P een loodlijn XY op AP worden gesteld, dan is.

PX $=$ AP.*Tang*.ϕ $=$ v *Tang*.ϕ $=$ $2a$. *Sin*.ϕ.*Cos*.ϕ.*Tang*.ϕ $=$ $2a$ *Sin*^{2}.ϕ

en PY $=$ AP *Cot*.ϕ $= v$ *Cot*.ϕ $= 2a$.*Sin*.ϕ. *Cos*.ϕ.*Cot*.ϕ $= 2a$ *Cos*^{2}.ϕ.

Zoodat XY $=$ PX $+$ PY $= 2a$ (*Sin*^{2}.ϕ $+$ *Cos*^{2}.ϕ) $= 2a$, waaruit deze merkwaardige eigenschap der kromme volgt. *De lijn XY door eenig punt P der kromme, loodregt getrokken op de lijn AP, die dit punt met het middelpunt vereenigt, is altoos gelijk aan de middellijn van den cirkel.*

Deze eigenschap leidt ons tot eene andere, en zeer eenvoudige constructie van onze kromme, hierin bestaande.

„ Neem in den regten hoek CAB, eene lijn „ XY gelijk aan de middellijn van den cirkel, „ en laat deze lijn met deszelfs uiteinden X en „ Y langs de beenen van dien hoek heen en „ weder schuiven; wanneer dan in elken stand „ van XY uit het hoekpunt A, eene loodlijn „ AP op dezelve wordt nedergelaten, zullen de „ punten P onze kromme lijn vormen."

§. 4. Laat ons nu overgaan om de vergelijking der regtstandige coördinaten van onze kromme optesporen. Nemen wij ten dien einde BD en CE voor assen, en stellen wij AM $= x$ en PM $= y$, dan is $x^2 + y^2 = v^2$, dus $v = \sqrt{(x^2 + y^2)}$; verder is $x = v$ *Cos*.ϕ en $y = v$ *Sin*.ϕ, waaruit *Cos*.$\phi = \frac{x}{v}$ en *Sin*.$\phi = \frac{y}{v}$; substitueren wij dit in de vergelijking (1), dat is in $v = 2a$.*Sin*.ϕ.*Cos*.ϕ, dan verkrijgen wij

$$\sqrt{(x^2+y^2)} = \frac{2axy}{v^2} = \frac{2axy}{x^2+y^2}$$

dit gequadrateerd en met $(x^2 + y^2)^2$ vermenigvuldigd, komt er $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$, het-

 geen

geen ontwikkeld zijnde, voor onze vergelijking geeft:

$$x^6 + 3x^4y^2 - 4a^2x^2y^2 + 3x^2y^4 + y^6 = 0 \quad (2)$$

Ook deze zesde magtsvergelijking bevestigt alles, wat wij tot nog toe over deze kromme gezegd hebben, wij kunnen dit slechts met eenige luchtige trekken aanwijzen.

1°. Is $a = 0$ wordt $y^6 = 0$, en dus alle waarden van y gelijk 0, dit toont het vierdubbeld punt A aan.

2°. x en y komen niet anders dan in evene magten voor, de kromme is dus op dezelfde wijze ter linker als ter regterzijde van CE; en op dezelfde wijze boven als beneden DB gesitueert.

3°. x en y komen volmaakt op dezelfde wijze in de vergelijking voor; de kromme moet alzoo even eens ten opzichte van CE, als van DB, gesitueerd zijn, en de vier bladen moeten geheel met elkanderen overeenstemmen.

4°. Stellende $x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2}$, wordt ook . . . $y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2}$ en dit toont ons de punten I, K, L en N aan enz.

§. 5. Begeren wij de vergelijking der regtstandige coördinaten, wanneer LI en KN voor asfen genomen worden, dan stellen wij AM′ $= x$ en PM′ $= y$; wij hebben alsdan $v^2 = x^2 + y^2$ en dus $v = \sqrt{(x^2 + y^2)}$. Verder $x = v\, Cos.(45° - \phi) = v\, (Cos.45°\, Cos.\phi + Sin.45°\, Sin.\phi)$

$$\text{of } x = \tfrac{1}{2} v\, (Cos.\phi + Sin.\phi)\sqrt{2}$$

en $y = v\, Sin.(45° - \phi) = v\, (Sin.45°\, Cos.\phi -$ . . . . $Cos.45°\, Sin.\phi)$

$$\text{of } y = \tfrac{1}{2} v\, (Cos.\phi - Sin.\phi).\sqrt{2}$$

Hieruit trekken wij

$$Cos.\phi + Sin.\phi = \frac{x}{v}.\sqrt{2} \text{ en } Cos.\phi - Sin.\phi = \frac{y}{v}.\sqrt{2}$$

$$\text{dus } Cos.\phi = \frac{x+y}{2v}.\sqrt{2} \text{ en } Sin.\phi = \frac{x-y}{2v}.\sqrt{2}$$

bren-

brengende dit nu in $y = 2a\,Sin.\phi.Cos.\phi$ komt

$$\sqrt{(x^2+y^2)} = 2a.\frac{2(x^2-y^2)}{4y^2} = a.\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

waardoor de vergelijking in dit geval wordt

$$(x^2+y^2)^3 = a^2(x^2-y^2)^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; (3)$$

en hieruit kunnen wij wederom dezelfde resultaten trekken.

§. 6. Het blijkt bij het minste inzien, dat de polaire vergelijking $v = a\,Sin.2\phi$, eenvoudiger is dan een der vergelijkingen (2) of (3); beide laatste vorderen de oplossing van eene derde magtsvergelijking om y in x uittedrukken, en alzoo door middel der vergelijking de kromme te construeren; wanneer wij echter genoodzaakt waren, deze vergelijkingen tot de constructie te gebruiken, zouden wij deze derde magtsvergelijking kunnen ontwijken, en het zal niet ondienstig zijn dit voor een der vergelijkingen b. v. voor de vergelijking (2) aantewijzen.

Stellen wij dan in de vergelijking (2) $x = \frac{ty}{a}$, dan wordt dezelve

$$\frac{t^6y^6}{a^6} + 3.\frac{t^4y^6}{a^4} - 4t^2y^4 + 3\frac{t^2y^6}{a^2} + y^6 = 0$$

of $t^6y^2 + 3a^2t^4y^2 - 4a^6t^2 + 3a^4t^2y^2 + a^6y^2 = 0$

waaruit $y^2 = \frac{4a^6t^2}{t^6+3a^2t^4+3a^4t^2+a^6} = \frac{4a^6t^2}{(t^2+a^2)^3}$,

en dus $y = \pm\frac{2a^3t}{(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$ en $x = \pm\frac{2a^2t^2}{(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$

offschoon wij dan y niet in x kunnen uitdrukken, kunnen y en x echter beide in een derde veranderlijke t worden uitgedrukt; welke t hier de lijn zou zijn, welke uit C perp. op AC staat tot dat zij AF ontmoet. Door dit middel zou dan voor iedere waarde van t, x en y gemakkelijk te construeren of te bereekenen zijn: $\frac{dx}{dy}$. $\frac{d^2x}{dy^2}$ enz. zouden

den alle functien van t alleen worden, en dit zou het onderzoek der Tangenten, Maxima enz., mede veel gemakkelijker maken, dan dat men hiertoe de aequatie zelve zou bezigen.

§. 7. Wij zullen ons dan bij hetgeen wij verder over onze kromme willen zeggen, alleen tot de polaire vergelijking $v = a\,Sin.2\varphi$, als de eenvoudigste zijnde, bepalen, en wij merken op, dat wanneer wij den inhoud van eenig stuk, begrepen tusschen den boog ASP en de ordinaat AP $=$ I; den boog ASP $= z$ en den hoek APU, welke de tangens van eenig punt P met de ordinaat AP maakt, $= \varphi'$ stellen, wij in de oplossing van het 121. voorstel gevonden hebben

$$\delta.I = \tfrac{1}{2} v^2 \delta\varphi \;.\;.\;.\;.\;.\;. (4)$$
$$\delta z^2 = v^2 \delta\varphi^2 + \delta v^2 \;.\;.\;. (5)$$

en $Cos.\varphi' = \frac{\delta v}{\delta z}$. Uit deze laatste is $Sin.\varphi' = \frac{\sqrt{\delta z^2 - \delta v^2}}{\delta z}$ en dus $Tang.\varphi' = \frac{\sqrt{\delta z^2 - \delta v^2}}{\delta v}$; maar uit (5) hebben wij $\sqrt{(\delta z^2 - \delta v^2)} = \sqrt{v^2\delta\varphi^2} = v\delta\varphi$ en hierdoor wordt dan

$$Tang.\varphi' = \frac{v\delta\varphi}{\delta v} \;.\;.\;.\;.\;. (6)$$

§. 8. Gaan wij dan over tot het trekken van eene raaklijn aan eenig punt P van de kromme, dan hebben wij $v = a\,Sin.2\varphi$; $\delta v = 2a\,Cos.2\varphi\,\delta\varphi$ en bijgevolg

$$Tang.\varphi' = \frac{v\delta\varphi}{\delta v} = \frac{Sin.2\varphi}{2Cos.2\varphi} = \tfrac{1}{2}Tang.2\varphi.$$

Hieruit volgt deze opmerkenswaardige eigenschap der kromme. *De tangens van den hoek, welke de raaklijn van eenig punt der kromme met de polaire ordinaat maakt, is gelijk aan de helft van de tangens der dubbele hoek van die ordinaat met de as*, en hierdoor hebben wij deze eenvoudige Constructie.

Deel BV midden door in W en maak $\angle$ APU $=$

$=\angle$ WAB, dan zal PU de begeerde tangens van het punt P zijn.

Voor de punten I, K, L en N is $Tang. 2\phi = \infty$ en dus ook $Tang.\phi' = \infty = Tang. 90°$. het welk bevestigt, dat de kromme aldaar perpendiculair op de radius zijnde, den cirkel raakt.

Voor het punt A is $2\phi = n\pi$, dus $Tang. 2\phi = 0$ en dus ook $Tang.\phi' = 0 = Tang. 0$. Hierbij moet worden aangemerkt, dat offchoon in die gevallen AP zelve gelijk nul wordt, zij echter als dan of in de rigting van CE of in de rigting van BD ligt, en dat alzoo CE en BD zelve Tangenten der kromme zijn, zoo als wij dit reeds vroeger hebben aangemerkt.

§. 9. Om te onderzoeken, waar eenig blad AP'IPA deszelfs grootſte breedte OO' bereikt, zouden wij uit de vergelijking (3) moeten zoeken, voor welke waarde van x; y een maximum wordt. De formule $Tang.\phi' = \frac{1}{2} Tang. 2\phi$ geeft ons hiertoe echter een gemakkelijker middel aan de hand, want als dan moet de tangens evenwijdig met AI en dus $\phi' = 45° - \phi$ zijn.

Hieruit is nu $Tang.\phi' = \frac{1 - Tang.\phi}{1 + Tang.\phi}$; maar

$Tang.\phi' = \frac{1}{2} Tang. 2\phi = \frac{Tang.\phi}{1 - Tang^2.\phi}$ zijnde, hebben wij, om ϕ te bepalen, $\frac{1 - Tang.\phi}{1 + Tang.\phi} = \frac{Tang.\phi}{1 - Tang^2.\phi}$, of $1 - Tang.\phi = \frac{Tang.\phi}{1 - Tang.\phi}$, dat is $(1 - Tang.\phi)^2 = Tang.\phi$; eene quadraatsvergelijking, waaruit $Tang.\phi = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, zijnde het bovenſte teeken voor het punt O' en het benedenſte voor het punt O. Daar het echter voldoet één dezer punten te kennen, zoo nemen wij het benedenſte teeken en hebben als dan,

Sin.

$$Sin.2\phi = 2\,Sin.\phi\,Cos.\phi = \frac{2}{Sec.\phi.\,Cosec.\phi} = \frac{2}{\sqrt{(1+Tang^2.\phi)(1+Cot^2.\phi)}} = \frac{2\,Tang.\phi}{1+Tang^2.\phi} = \frac{3-\sqrt{5}}{1+\frac{1}{4}(14-6\sqrt{5})} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{3(3-\sqrt{5})} = \frac{2}{3},$$

waaruit $v = a\,Sin.2\phi = \frac{2}{3}a$, zoodat $AO = AO' = \frac{2}{3}AB$; beschrijvende dus met AO gelijk $\frac{2}{3}AB$ als radius een' cirkel, zullen de acht punten, waarin deze onze kromme snijdt, de begeerde punten aanwijzen; zijnde verder $AN' = AO\,Cos.(45^\circ - \phi) = a.\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}$ en $OO' = 2AO\,Sin.(45^\circ - \phi) = a.\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{6}}$.

§. 10. Bij de punten Q en Q' enz., alwaar de kromme het verste van de assen DB en CE verwijderd is, moet de tangens parallel aan die assen zijn. Voor het punt Q moet alzoo $\phi' = 180^\circ - \phi$ en bijgevolg $Tang.\phi' = -Tang.\phi$ zijn; wij hebben dus voor dit geval $-Tang.\phi = \frac{1}{2}Tang.2\phi = \frac{Tang.\phi}{1-Tang^2.\phi}$, of wel ... $Tang^2.\phi - 1 = 1$, waaruit $Tang.\phi = \sqrt{2}$; zoodat BR = BO gemaakt wordt, zal, AR trekkende, het punt Q, waarin zij de kromme snijdt, het begeerde punt zijn, en op gelijke wijze kunnen de overige punten Q' enz. gevonden worden.

Wij kunnen echter eene nog eenvoudiger constructie voor die punten vinden, want $Tang.\phi = \sqrt{2}$ zijnde, is $Sin.2\phi = \frac{2\,Tang.\phi}{1+Tang^2.\phi}$ (§. 9) $= \frac{2}{3}\sqrt{2}$ en $v = a\,Sin.2\phi = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$, en daar $BC = a\sqrt{2}$ is, $AQ = \frac{2}{3}BC$. Beschrijvende dus uit A, met $AQ = \frac{2}{3}BC$ als radius, eenen cirkel, zullen de acht punten Q, waarin deze cirkel de kromme snijdt, de begeerde punten zijn.

Hierdoor kan ook gemakkelijk den inhoud van het quadraat $abcd$ om onze kromme beschreven be-

bepaald worden, want uit $Tang. \phi = \sqrt{2}$ volgt $Sin. \phi = \sqrt{\frac{2}{3}}$ en $Cos. \phi = \sqrt{\frac{1}{3}}$, en dus is de zijde van dit quadraat, $bc = 2 a Sin. \phi = \frac{2}{3} a \sqrt{3}$ zoodat de inhoud gelijk is aan $\frac{64}{27}$ AB^2.

§. 11. De vergelijking (4) geeft ons nu den inhoud $\partial I = \frac{1}{2} v^2 \partial \phi$ en daar $v = a. Sin. 2\phi$ is, $\partial I = \frac{1}{2} a^2 Sin^2. 2\phi. \partial \phi$, waarvan de integraal is (zie voorstel 132 Bijlage B).

$$I = \tfrac{1}{4} a^2 (- \tfrac{1}{2} Sin. 2\phi\, Cos. 2\phi + \tfrac{1}{2}. 2\phi)$$

$$\text{of } I = \tfrac{1}{4} (\tfrac{1}{2} a^2. 2\phi - \tfrac{1}{2} a^2. Sin. 2\phi. Cos. 2\phi)$$

welke integraal geene verbetering noodig heeft, omdat zij in de onderstelling van $\phi = 0$ verdwijnt.

Nu is $AH = a\, Cos. 2\phi$ en $HG = a\, Sin. 2\phi$ en dus $\triangle AHG = \frac{1}{2} AH. HG = \frac{1}{2} a^2. Sin. 2\phi. Cos. 2\phi$.

Verder is boog $BG = 2 a \phi$ en dus Sector $ABFGA = \frac{1}{2} AB \times$ boog $BG = \frac{1}{2} a^2. 2\phi$, en de inhoud wordt hier door

$$ASPA = \tfrac{1}{4}(Sect. ABFGA - \triangle AHG) = \tfrac{1}{4} Fig. HBFGH$$

of $ASPA = \frac{1}{8}$ Segment $GBG'G$; dat is.

De inhoud van eenig stuk der kromme, bevat tusschen de kromme en eene polaire ordinaat, is gelijk aan het achtste gedeelte van het cirkel segment, waarvan de boog het viervoud van de hoek der polaire ordinaat met den as is.

Om nu den inhoud van een geheel blad ABIPA te bekomen, merken wij op, dat alsdan $\phi = \pi = 90°$ zijnde, het cirkelsegment van den viervoudigen boog alsdan de cirkel zelve is, en dat dus de inhoud van zulk een blad een achtste deel van den inhoud des geheelen cirkels, of wel de helft van het quadrant is: waaruit verder volgt, dat de acht stukken, waarin deze kromme den cirkel verdeelt, alle even groot zijn.

§. 12. Om tot de rectificatie der kromme overtegaan, nemen wij de vergelijking (5), dat is

$$\partial z^2 = y^2 \partial \phi^2 + \partial y^2$$

nu is $y = a\, Sin. 2\phi$ en $\partial y = 2 a\, Cos. \phi. \partial \phi$ en bijgevolg

∂z^2

$$\delta z^2 = a^2(Sin^2 . 2\phi + 4 Cos^2 . 2\phi)\delta\phi$$
$$\text{of } \delta z = a\delta\phi\sqrt{(Sin^2 . 2\phi + 4 Cos^2 . 2\phi)}$$

Deze formule kan niet anders dan door eene oneindige reeks worden geintegreerd, doch wij kunnen, om eenigermate aan dit ongemak te gemoet te komen, de rectificatie van onze kromme tot die van de Ellips herleiden.

Laat hiertoe op CE $= 2a$ als groote, en AF $= \frac{1}{2}$ AD $= \frac{1}{2} a$ als halve kleine as, een Ellips beſchreven worden; dan deelt deze Ellips alle lijnen gm, welke evenwijdig aan AD zijn, midden door in p. Stel nu A$m = x'$, $mp = y'$ en boog TP $= z'$, dan is zoo als bekend is $(\delta z')^2 = (\delta x')^2 + (\delta y')^2$, maar $x' =$ HG $= a\ Sin . 2\phi$ en $y' = \frac{1}{2} m$G $= \frac{1}{2} a\ Cos . 2\phi$ zijnde, is $\delta x' = 2a\ Cos . 2\phi . \delta\phi$ en $\delta y' = -a\ Sin . 2\phi . \delta\phi$, en ſubſtitueerende dit in de waarde van $(\delta z')^2$, komt er

$$(\delta z')^2 = a^2(Sin^2 . 2\phi + 4 Cos^2 . 2\phi)\delta\phi' = \delta z^2.$$

De bogen Tp en AP hebben dus dezelfde differentiaal en zij moeten bovendien beide in dezelfde onderſtelling van $\phi = 0$ verdwijnen, waaruit dan volgt dat de boog AP van onze kromme gelijk aan den boog Tp van den ellips zal zijn.

Hieruit volgt dan verder. Boog API $=$ boog TpC, en de omtrek van een blad onzer kromme zal dus gelijk zijn aan den halven omtrek van de ellips. De geheele omtrek van onze kromme is alzoo gelijk aan tweemaal den omtrek van de Ellips.

*

VERBETERINGEN

EN

DRUKFEILEN.

Op pag. 348 is door overhaasting eene misslag ingeslopen: de periode, van regel 5 tot regel 11 ingesloten, moet aldus gelezen worden:

1°. *Fig.* PERBP $= 2a^2\pi - \frac{9}{4}a^2\sqrt{3}$; maar BM $= \frac{3}{2}a$ en PM $= \frac{3}{2}a\sqrt{3}$ zijnpe, is 2 △PMB $= \frac{9}{4}a^2\sqrt{3}$; dus is, HQ midden door deelende in B′, △ BB′P $= \frac{9}{4}a^2\sqrt{3}$, en bijgevolg *Fig.* PB′BEP $= 2a^2\pi$. Daar wij nu voor den geheelen inhoud gevonden hebben $6a^2\pi$, blijkt hier uit, *dat de geknikte lijn PB′P′ den inhoud in twee deelen verdeelt, welke tot elkander in reden zijn, als één tot twee.*

Op pag. 352 moet in de vijfde aanmerking aldus gelezen worden:

Wij laten zulks voor den lezer over en eindigen met aantemerken, dat de krommen van *Fig.* 110, 111, en 112, niet alleen tot het geslachr der Epicijcloïden behooren, maar ook tot dat de Conchoïden, enz.

Pag. 133 reg. 13 van boven, *staat* hoek BED, *lees* hoek BEC

— 138 reg. 18 van bened. *staat* hoek ADE, *lees* hoek BDE

— 142 reg. 13 van boven, *staat* β, *lees* B

— 143 reg. 14 van bened. *staat* *Log. b*, *lees* *Log.* A

— 222 reg. 8 van boven, *staat* B =, *lees* C =

— 222 reg. 16 van bened. *staat* B =, *lees* C =

— 263 reg. 8 van boven, *staat* $(x\ 2)(x-3)$, *lees* $(x-2)(x-3)$

Pag.

VERBETERINGEN EN DRUKFEILEN.

Pag. 267 reg. 19 van bened. *staat* $+ 34] Cos. \varphi \times Sin. \Phi$, *lees* $+ 34 \; Cos : \Phi \times Sin . \Phi]$

— 283 reg. 16 van bened. *staat* $BC = a \times \frac{1}{8} \surd (39 + 4 \surd 13)$, *lees* $BC = a \times \frac{1}{8} \surd (16 + \surd 13)$

— 283 reg. 15 van bened. *staat* $AB = \frac{1}{34} (1174 + 286 \surd 13)$, *lees* $AB = \frac{1}{34} \surd (1174 + 286 \surd 13)$

— 344 reg. 14 van bened. *staat* $3 a^2 \varphi$, *lees* $3 a^2 \pi$

— 355 reg. 1 van boven *staat* $z = a \frac{p + q}{p - q}$, *lees* $z = a \frac{p - q}{p + q}$

— 526 reg. 19 van boven *staat Fig.* 158, *lees Fig.* 168

— 539 reg. 5, moet ingevuld worden: *Fig.* 162

Drukfeilen in de Opgaven.

Pag. 42 reg. 9 van onder *staat* S, *lees* M

— 42 reg. 4 van onder *staat* PS, *lees* PM

— 49 reg. 16 van boven *staat* één minder, *lees* twee meer.

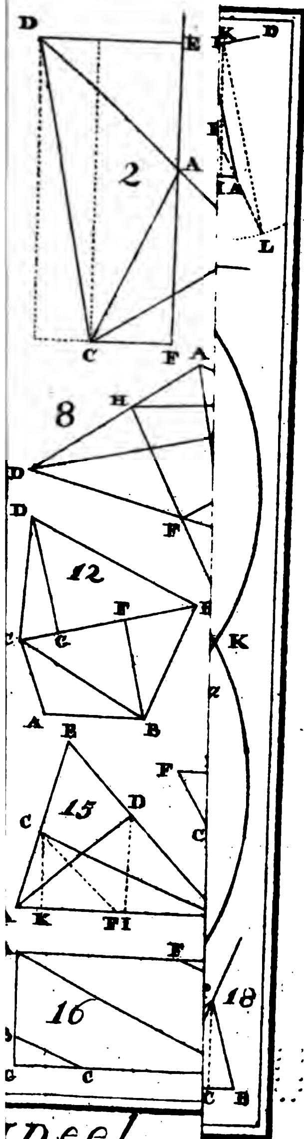
— 49 reg. 19 van boven *staat* het, *lees* de som van maand en

— 54 reg. 3 van onder *staat* driehoeks, *lees* vierkants

— 57 reg. 10 van onder *staat* 133, *lees* 113

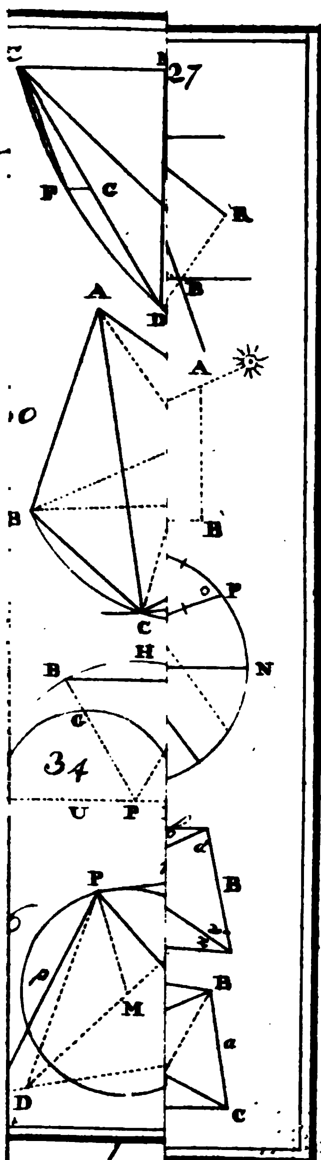
— 57 reg. 3 van onder *staat in den noemer* $6 x^2$, lees $6 a^2$.

bl I



rDeel

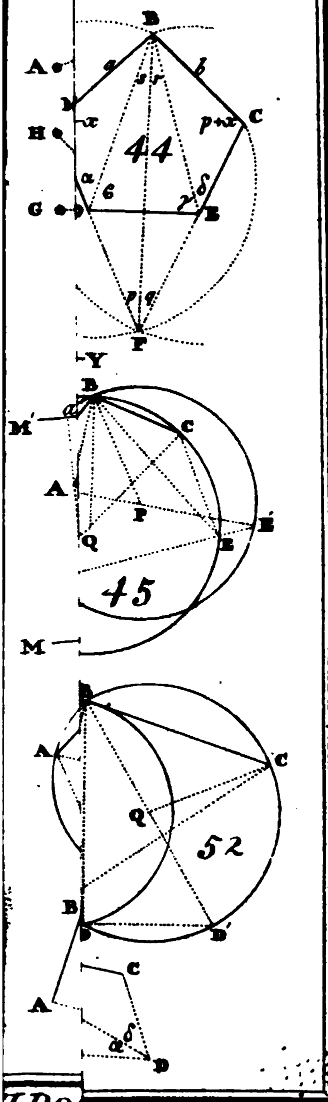
Pl II



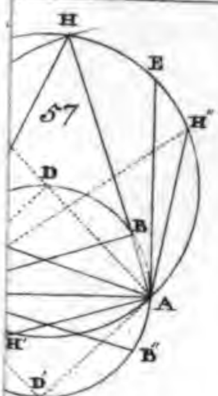
peel

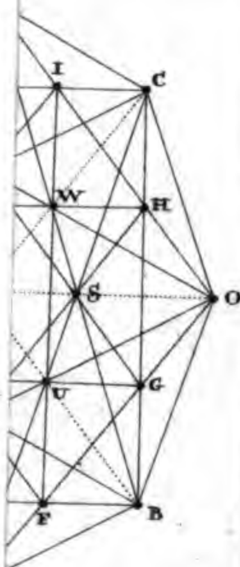


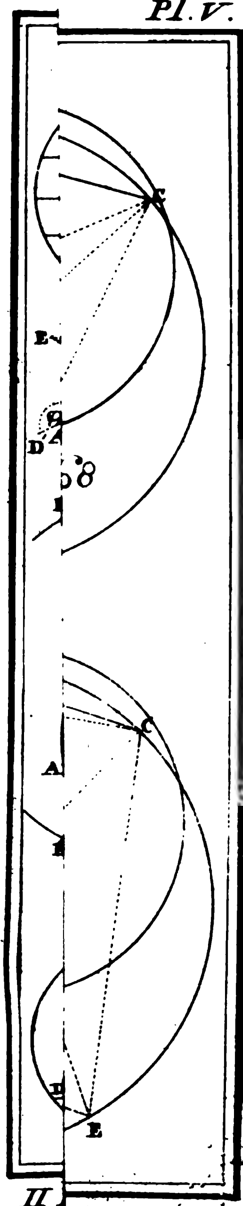
Pl. III.



Pl. IV.

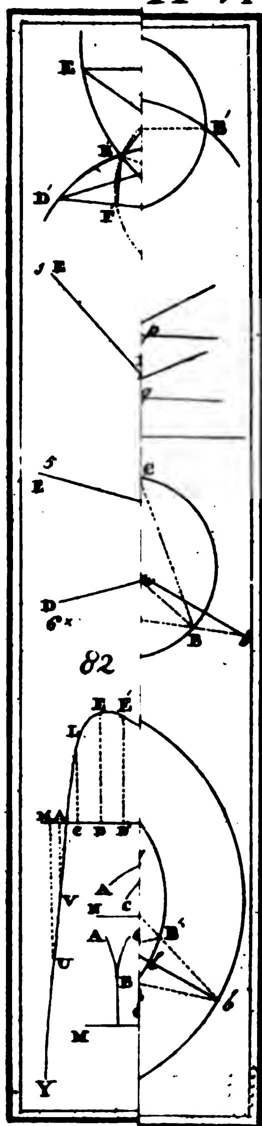





Pl. V.
C
D
C
A
E
II

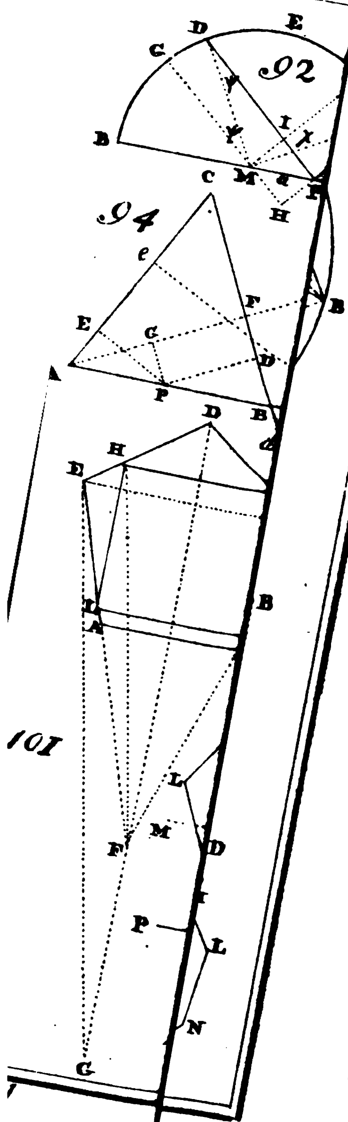



Pl VI

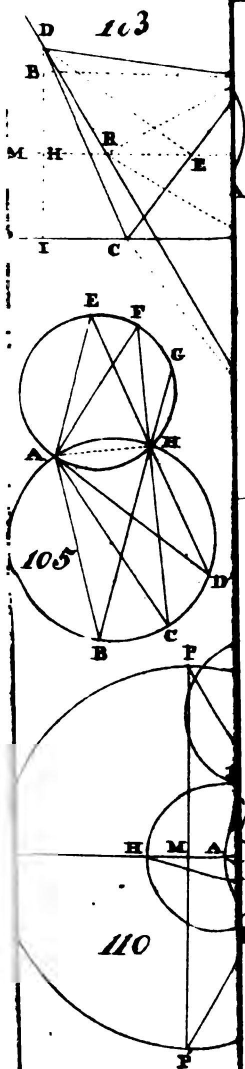


II Dec

VII

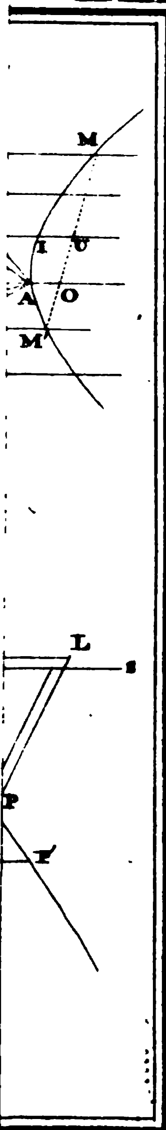


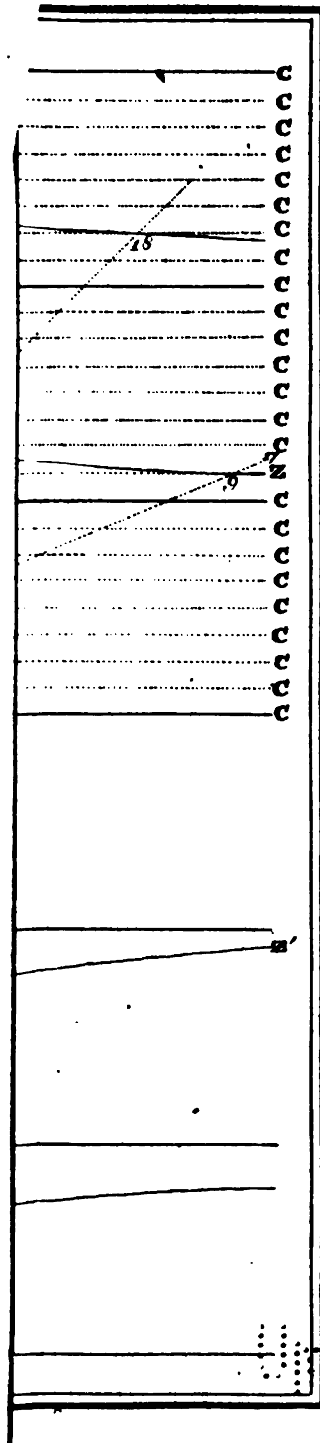
VIII

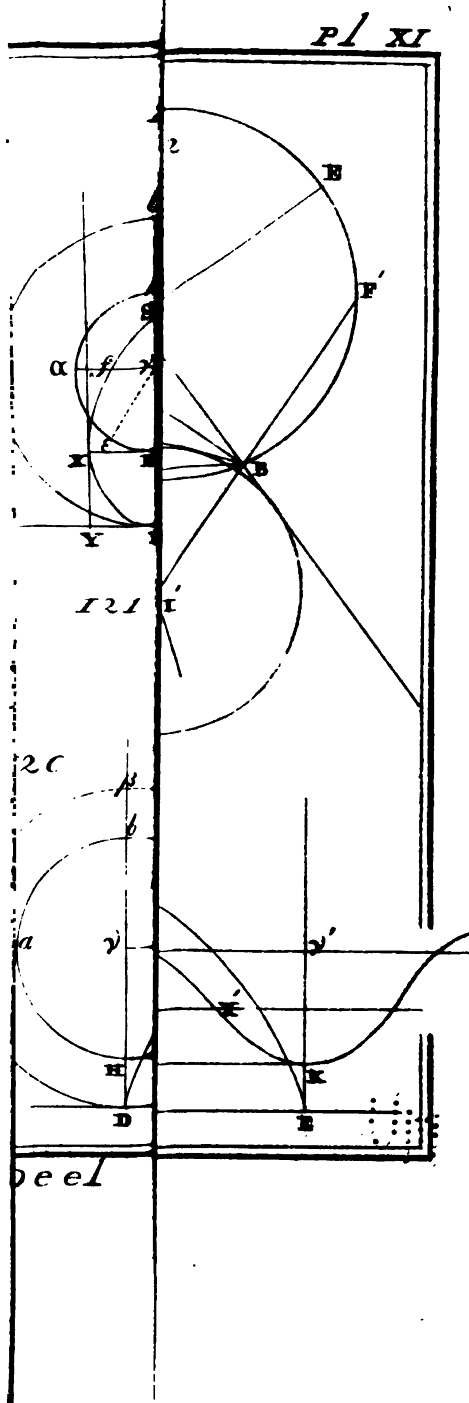


eel

Pl IX.

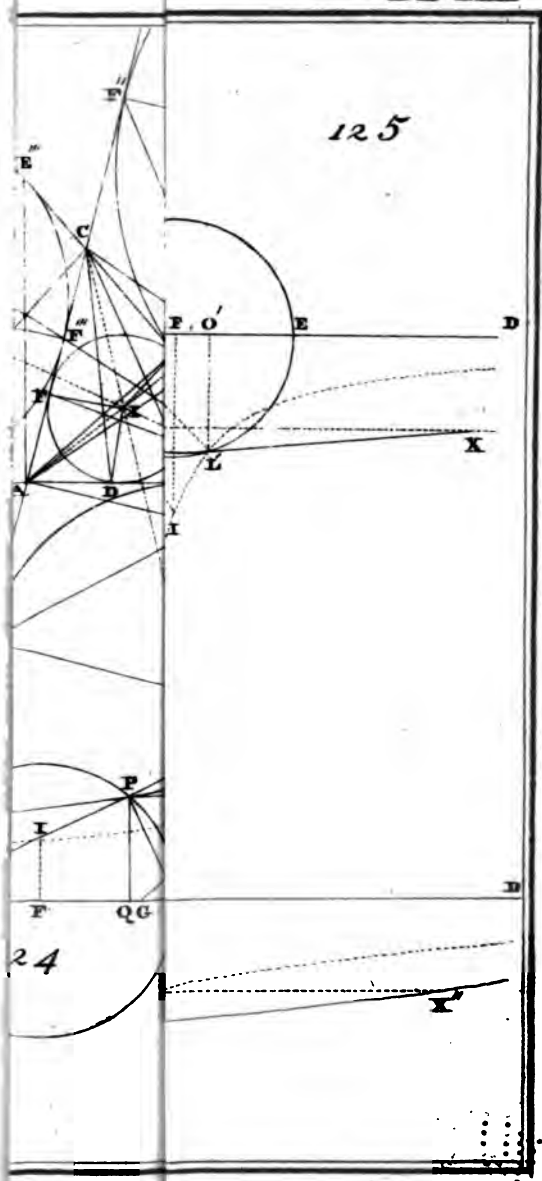


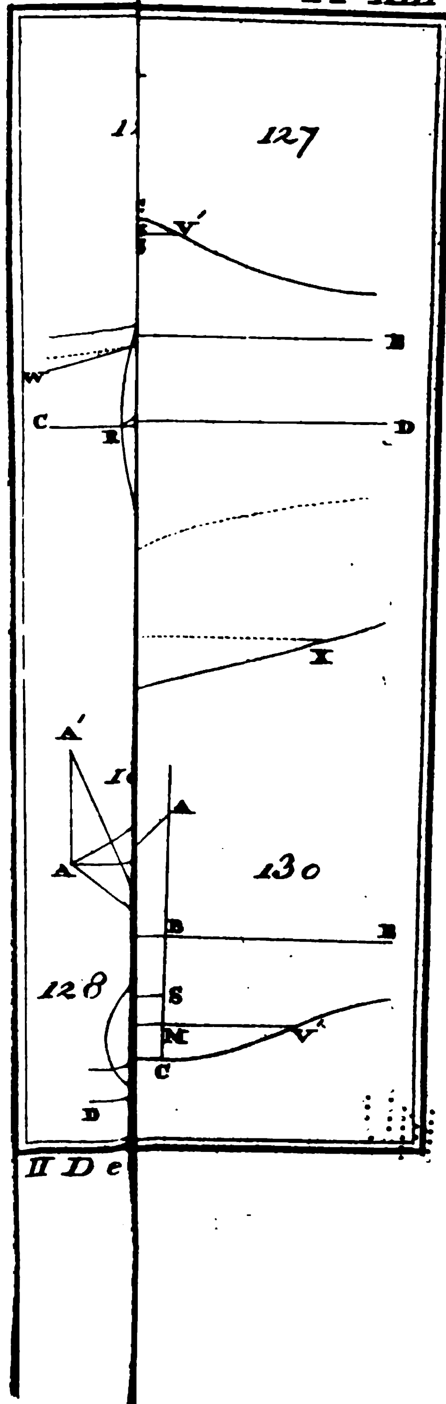

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
Z
C
C
C
C
C
C
C
C
C
18
9
Z'

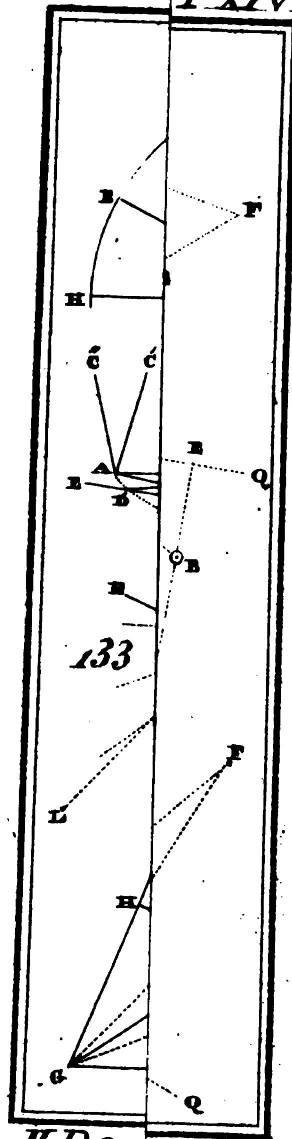


Pl XI
E
F′
B
X
Y
α
I′
121
β
b
a
γ
γ′
X′
H
K
D
E

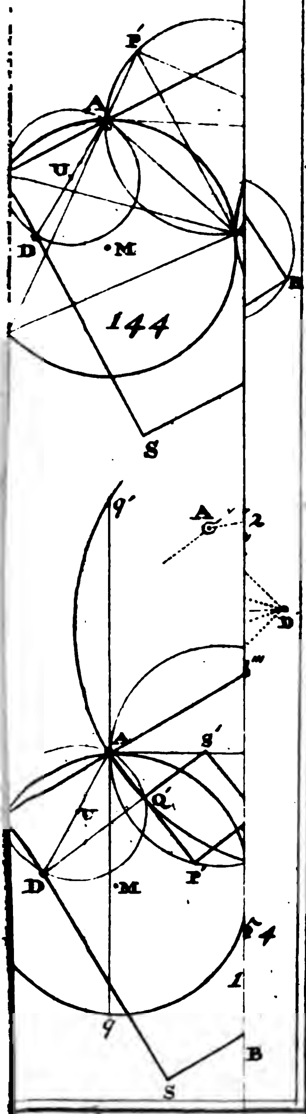
Pl XII




Pl XIII
127
V′
B
W
C
R
D
X
A′
A
A
130
B
B
128
S
N
V²
C
D
II D e

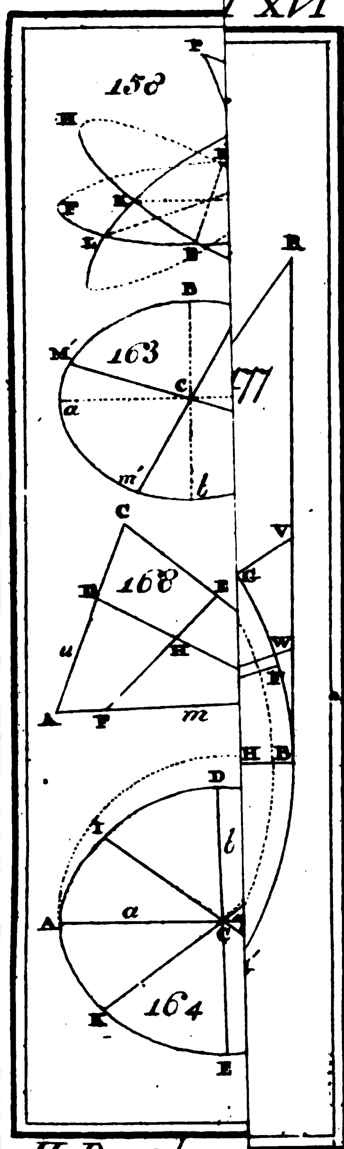

Pl XIV
F
H
C
C
A
E
D
E
Q
B
133
F
L
H
G
Q
II Dee

XV



Deel

XVI



II. Deel.